10

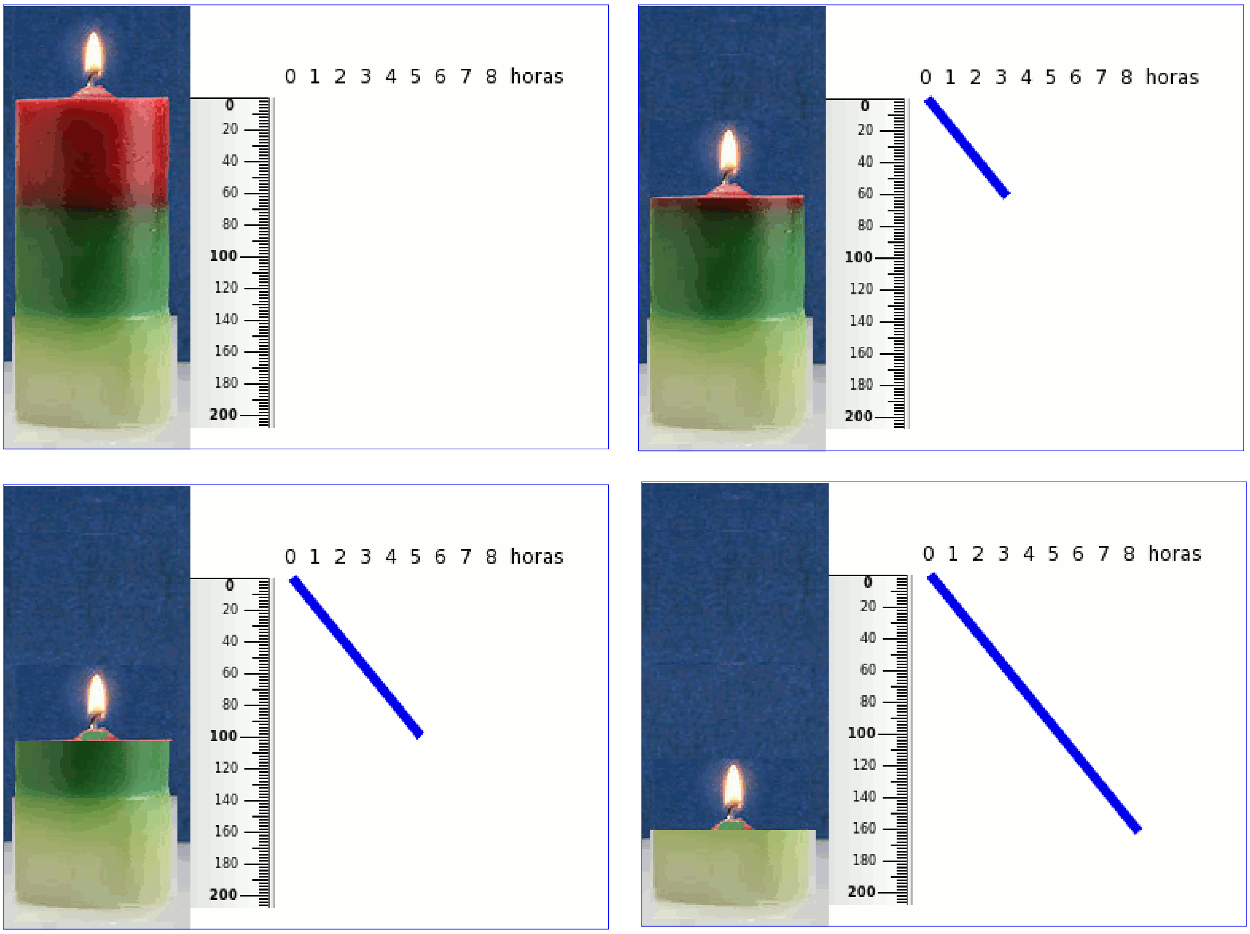
Funcións lineais e cuadráticas

Obxectivos

Nesta unidade aprenderás a:

- Identificar problemas nos que interveñen magnitudes directamente proporcionais.
- Calcular a función que relaciona a esas magnitudes a partir de diferentes datos e representala graficamente.
- Representar estas funcións de diferentes maneiras.
- Comparar funcións deste tipo.
- Resolver problemas reais nos que interveñen estas funcións.
- Recoñecer e representar funcións cuadráticas.

Antes de empezar



Investiga

Se unha sandía pesa 3 kg e outro peso 6 kg cobrarannos o dobre pola segunda. Pero se a primeira ten un diámetro de 15 cm e a outra o ten de 30 cm, será o prezo da segunda dobre que o da primeira?

Intenta atopar a resposta e dar unha explicación razoada a esta.

1. Función de proporcionalidade directa

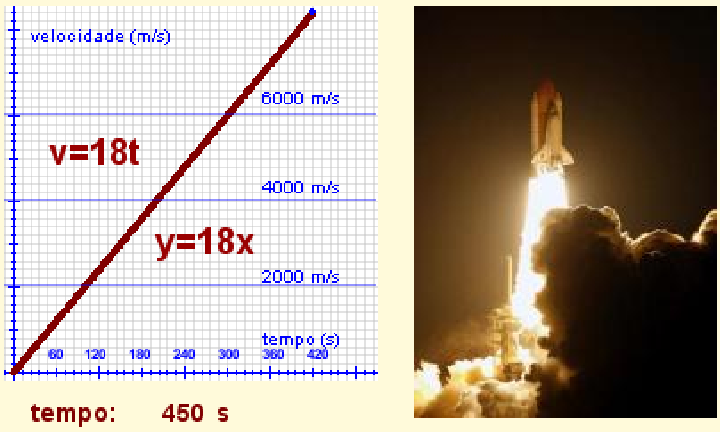
Definición

Chámase **función de proporcionalidade directa** ou, simplemente, **función lineal** a calquera función que relacione dúas magnitudes directamente proporcionais (x,y). A súa ecuación ten a forma

$$y = mx \text{ ou } f(x) = mx$$

O factor m é a constante de proporcionalidade e recibe o nome de **pendente** da función porque, como veremos na seguinte sección, indica a inclinación da recta que a representa graficamente.

Lembra: dúas magnitudes son directamente proporcionais se o seu cociente é constante.



tempo: 450 s
velocidade: 18 · 450 = 8100 m/s

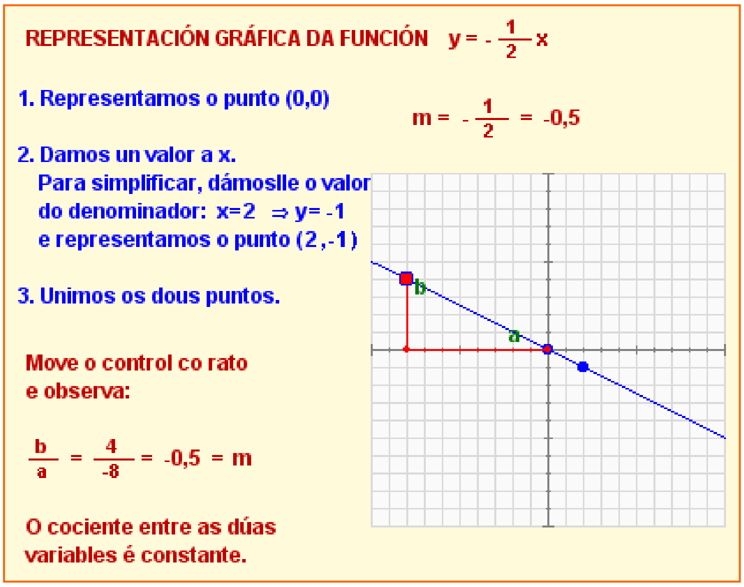
Os foguetes propulsores da lanzadeira espacial producen un impulso (ou aceleración) duns 18 metros por segundo cada segundo. Funcionan durante 450 segundos antes de se desprenderen. Velocidade e tempo son, neste caso, magnitudes directamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é a aceleración.

Representación gráfica

Como xa tes visto, as funcións lineais represéntanse graficamente como liñas rectas. Ademais, como y=mx, se x=0 entón y=0; polo tanto a gráfica de todas as funcións lineais pasa polo punto (0,0).

Para debuxar a gráfica basta con obter as coordenadas doutro punto, dando un valor arbitrario á x e unir ese punto coa orixe de coordenadas (0,0).

Se x=1, entón y=m, polo tanto m representa a variación de **y** por cada unidade de **x**, é dicir, a inclinación ou **pendente da recta**. Se m é positiva, representa a cantidade que sobe a y por cada unidade de x e se m é negativa a cantidade que baixa y por cada unidade de x.



EXERCICIOS resoltos

1. Determina se as relacións entre as parellas de magnitudes seguintes son lineais ou non escribindo para iso a ecuación que as relaciona.

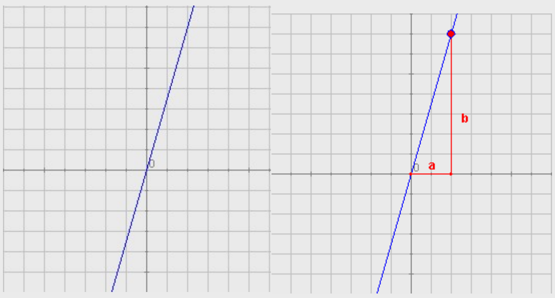
a. Relación entre o prezo inicial e o prezo rebaixado un 10%.
b. Relación entre o peso e o volume dun material en condicións constantes de presión e temperatura.
c. Un banco ofrece un depósito anual ao 5% cunha comisión fixa de 20€ Relación entre a cantidade invertida e os xuros recibidos.
d. Relación entre a área dun cadrado e a lonxitude do seu lado.

Solución:

a) Se o desconto é 10% pago o 90%: PRebaixado =0'9 · PInicial (SI é lineal)
b) A relación entre peso (P) e volume (V) é a densidade (d), que é constante se non cambian as condicións de presión e temperatura: P = d·V (SI é lineal)
c) Se C é a cantidade depositada e I son os xuros I =0'05 · C -20 (NON é lineal, pero case o é. En realidade é unha función afín que veremos no seguinte capítulo)
d) Se A é a área e *l* a lonxitude do lado, entón A = l^2 (NON é lineal)

2. Determina as ecuacións das funcións lineais que corresponden coas seguintes gráficas:

a.



Buscamos un punto de coordenadas enteiras (non é estritamente necesario pero é máis cómodo se é posible). a =2, b =7. A pendente é m=7/2 e a ecuación é $y = \frac{7}{2}x$

b.

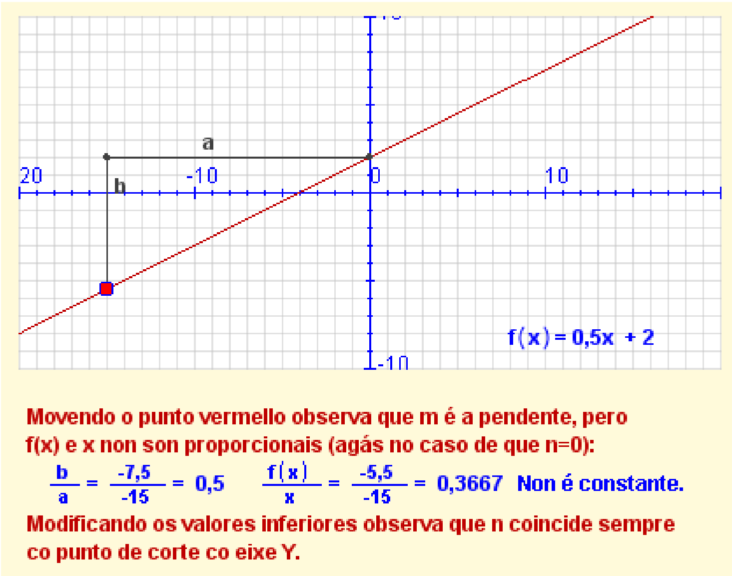
Neste caso a =5 e b =-4 (asignámoslle un valor negativo porque a recta é decrecente). A pendente é, pois, m = -4/5 e a ecuación e $y = -\frac{4}{5}x$

2. Función afín

Definición

Se a dúas magnitudes directamente proporcionais se lles aplica algunha condición inicial, a función que as liga xa non é totalmente lineal *(as magnitudes xa non son proporcionais*). Dise que é unha **función afín** e a súa forma é:

$$y = mx + n \text{ ou } f(x) = mx + n$$



A **pendente**, **m**, segue sendo a constante de proporcionalidade e o termo **n** denomínase **ordenada na orixe** porque é o valor que toma y (ordenada) cando x vale 0 (abscisa na orixe).

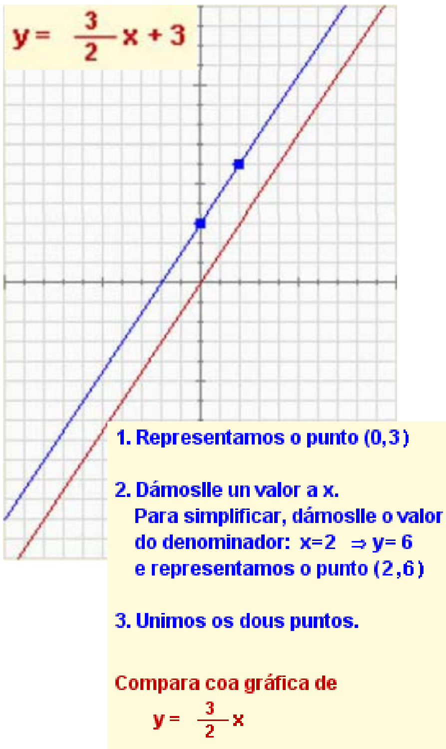
Lembra: Agora o cociente entre f(x) e x non é constante.

Representación gráfica

As funcións afíns represéntanse tamén mediante liñas rectas, pois o termo independente que as diferenza das funcións de proporcionalidade só produce unha translación da gráfica cara a arriba ou cara abaixo.

Para representar a gráfica precisamos obter dous puntos.

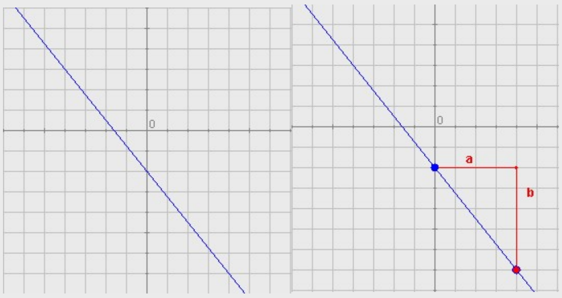
- Un deles obtémolo da propia ecuación pois, como vimos, a **ordenada na orixe**, n, indícanos que a recta pasa polo punto **(0,n)**.
- O outro punto obtense dándolle un valor calquera a x e calculando o correspondente valor de y. Unindo os dous puntos temos a gráfica da función.



EXERCICIOS resoltos

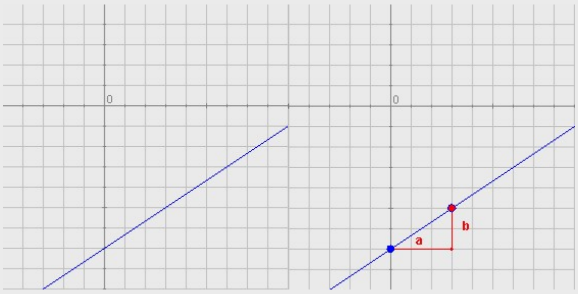
3. Determina a ecuación das funcións afíns que se corresponden coas gráficas:

a.



Corta ao eixe Y no punto (0,-2), logo n=-2. Agora buscamos outro punto de coordenadas enteiras se é posible (4,-7) e calculamos as súas distancias horizontal e vertical ao punto (0,-2): a = 4, b = -5. A pendente é m=-5/4 e a ecuación é $y = -\frac{5}{4}x - 2$ (Lembra: negativo por ser unha recta decrecente)

b.

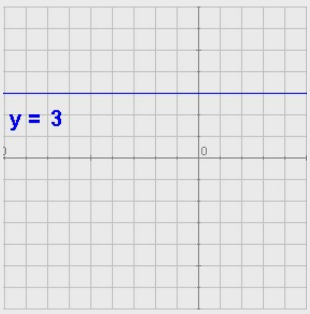


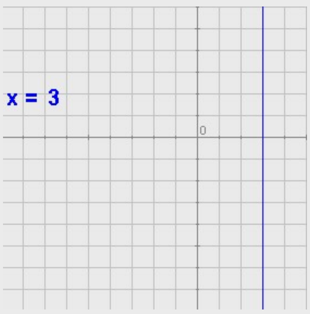
Neste caso n=-7, a=3 e b=2. A pendente é, polo tanto, m =2/3 e a ecuación é $y = \frac{2}{3}x - 7$

4. Casos particulares:

a. Se a pendente é cero, a ecuación é **y = n** e a función é constante.

b. Se a recta é vertical a ecuación é **x = k** e **non é unha función**. Dicimos que neste caso **a pendente é infinita**.





3. Ecuación da recta

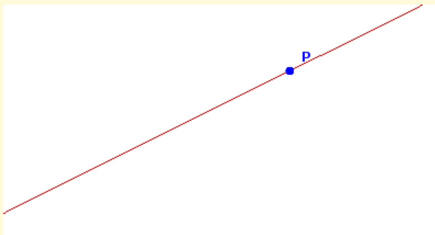
Ecuación punto-pendente

A ecuación **y = mx + n que** vimos denomínase **forma explícita** da ecuación da recta, e permítenos achar a devandita ecuación cando coñecemos a pendente e a ordenada na orixe.

Cando só coñecemos a pendente, m, e as coordenadas doutro dos puntos da recta, (x_0, y_0), a súa ecuación é

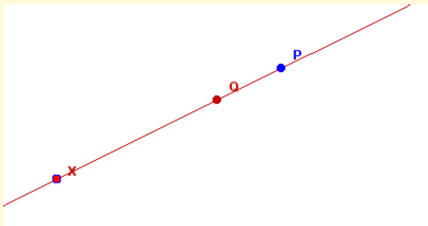
$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

Esta expresión recibe o nome de **ecuación punto-pendente** da recta. Na secuencia adxunta explícase como se obtén.



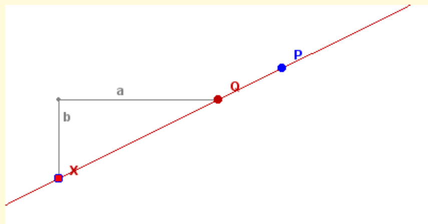
Da recta da imaxe coñécense a súa pendente e as coordenadas dun dos puntos polos que pasa. Queremos determinar a súa ecuación:

$m = \frac{1}{2}$ P = (6,5)



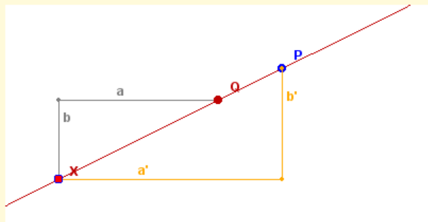
Consideremos un punto arbitrario X da recta e supoñamos que coñecemos a ordenada na orixe Q:

$m = \frac{1}{2}$ P = (6,5) X = (x,y) Q = (0,n)



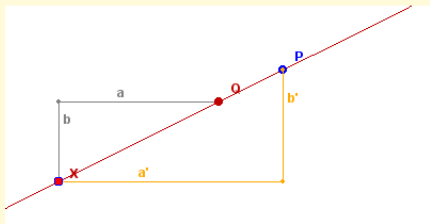
Nos apartados anteriores temos visto que aínda movendo X, o cociente entre b e a é constante e igual á pendente:

$m = \frac{1}{2}$ P = (6,5) X = (x,y) Q = (0,n) $\frac{b}{a} = m = \frac{1}{2}$



Observa que os triángulos da figura teñen os lados paralelos, logo son semellantes e polo tanto:

$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} = m = \frac{1}{2}$



P = (6,5) X = (x,y)

b' é a distancia vertical entre P e X: $b' = y - 5$

a' é a distancia horizontal entre P e X: $a' = x - 6$

logo $\frac{b'}{a'} = \frac{y-5}{x-6} = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2} \cdot (x - 6)$

EXERCICIOS resoltos

5. Acha a ecuación da recta que pasa por P(-8,-5) e de pendente m = 2/7

A ecuación punto-pendente é:

$$y + 5 = \frac{2}{7}(x + 8)$$

A ecuación explícita obtense así:

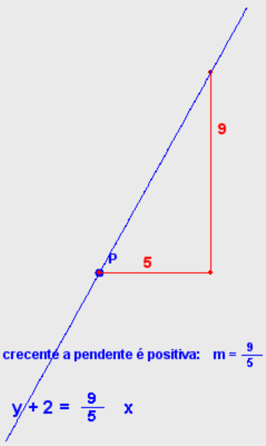
$$y + 5 = \frac{2}{7}x + \frac{2}{7}$$

Que equivale a:

$$y = \frac{2}{7}x - \frac{33}{7}$$

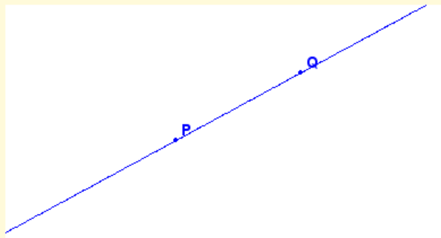
6. Determina a ecuación desta recta:

P (0 , -2)

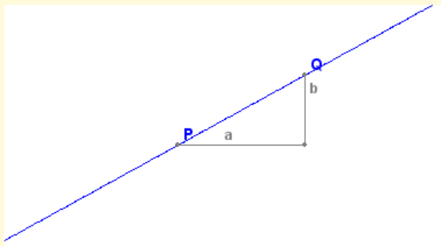


Como a recta é crecente a pendente é positiva: $m = \frac{9}{5}$

A ecuación é: $y + 2 = \frac{9}{5}\,x$

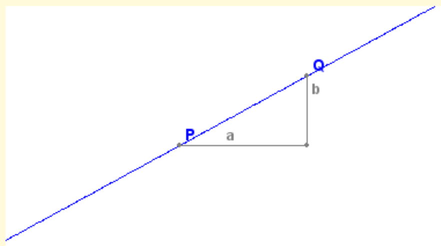


Os puntos P e Q da figura teñen coordenadas coñecidas P(x0,y0) e Q(x1,y1). Queremos achar a ecuación da recta que pasa por eles:



Procedemos como en casos anteriores:

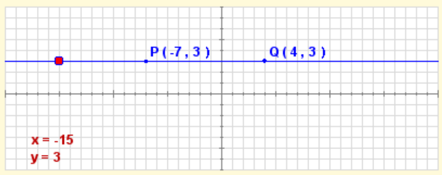
$a = x1 - x0 \qquad b = y1 - y0 \qquad m = \frac{b}{a} = \frac{y1 - y0}{x1 - x0}$



$m = \frac{b}{a} = \frac{y1 - y0}{x1 - x0}$ P = (x0,y0), a ecuación punto-pendente é:

$y - y0 = m\,(x - x0) \Leftrightarrow y - y0 = \frac{y1 - y0}{x1 - x0}(x - x0) \Leftrightarrow$

$$\frac{y - y0}{y1 - y0} = \frac{x - x0}{x1 - x0}$$



CASOS ESPECIAIS: Ordenadas iguais

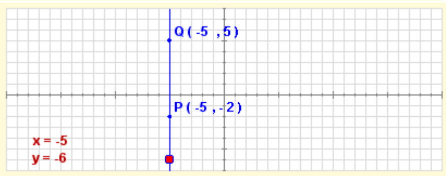
Coa fórmula anterior a ecuación da recta que pasa por P e Q é:

$$\frac{y - 3}{3 - 3} = \frac{x + 7}{4 + 7} \Leftrightarrow \frac{y - 3}{0} = \frac{x + 7}{11}$$

Non é válida porque hai unha división por cero!

Movendo o control comproba que todos os puntos da recta teñen a mesma ordenada e, polo tanto, a ecuación da recta neste caso é:

y = 3



CASOS ESPECIAIS: Abscisas iguais

Coa fórmula anterior a ecuación da recta que pasa por P e Q é:

$$\frac{y + 2}{5 + 2} = \frac{x + 5}{-5 + 5} \Leftrightarrow \frac{y + 2}{7} = \frac{x + 5}{0}$$

Non é válida porque hai unha división por cero!

Movendo o control comproba que todos os puntos da recta teñen a mesma abscisa e, polo tanto, a ecuación da recta neste caso é:

x = -5

Ecuación da recta que pasa por dous puntos

Sexan $P(x_o,y_o)$ e $Q(x_1,y_1)$ dous puntos do plano. A ecuación da recta que pasa por estes puntos é

$$\frac{y - y_o}{y_1 - y_o} = \frac{x - x_o}{x_1 - x_o}$$

Esta expresión recibe o nome de **ecuación continua** da recta. Na secuencia adxunta explícase como se obtén.

EXERCICIOS resoltos

7. Acha a ecuación da recta que pasa por P (5,-9) e Q(6,8). Exprésaa en forma explícita e determina a pendente e a ordenada na orixe.

A ecuación continua é: $\frac{y - (-9)}{8 - (-9)} = \frac{x - 5}{6 - 5}$

$$\frac{y + 9}{17} = x - 5$$

A ecuación explícita obtense resolvendo y:

$y = 17\ (x - 5) - 9 =$

$= 17x - 85 - 9 = 17x - 94$

$$y = 17x - 94$$

A pendente é 17

A ordenada na orixe é -94

8. Acha a ecuación da recta que pasa por P (7,4) e Q(-3,-1). Exprésaa en forma explícita e determina a pendente e a ordenada na orixe.

A ecuación continua é: $\frac{y - 4}{-1 - 4} = \frac{x - 7}{-3 - 7}$

$$\frac{y - 4}{-5} = \frac{x - 7}{-10}$$

A ecuación explícita obtense resolvendo y:

$y = -5\,\frac{x - 7}{-10} + 4 = \frac{1}{2}(x - 7) + 4 =$

$= \frac{x - 7}{2} + 4 = \frac{x - 7 + 8}{2} = \frac{x + 1}{2}$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

A pendente é $\frac{1}{2}$

Ecuación xeral ou implícita

O xeito máis habitual de representar rectas é a **ecuación xeral** ou **implícita**:

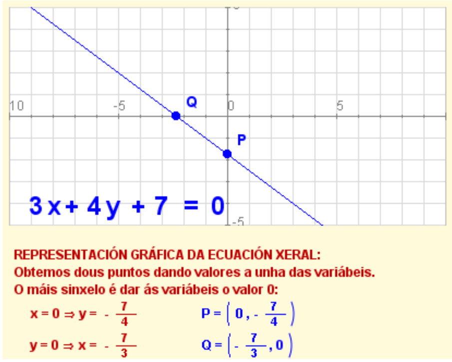
$$\mathbf{Ax + By + C = 0}$$

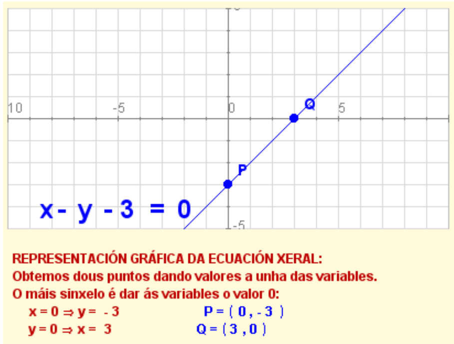
onde A, B e C son números calquera (coa condición de que polo menos A ou B sexan diferentes de cero).

Se B=0 trátase dunha recta vertical de ecuación $x = -\dfrac{C}{A}$.

Se B non é cero a pendente é $m = -\dfrac{A}{B}$.

Nas escenas móstranse representacións de rectas en forma xeral e o paso doutras formas de ecuación a xeneral.





PASO DE CALQUERA ECUACIÓN Á XERAL:

a) Función lineal en forma explícita:

$y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0$ (A = m, B = -1, C = 0) $m = -\dfrac{A}{B}$

b) Función afín en forma explícita:

$y = mx + n \Leftrightarrow mx - y + n = 0$ (A = m, B = -1, C = n) $m = -\dfrac{A}{B}$

c) Función constante (paralela ao eixe X):

$y = n \Leftrightarrow y - n = 0$ (A = 0, B = 1, C = -n) $m = -\dfrac{A}{B} = 0$

d) Recta vertical:

$x = n \Leftrightarrow x - n = 0$ (A = 1, B = 0, C = -n) Non se pode achar m

e) Ecuación punto-pendente:

$y - y0 = m(x - x0) \Leftrightarrow mx - y + y0 - mx0 = 0$ $m = -\dfrac{A}{B}$

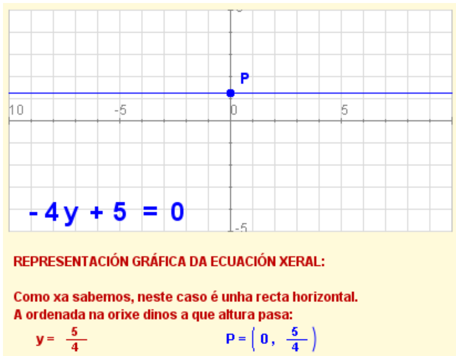
(A = m, B = -1, C = y0 - mx0)

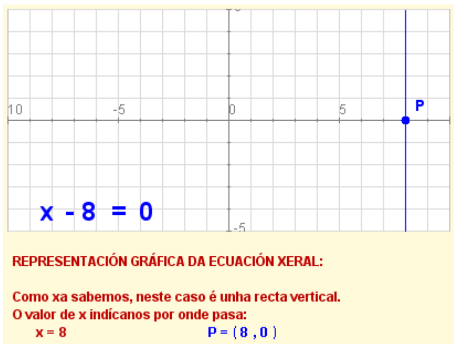
f) Ecuación continua:

$\dfrac{y - y0}{y1 - y0} = \dfrac{x - x0}{x1 - x0} \Leftrightarrow (y1 - y0)(x - x0) = (x1 - x0)(y - y0) \Leftrightarrow$

$(y1-y0)\,x - (x1-x0)\,y + y0\,(x1-x0) - x0(y1-y0) = 0$

(A = y1-y0, B = - (x1-x0), C = y0 (x1-x0) - x0(y1-y0)) $m = -\dfrac{A}{B}$





EXERCICIOS resoltos

9. Determina a ecuación da recta que pasa polo punto (1,-7) e cuxa pendente é -2/3. Despois pasa a forma xeral.

Solución: A ecuación punto-pendente é $y+7=-\frac{2}{3}(x-1)$.

Quitando denominadores e paréntese queda **3y +21 = -2 x +2**. Traspoñendo todo ao primeiro membro queda **2x + 3y + 19 =** 0. Tamén sería válido o resultado con todos os signos cambiados: **-2 x -3 y -19 =0**

10. Determina a ecuación da recta que pasa polo punto (-4,-2) e de pendente 0. Despois pasa a forma xeral.

Solución: A ecuación na forma punto-pendente xa é a ecuación xeral: **y + 2 = 0**

11. Determina a ecuación da recta que pasa polos puntos P(2,-2) e Q(-8,3). Logo pasa á ecuación xeral.

Solución: En forma continua a ecuación é $\frac{y+2}{3+2}=\frac{x-2}{-8-2}$.

Quitando denominadores queda: **-10 y -20 = 5 x -10**.
Poñendo todo no primeiro membro: **-5 x - 10y - 10 = 0**. Así abondaría, pero como todos os termos son múltiplos de 5 podemos simplificar: **-x -2y -2 = 0**. Tamén é válido cambiar todos os termos de signo: **x +2 y +2 = 0**.

12. Determina a ecuación da recta que pasa polos puntos P(5,-2) e Q(3,-2). Logo pasa a forma xeral.

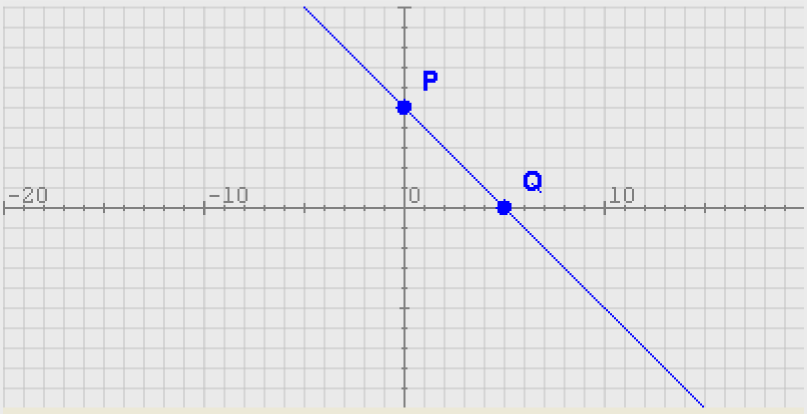
Solución: Como os puntos P e Q teñen igual ordenada, trátase da recta horizontal **y = -2**, ou en forma xeral: **y + 2 = 0**.

13. Determina a ecuación da recta que pasa polos puntos P(6,5) e Q(6,-2). Logo pasa a ecuación xeral.

Solución: Como os puntos P e Q teñen igual abscisa, trátase da recta vertical **x = 6**. En forma xeral queda **x - 6 = 0**.

14. Representa graficamente a recta que ten por ecuación xeral **x + y - 5 = 0**.

Solución: Resolvemos y para obter a ecuación explícita: y = -x +5. Polo tanto, a pendente é -1 e a ordenada na orixe é 5. É dicir, a recta pasa polo punto (0,5). Calculamos outro punto dando, por exemplo, o valor 5 a x. Entón y = -5 + 5 = 0. A recta pasa tamén polo punto (5,0). Debuxamos os puntos e unimos coa regra:



4. Posición relativa de dúas rectas

Análise en forma explícita

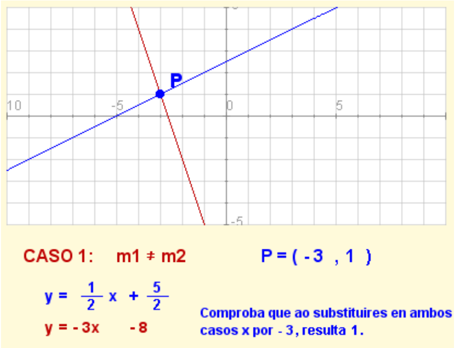
Dadas dúas rectas

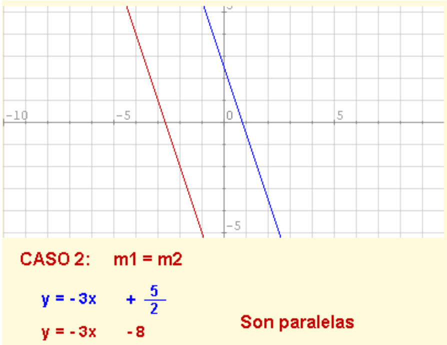
$$\mathbf{y = m_1x + n_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{y = m_2x + n_2}$$

Se $m_1 \neq m_2$ as rectas córtanse nun punto. As coordenadas dese punto de intersección obtéñense resolvendo o sistema. Dise que as rectas son **secantes**.

Se $m_1 = m_2$ as rectas son **paralelas**.

Se, ademais de coincidir as pendentes, tamén $n_1 = n_2$ as rectas serán entón **coincidentes**.





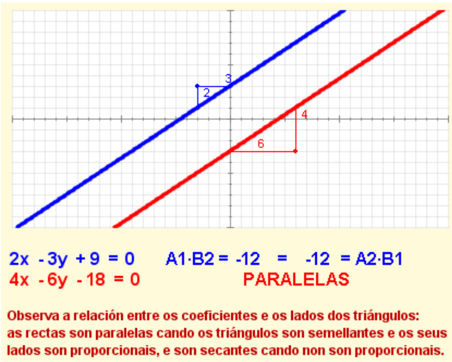
Análise en forma xeral

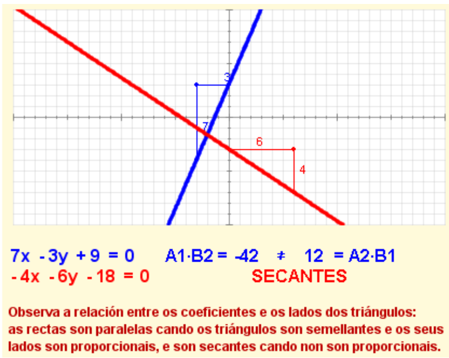
Dadas dúas rectas

$$\mathbf{A_1x + B_1y + C_1 = 0}$$
$$\mathbf{A_2x + B_2y + C_2 = 0}$$

Se $A_1B_2 \neq A_2B_1$ son **secantes**. Ao igual que no caso anterior as coordenadas do punto de corte obtéñense resolvendo o sistema.

Se $A_1B_2 = A_2B_1$ as rectas poden ser **paralelas** ou **coincidentes**.





EXERCICIOS resoltos

15. Determina a posición relativa das rectas **y = - 4 x +1**, **y = 4 x**. En caso de seren secantes, determina as coordenadas do punto de intersección.

Solución: A pendente da primeira recta é m_1 = -4 e a da segunda é m_2 = 4. Como as pendentes son distintas as rectas son **secantes**. Achamos agora o punto de corte resolvendo o sistema:

$$-4x + 1 = 4x; \quad 1 = 8x; \quad x = 1/8; \quad y = 4\cdot(1/8) = 4/8 = ½; \; P = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$$

16. Determina a posición relativa das rectas **y = -2 x + 3**, **y = -2 x - 2**. En caso de seren secantes, determina as coordenadas do punto de intersección.

Solución: A pendente de ambas as dúas rectas é -2 e a ordenada na orixe é diferente, polo tanto son dúas rectas **paralelas**.

17. Determina a posición relativa das rectas **x - 3 y -1 = 0**, **4 x + y + 1 = 0**. En caso de seren secantes, determina as coordenadas do punto de intersección.

Solución: Como están en forma xeral debemos comprobar se os coeficientes respectivos de x e y son proporcionais: $A_1=1$, $B_1=-3$, $A_2=4$, $B_2=1$, entón $A_1\cdot B_2$ = 1 e $A_2\cdot B_1$ = -12. Son diferentes, polo tanto as rectas son **secantes**. Imos achar as coordenadas do punto de intersección. Hai varias maneiras de facelo, unha delas é despexar y en ambas as dúas ecuacións (pasar a forma explícita) e repetir o feito no exercicio 15 máis arriba:

$$y = \frac{1-x}{-3}; \quad y = -1 - 4x; \quad \frac{1-x}{-3} = -1 - 4x; \quad 1 - x = 3 + 12x; \quad -2 = 13x; \quad x = -\frac{2}{13}$$

Agora substituíndo o valor obtido para x en calquera das dúas ecuacións temos:

$$y = -1 - 4\cdot\left(-\frac{2}{13}\right) = -1 + \frac{8}{13} = -\frac{5}{13}$$

Polo tanto, as coordenadas do punto de intersección son $P = \left(-\frac{2}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

Imos comprobar que o resultado é correcto substituíndo os dous valores en ambas as dúas ecuacións e vendo que en ambos casos as igualdades se verifican:

$$-\frac{2}{13} - 3\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) - 1 = -\frac{2}{13} + \frac{15}{13} - 1 = \frac{13}{13} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$4\cdot\left(-\frac{2}{13}\right) + \left(-\frac{5}{13}\right) + 1 = -\frac{8}{13} - \frac{5}{13} + 1 = -\frac{13}{13} + 1 = -1 + 1 = 0$$

18. Determina a posición relativa das rectas **2x -5 y -1 = 0**, **-4 x +10 y +1 = 0**. En caso de seren secantes, determina as coordenadas do punto de intersección.

Solución: Como temos as ecuacións xerais debemos comprobar se os coeficientes respectivos de x e y son proporcionais: $A_1=2$, $B_1=-5$, $A_2=-4$, $B_2=10$, entón $A_1\cdot B_2$ =20 e $A_2\cdot B_1=20$. Son iguais, polo tanto as rectas son **paralelas**.

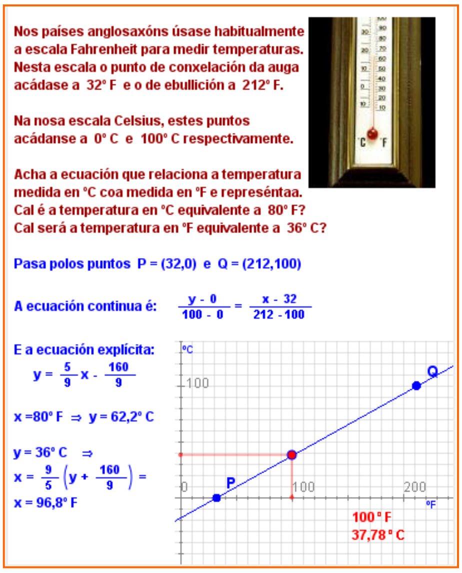
5. Aplicacións

Problemas simples

As funcións lineais describen fenómenos nos que interveñen magnitudes directamente proporcionais. A representación gráfica será unha recta cuxa pendente nos aporta información da rapidez da variación dunha magnitude con respecto á outra mentres que a ordenada na orixe nos informa sobre as condicións iniciais.

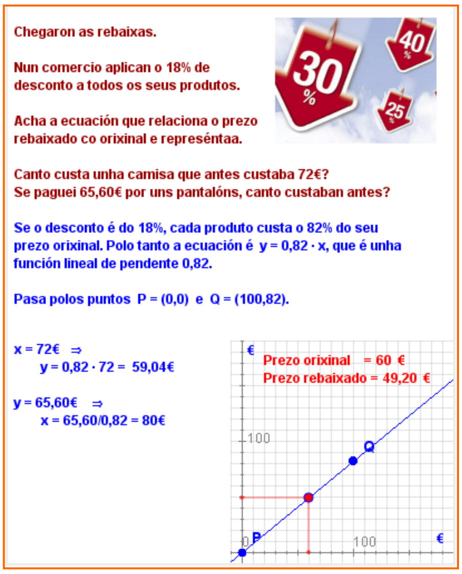
Nas imaxes da dereita tes un par de exemplos de como obter a ecuación (dunha función lineal ou afín) a partir de dous puntos coñecidos ou ben a partir dun punto e a pendente e, a partir delas, facer predicións e cálculos de situacións descoñecidas.

Na descrición de fenómenos reais é frecuente que as magnitudes que se relacionan veñan dadas por números de tamaños moi diferentes, polo que ao representalas graficamente haberá que escoller unhas escalas axeitadas nos eixes correspondentes.

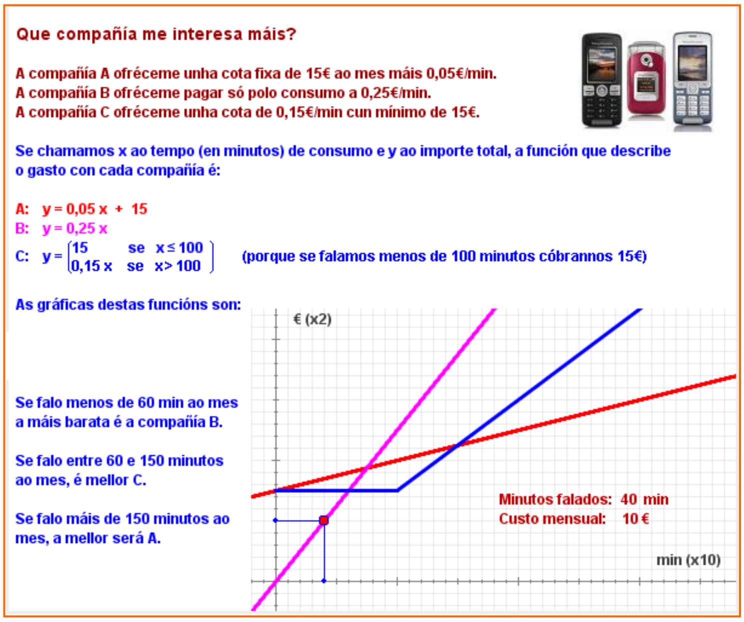


Problemas combinados

Onde realmente resulta interesante o uso das funcións lineais é no estudo simultáneo de varias funcións de xeito que poidamos comparalas con facilidade.



Debaixo tes un exemplo ilustrativo:



EXERCICIOS resoltos

19.

Nunha cidade teñen implantada a Ordenanza de Regulación de Aparcamento (O.R.A.). A norma indica que se debe pagar certa cantidade por cada minuto e que non hai un mínimo.

Xohán pon 1,35€ e o parquímetro indica que dispón de 45 minutos. Sara con 0,84€ ten 28 minutos.

Acha a ecuación que relaciona o prezo co tempo e represéntaa.
Canto hai que pagar por un aparcamento de 55 minutos?
De canto tempo dispoño se pago 2,40€?

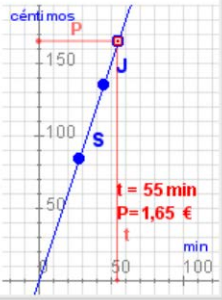
Eliximos as escalas de maneira que o tempo estea en minutos e o prezo en céntimos de euro.

Pasa polos puntos:
J = (45,135) e S = (28,84).

Como pasa pola orixe é lineal e a pendente é m = 135/45 = 3
A ecuación é y = 3x

x = 55 min ⇒ y = 3 · 55 = 165 c = 1,65€

y = 2,40€ ⇒ x = 240/3 = 80 min



20.

Nun banco ofrécennos un depósito a prazo fixo ao 5% anual, cunha comisión anual de mantemento de 20€, sexa cal for o depósito realizado.

Obtén a ecuación que relaciona o xuro producido co capital depositado.

Canto producirán 3.000€ nun ano?
A canto ascendeu o depósito se o xuro percibido foi de 117,50€?

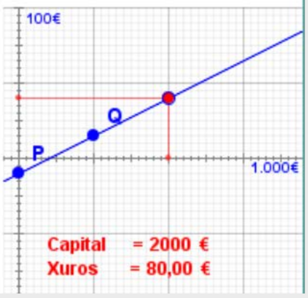
O xuro é directamente proporcional ao capital depositado. A constante de proporcionalidade é 5% = 0,05 e a comisión inicial é de 20€. Logo é unha función afín de ecuación y = 0,05 · x - 20

Pasa polos puntos P = (0,-20) e Q = (1.000,30)

x = 3.000€ ⇒
y = 0,05 · 3.000 - 20 = 130€

y = 117,50€ ⇒
$x = \dfrac{y+20}{0{,}05} = 2.750€$

Observa as escalas: cada unidade en horizontal son 1.000€ e cada unidade vertical son 100€.
Comproba que só hai beneficio se o depósito inicial é superior a 400€.
move o punto vermello



21.

Final de etapa.

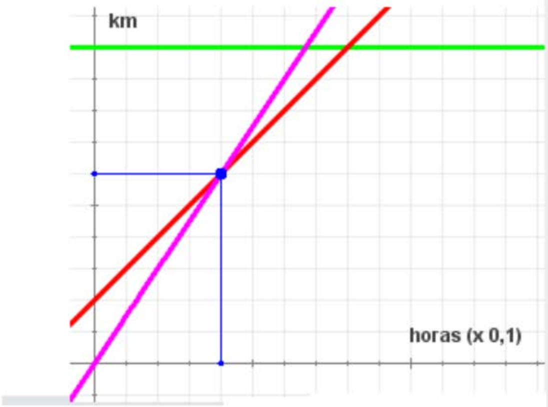
Nunha etapa con final en alto un escapado está a 8 km da meta e circula a 10 km/h. O grupo perseguidor atópase a 10 km da meta rodando a 15 km/h. Darán alcance ao escapado se manteñen as velocidades? E, en caso afirmativo, canto tardarán e a que distancia da meta se producirá a captura?

Se chamamos x ao tempo transcorrido desde agora (medido en horas) e y á distancia percorrida desde este momento (medida en km), entón o escapado está 2 km por diante do grupo perseguidor.
Logo a función que describe o desprazamento a respecto do tempo en cada un dos casos é:

Escapado: y = 10 x + 2   Grupo perseguidor: y = 15 x   Meta: y = 10

As súas gráficas (segundo a cor) son:

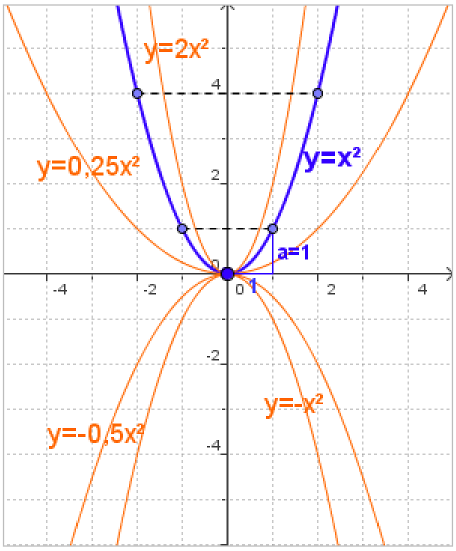
Alcánzano en 0,4 horas (24 minutos) a 4 km da meta.



6. Funcións cuadráticas

A función $y = ax^2$

As **funcións cuadráticas** son aquelas cuxa expresión é un polinomio de segundo grao. Comezamos pola máis sinxela, $\mathbf{f(x)=ax^2}$ ou $\mathbf{y=ax^2}$, segue os pasos da escena para representala e ver as súas características.



- ✓ A gráfica de $\mathbf{y=ax^2}$ é unha curva chamada **parábola**.
- ✓ O **vértice** é a orixe de coordenadas e é **simétrica** respecto do eixe OY.
- ✓ Se a>0 a curva ábrese cara arriba e se a<0 cara abaixo. Canto máis se alonxa a de 0 a curva é máis pechada.

Translacións dunha parábola

Como podes ver na gráfico se se traslada o vértice da parábola $\mathbf{y = ax^2}$ de (0,0) a outro punto do plano, obtense a gráfica dunha función cuadrática calquera $\mathbf{y = ax^2+bx+c}$.

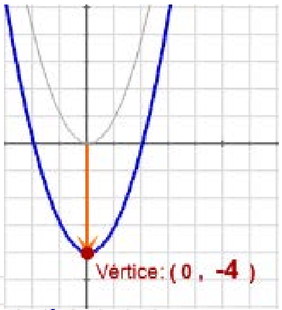
- Se se traslada o vértice da parábola verticalmente, c unidades (c>0 cara arriba, c<0 cara abaixo) obtemos a parábola de expresión: $\mathbf{y = ax^2 + c}$
- Se se traslada o vértice da parábola horizontalmente k unidades (k>0 cara á dereita, k<0 cara á esquerda) obtemos a parábola de expresión: $\mathbf{y = a(x - k)^2}$

Combinando os dous movementos, ao trasladar o vértice de (0, 0) ao punto (x_v,y_v) obtemos:

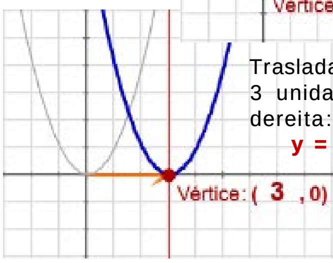
$\mathbf{y = a(x - x_v)^2 + y_v}$ e operando $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$

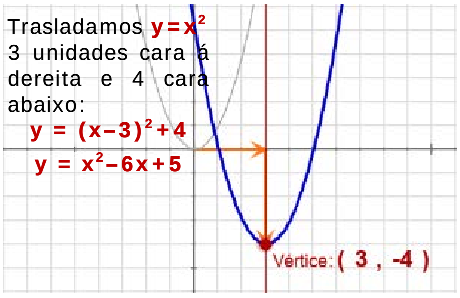
> A gráfica de $\mathbf{y=ax^2+bx+c}$ é unha **parábola** da mesma forma que $y=ax^2$, eixe vertical e **vértice (-b/2a, f(-b/2a))**.

Trasladamos $y=x^2$ 4 unidades cara abaixo: $y = x^2-4$



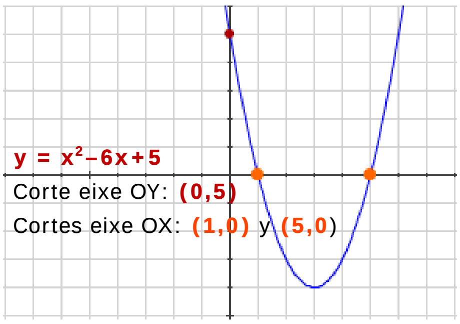
Trasladamos $y=x^2$ 3 unidades cara á dereita: $y = (x-3)^2$





Ao igual que noutras representacións gráficas é interesante calcular os cortes cos eixes de coordenadas.

> - O corte co eixe **OY** é **c**
> - Os cortes co eixe **OX** son as solucións (se existen) da ecuación $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$



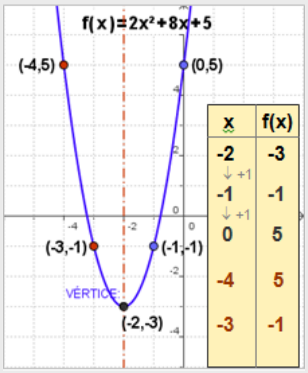
EXERCICIOS resoltos

22. Representa a función: $y = 2x^2+8x+5$

Comezamos por colocar o seu vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -2, \qquad y_v = f(-2) = -3$$

Debúxase o eixe de simetría e a continuación facemos unha táboa de valores aumentando nunha unidade o valor de x cada vez. Cando temos algúns puntos debuxamos os simétricos.



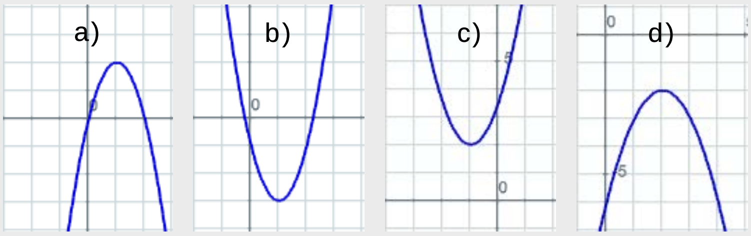
23. Representa as funcións:

a) $y = -2x^2+4x$

b) $y = 2x^2-4x-1$

c) $y = 1,5x^2+3x+3,5$

d) $y = 2x^2-4x-1$



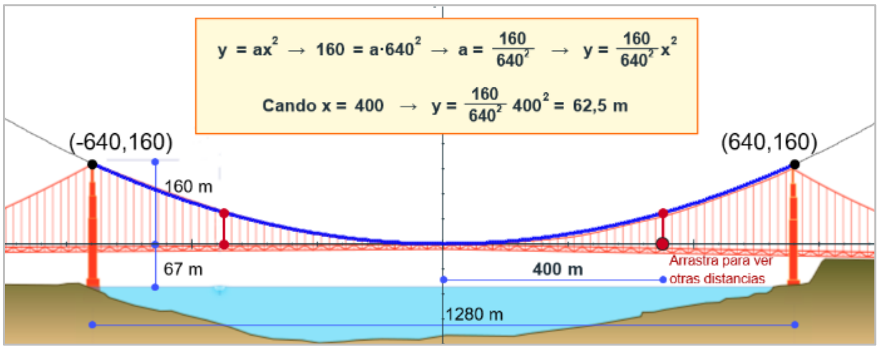
Aplicacións

Estas funcións teñen numerosas aplicacións no mundo real. Vexamos algunhas:

1) Ponte colgante

O Golden Gate, a famosa ponte colgante de San Francisco, está suspendido de dous enormes cables que adoptan forma de parábola e tocan a calzada no centro da ponte. As súas medidas indícanse na figura.

Cál é a altura dos cables a 400 m do centro da ponte?



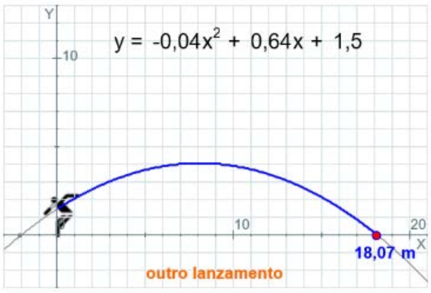
2) Tiro parabólico

Un lanzador de peso tira a bola seguindo unha traxectoria de ecuación

y =-0,04x2+0,64x+15

onde x é a distancia percorrida pola bola en metros, e y a altura que acada tamén en m.

Qué distancia acada a bola?



Cando a bola chega á terra y=0, polo tanto temos que calcular os puntos de corte co eixe OX:

$$-0,04x^2 + 0,64x + 1,5 = 0$$

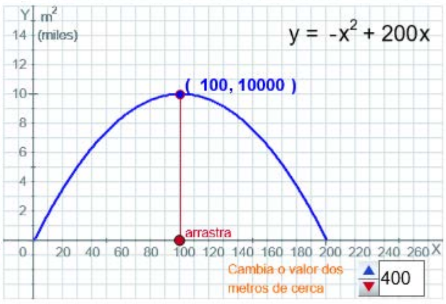
$$x = \frac{-0,64 \mp \sqrt{0,64^2 - 4\cdot(-0,04)\cdot 1,5}}{2\cdot(-0,04)} = \begin{cases} -2,07 \\ 18,07 \end{cases}$$

Das dúas solucións a que buscamos é a positiva, a distancia non pode ser negativa, logo o tiro acada **18,07 m**.

3) Área máxima

Un granxeiro ten un campo moi grande no que desexa valar unha zona de forma rectangular.

Se dispón de 400 m de cerca, cales son as dimensións do rectángulo de maior área que pode valar?, cal é esa área?.



Se chamamos x á lonxitude respectiva de dous lados paralelos, a lonxitude de cada un dos outros dous lados será 200-x, e a área **y=x(200–x)**

A área máxima acádase no vértice da parábola:

Abscisa: **x= 100 m**

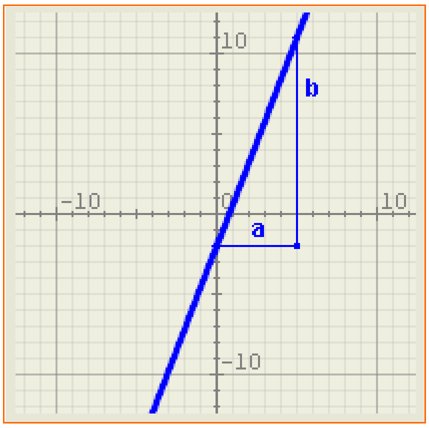
Ordenada: **$y = 10000\ m^2$**

Por tanto trátase dun cadrado de lado 100 m e área 10000 m^2.

Para practicar

1. Representa graficamente as rectas de ecuacións **y=2x/5** e **5x+y+5**=0.

2. Acha a ecuación da recta da imaxe:



3. Acha a ecuación xeral da recta que pasa polo punto P (3,-2) e cuxa pendente é $m = -2$.

4. Acha a ecuación xeral da recta que pasa polos puntos P (3,-2) e Q (-2,-1).

5. Determina a pendente e a ordenada na orixe da recta de ecuación **3x+2y-2=0**.

6. Determina a posición relativa das rectas **y=3x-2** e **y=-2x-2**. No caso de cortárense acha tamén as coordenadas do punto de intersección.

7. Descobre se os puntos A(-2,-4), B(0,-2) e C(3,1) están aliñados.

8. Acha a ecuación da recta paralela a y=3x-4 que pasa polo punto (-3,-10)

9. Dous agricultores de zonas diferentes cultivan millo cos rendementos e custos que se indican debaixo. Descobre cantas ha debe ter cada un para empezar a ter beneficios e quen ten máis beneficio en función do número de ha cultivadas.

Labrego 1:

Rendemento:	6,35 Tm/ha.
Custos por rego, abono, etc:	188 €/ha.
Custos fixos (seguro, impostos, etc):	5715 €

Labrego 2:

Rendemento:	3,64 Tm/ha.
Custos por rego, abono, etc:	50 €/ha.
Custos fixos (seguro, impostos, etc):	2043 €

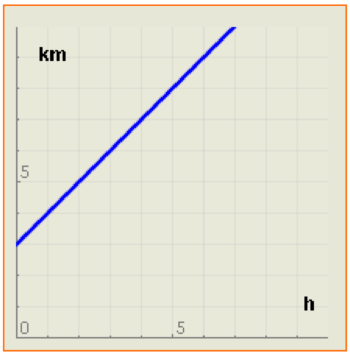
Prezo do millo: 222 €/Tm

10. A area contida nun reloxo de area ocupa un volume de 563 cm^3 e o fabricante indica que a velocidade de caída da area é de 7 cm^3/s. Descobre canto tarda en haber a mesma cantidade de area nas dúas partes do reloxo.

11. Acha a ecuación da función que describe a seguinte frase: "Un móbil está a 3 km de min e achégase a 2 km/h".

12. Acha a ecuación da función que describe a seguinte frase: "Un móbil está ao meu carón durante 1 hora e logo afástase a 2 km/h".

13. A gráfica seguinte representa a distancia á que se atopa unha persoa con respecto a min en relación co tempo transcorrido. Expresa cunha frase o seu significado.



14. Calcula o valor de b para que a gráfica de f(x) = $-2x^2 + bx - 4$ pase polo punto (-3, -13) .

15. Escribe a ecuación da parábola que ten coeficiente a=1, corta ao eixe de ordenadas en (0,-3) e o seu vértice é o punto (4,11).

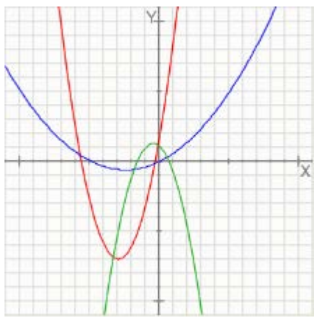
16. Calcula o vértice e os puntos de corte cos eixes da parábola $y = -2x^2 - 2x + 4$. A partir destes datos esboza a súa gráfica.

17. Asocia cada parábola coa súa correspondente expresión alxébrica:

a) $y = x^2 + 6x + 2$

b) $y = 0{,}1x^2 - 0{,}5x$

c) $y = -x^2 - x + 1$



Para saber máis

Relacións non lineais

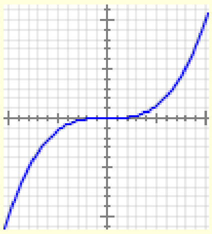
Lembra o problema que se che presenta ao principio da quincena: se unha sandía pesa o dobre que outra o seu prezo será o dobre. Pero se o raio dunha sandía é o dobre do da outra, será o seu prezo tamén o dobre?

Supoñamos que 1kg custa 0'75€.

O custo dunha sandía de x kg é y =0'75x. É unha función lineal. O prezo é directamente proporcional ao peso.

O peso é, a súa vez, directamente proporcional ao volume e o volume dunha esfera é $4/3 \cdot \pi \cdot r^3$. Logo se o raio da primeira é r e o da segunda é 2r, o volume da primeira é proporcional a r^3 e o da segunda a $(2r)^3 = 8r^3$. Polo tanto o volume, o peso e, en definitiva, o prezo da segunda é 8 veces maior que o da primeira.

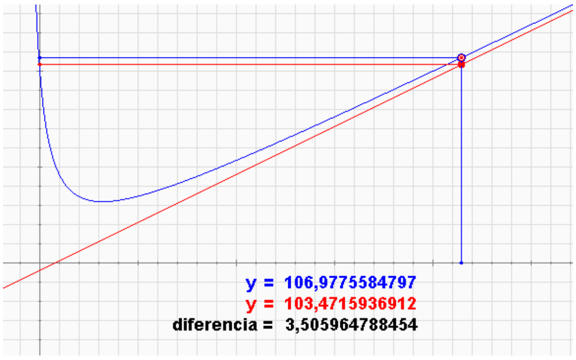
A relación entre peso (ou prezo) e lonxitude non é, polo tanto, lineal. Como o peso non é proporcional á lonxitude, senón ao cubo da lonxitude, dicimos que a relación entre estas dúas magnitudes é cúbica. A súa gráfica ten este aspecto:



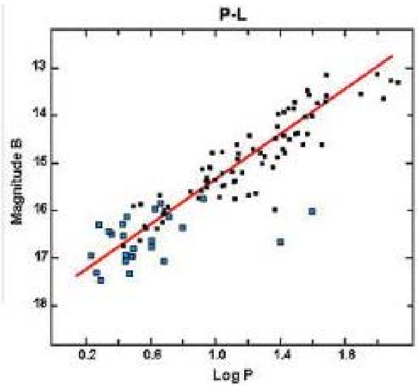
$$y = x^3$$

Comportamento asintótico

Algunhas funcións non lineais teñen a propiedade de que canto máis grande é o valor de x máis semellan unha función lineal ou afín (é dicir, unha liña recta). Isto facilita o estudo da súa tendencia a longo prazo. Esta recta recibe o nome de **asíntota** e dise que a función ten un comportamento **asintótico.**

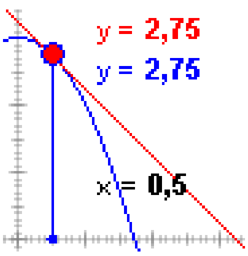


REGRESIÓN LINEAL



É unha das técnicas máis usadas pola ciencia. Se se quere estudar a relación que existe entre dúas magnitudes fanse moitas observacións asignando unha parella de valores a cada unha. Obtense así unha nube de puntos que pode ou non mostrar unha tendencia.

No exemplo parece existir certo comportamento lineal.



Derivadas:

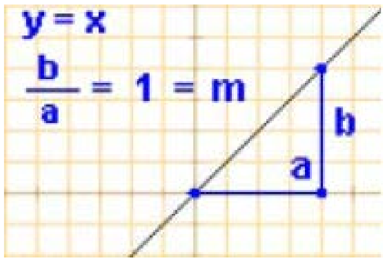
Comportamento lineal dunha función non lineal. A función azul da imaxe non é lineal. A vermella é unha función afín tanxente nun punto da primeira. Preto do punto x = 0,5 os valores de ambas as dúas funcións son moi parecidos. Lonxe do punto son moi diferentes. Cando estamos estudando unha función preto dun punto é máis doado facer cálculos cunha función lineal ou afín que se aproxime a ela. A recta tanxente a unha función nun punto recibe o nome de **función derivada** no punto e aprenderás a calculala nos cursos vindeiros.

Lembra o máis importante

Funcións lineais

Son as funcións que relacionan magnitudes directamente proporcionais e a súa ecuación é da forma **y = mx**

A súa representación gráfica é sempre unha liña recta que pasa pola orixe. A pendente, m, é a constante de proporcionalidade.

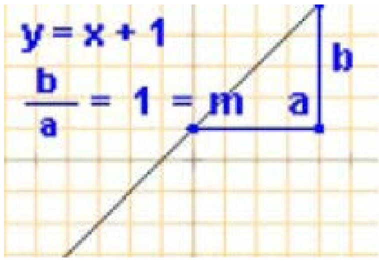


Funcións afíns

Relacionan magnitudes directamente proporcionais sometidas a algunha condición inicial. Teñen a forma

y = mx+n

A súa gráfica é unha recta de pendente m que pasa polo punto (0,n) (n é a **ordenada na orixe**).



Ecuación da recta

- Ecuación explícita: **y = mx + n**
- Ecuación punto-pendente: se se coñece a pendente, m, e as coordenadas dun punto (x_0,y_0) a ecuación é:

  $$y - y_0 = m\cdot(x - x_0)$$

- Ecuación da recta que pasa por dous puntos:

  Se se coñecen as coordenadas de dous puntos $P(x_0,y_0)$, $Q(x_1,y_1)$ a ecuación é:

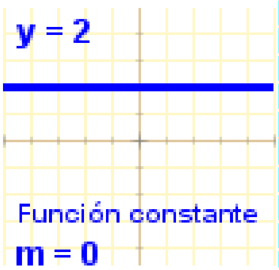
  $$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

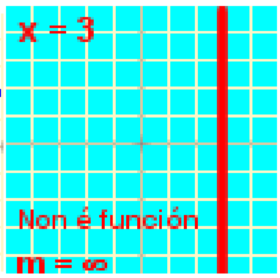
- Ecuación xeral: Simplificando calquera das ecuacións anteriores obtense:

  Ax + By +C = 0

  a pendente é m=-A/B se B ≠0

Casos particulares





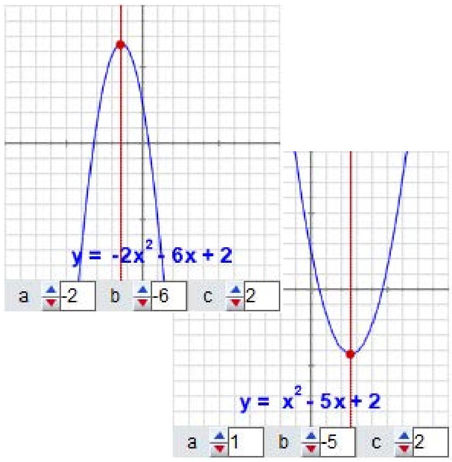
Funcións cuadráticas

y = ax^2+bx+c con **a≠0**

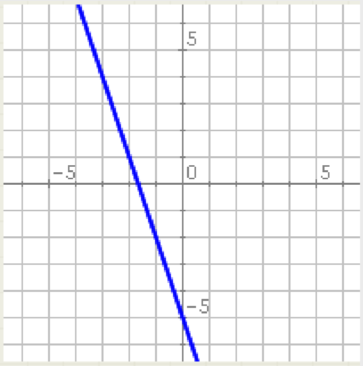
A súa gráfica é unha **parábola** de eixe de simetría vertical e vértice: **(-b/2a, f(-b/2a))**

• O valor de **a** indica cara onde se abre a curva e se é máis aberta ou pechada.

• O valor de **c** indica o corte co eixe OY.



Autoavaliación



1. Escribe a pendente e a ordenada na orixe da recta da imaxe.

2. Calcula a ordenada na orixe da recta que pasa polo punto (-4,-1) e cuxa pendente é -3.

3. Calcula a ordenada na orixe da recta de ecuación $-3x - 3y + 2 = 0$

4. Calcula a pendente da recta que pasa polos puntos P(-5,-4) e Q(-4,-2).

5. Calcula o vértice da parábola $y = -2x^2 + 20x - 42$

6. Calcula os puntos nos que a parábola $y = 2x^2 - 20x + 48$ corta ao eixe de abscisas.

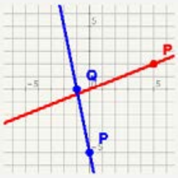
7. Determina a posición relativa das rectas de ecuacións $4x - 3y + 5 = 0$ e $-8x + 6y + 1 = 0$.

8. Acha as coordenadas do punto de corte das rectas de ecuacións $y = -x + 5$ e $y = 2x - 7$.

9. Estuda se os puntos A(-3,-1), B(0,-1) e C(6,-4) están aliñados.

10. Acha a ecuación da recta paralela a $y = -x + 5$ que pasa polo punto (4,-2).

Solucións dos exercicios para practicar

1. 

2. $y = \frac{13}{5}x - 2$

3. 2x+y-4=0

4. x+5y+7=0

5. m=-3/2, n=1

6. Son secantes e córtanse no punto (0,-2)

7. Si están aliñados. (Acha a ecuación da recta que pasa por A e por B e comproba que tamén pasa por C).

8. y=3x-1

9. O primeiro obtén beneficios a partir de 4,43 ha. O segundo a partir de 3,58 ha. O primeiro gaña máis que o segundo a partir de 5,13 ha.

10. 40,2 segundos.

11. y=2x+3

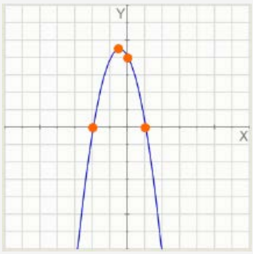
12. $y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

13. Está a tres km de min e afástase 1 km/h.

14. b = -3

15. $y = -x^2 + 8x - 5$

16. Eixe OY: (0, 4)
Eixe OX: (-2, 0) (1, 0)
Vértice (-0,5 , 4,5)



17. a) $y = x^2 + 6x + 2$
b) $y = 0,1x^2 - 0,5x$
c) $y = -x^2 - x + 1$

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. m=-3, n=-5
2. n=-13
3. n=2/3≈0,66
4. m=2
5. V(5, 8)
6. (4, 0) y (6, 0)
7. Son paralelas porque $A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1$
8. x=4, y=1
9. Non están aliñados.
10. y = -x + 2