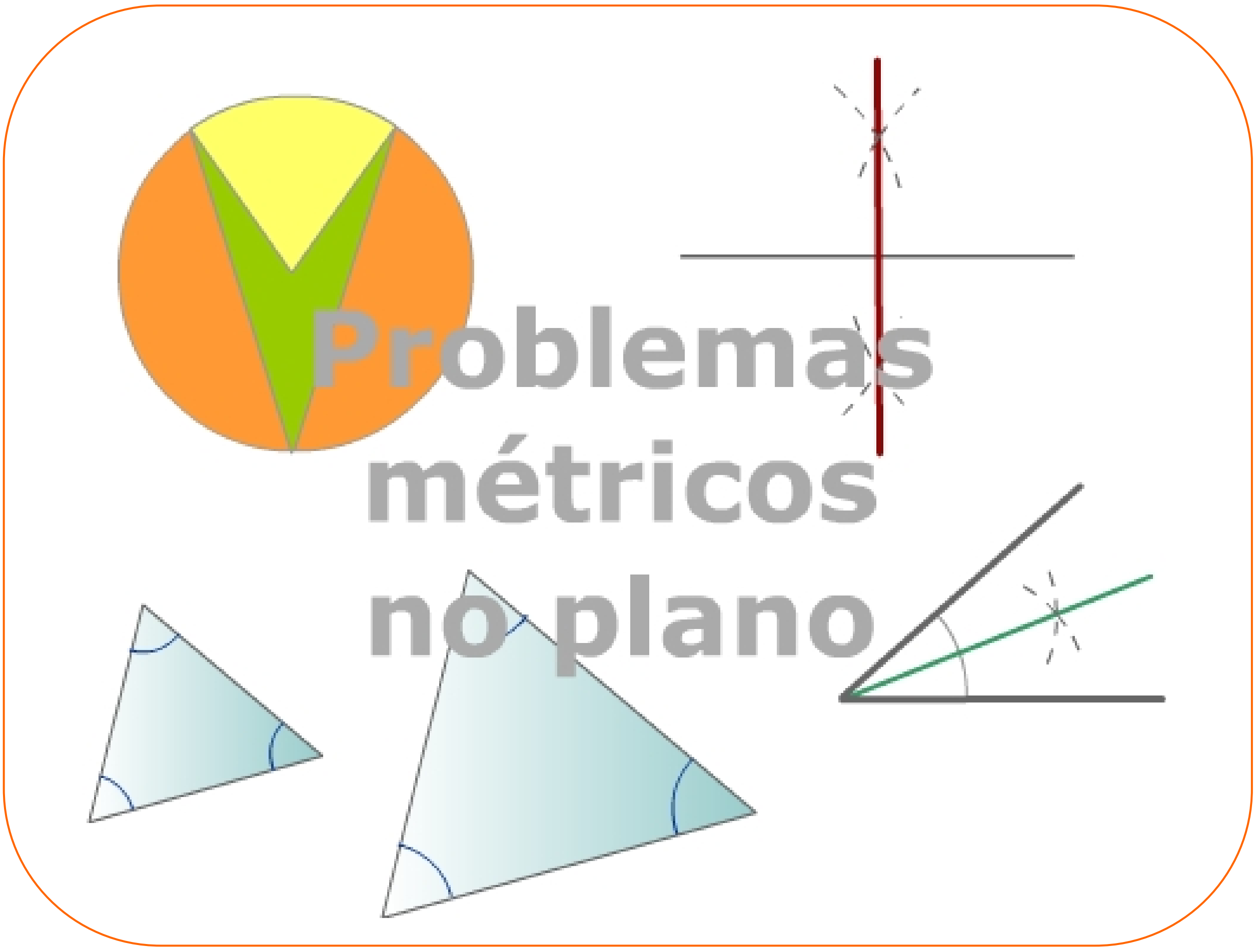
6 Figuras planas, propiedades métricas

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Recoñecer os ángulos importantes nunha circunferencia e as súas relacións.
- Investigar cando dous triángulos son semellantes.
- Utilizar o teorema de Pitágoras para resolver algúns problemas.
- Identificar a mediatriz dun segmento e a bisectriz dun ángulo como conxuntos de puntos.
- Calcular a área de recintos limitados por liñas rectas e por liñas curvas.

Antes de empezar



Lembra unha propiedade importante dos triángulos:

A suma dos ángulos interiores dun triángulo é igual a 180º.

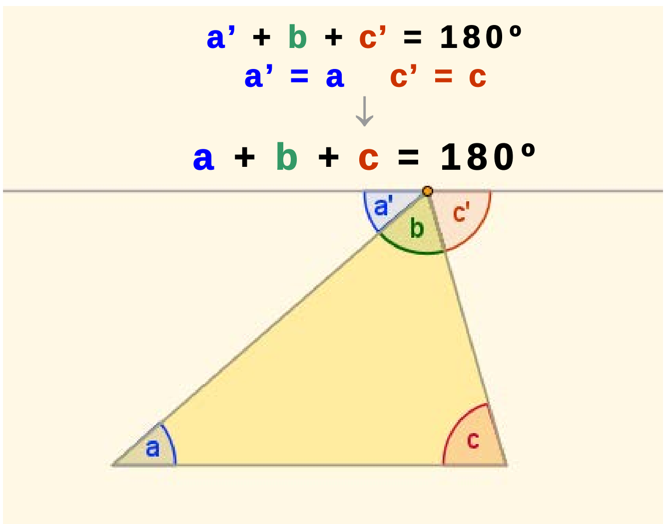
✓ Trázase unha paralela á base polo vértice oposto.

O ángulo a'=a, dinse alternos internos. O ángulo c'=c polo mesmo motivo.

a' + b + c' =180º

por tanto

a + b + c = 180º

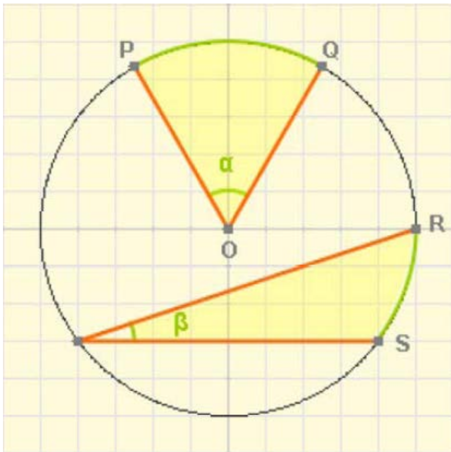


1. Ángulos na circunferencia

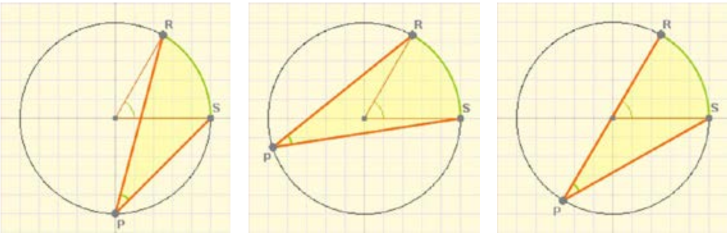
Ángulo central e ángulo inscrito

Na circunferencia da escena da dereita o ángulo **α**, que ten o seu vértice no centro da circunferencia, chámase **ángulo central** e representa a medida angular do arco PQ.

O ángulo **β**, que ten o vértice na mesma circunferencia, chámase **ángulo inscrito e** dise que abrangue o arco RS.

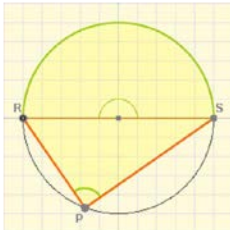


O **ángulo inscrito** que abarca un arco de circunferencia determinado, é igual á **metade do ángulo central** que abrangue o mesmo



Aínda que se cambie a posición do vértice P, o ángulo non varía. Os ángulos inscritos que abarcan o mesmo arco de circunferencia son iguais.

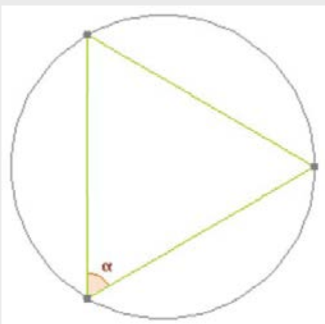
O ángulo central abrangue unha semicircunferencia, mide 180º, o ángulo inscrito é recto.



EXERCICIOS resoltos

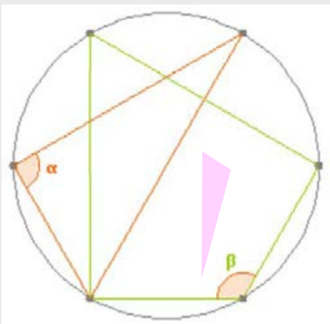
1. Calcula o valor do ángulo ou os ángulos marcados en cada caso.

a) A circunferencia dividiuse en 3 partes iguais



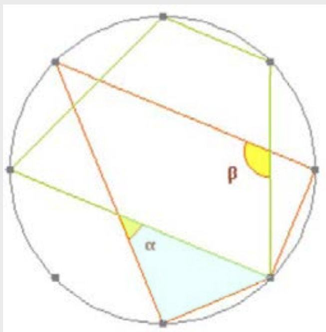
Sol: O ángulo α abrangue 120º; o seu valor é a metade, 60º.

a) A circunferencia dividiuse en 6 partes iguais

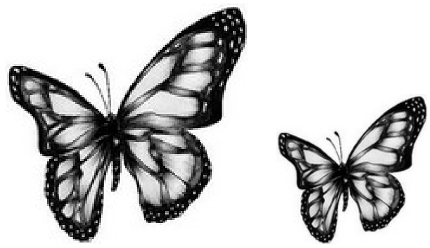


Sol: O ángulo α abrangue 180º; o seu valor é a metade, 90º.
O ángulo β abrangue 240º, catro divisións de circunferencia, a súa medida é 120º.

a) A circunferencia dividiuse en 8 partes iguais

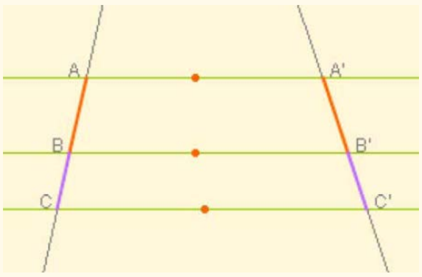


Sol: No triángulo azul
B=90º, C=45º
α=180º-90º-45º=45º
No triángulo rosa
B=22,5º e D=90º
β=90º+22,5º=112,5º



A semellanza está baseada no **Teorema de TALES**: dúas rectas que cortan a varias paralelas determinan nestas segmentos proporcionais.

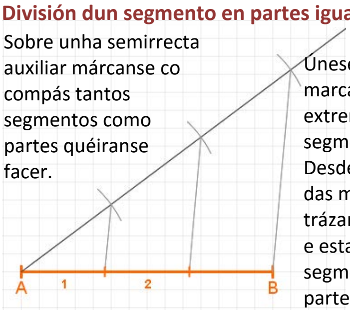
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$



Aplicacións do Teorema de Tales

División dun segmento en partes iguais

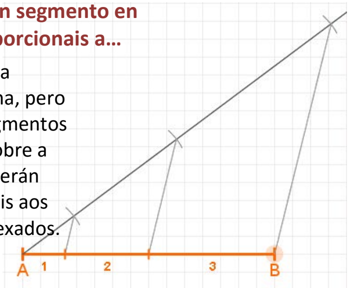
Sobre unha semirrecta auxiliar márcanse co compás tantos segmentos como partes quéiranse facer.



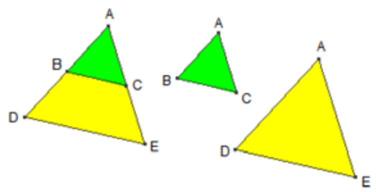
Únese a última marca co outro extremo do segmento. Desde cada unha das marcas trázanse paralelas, e estas dividen ao segmento nas partes desexadas.

División dun segmento en partes proporcionais a...

Procédese da mesma forma, pero agora os segmentos marcados sobre a semirrecta serán proporcionais aos valores desexados.



Observa na figura que os dous polígonos, verde e amarelo, teñen os ángulos iguais, e os lados proporcionais, son **semellantes.**



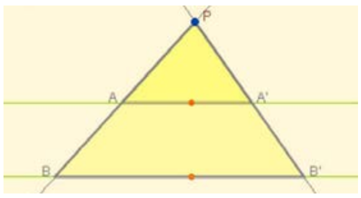
2. Semellanza

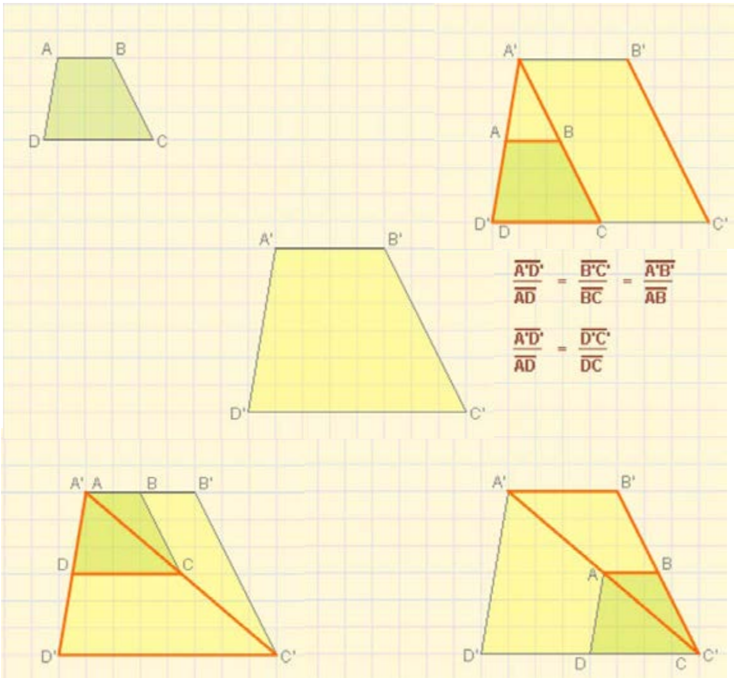
Figuras semellantes

Observa á esquerda a parella de **figuras semellantes.** Teñen a **mesma forma** pero están representadas con **tamaños diferentes**, unha pode considerarse unha ampliación da outra.

- Dúas figuras planas considéranse semellantes se existe a mesma proporción, chamada **razón de semellanza**, entre os seus lados homólogos e ademais os seus ángulos homólogos son iguais.

Triángulos en posición de **Tales**: os lados homólogos son proporcionais, os ángulos son iguais. Son **semellantes**.





Semellanza de triángulos

Dous triángulos son **semellantes** se se poden poñer en **posición de Tales**. Como vimos na sección anterior, isto significa que os seus **lados homólogos** gardan a mesma proporción e que os **seus ángulos** son **iguais**.

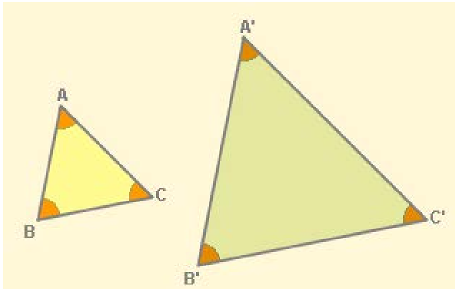
No caso dos triángulos, para que sexan semellantes, bastará que se cumpra un dos seguintes criterios:

Criterios de semellanza de triángulos

1) Se dous triángulos teñen os **ángulos iguais**, entón son semellantes; bastará que teñan dous, o terceiro é o que falta ata 180º.

2) Se dous triángulos teñen **un ángulo igual e os lados que o forman son proporcionais**, son semellantes.

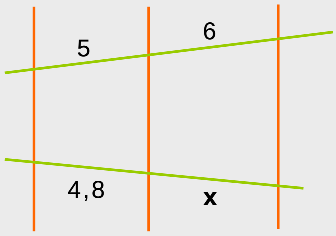
3) Se dous triángulos teñen os seus tres **lados proporcionais**, entón son semellantes.



EXERCICIOS resoltos

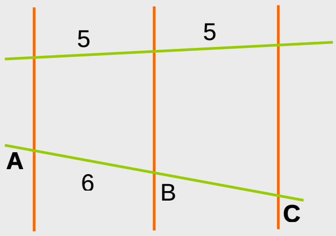
2. As rectas de cor laranxa son paralelas

a) Calcula x



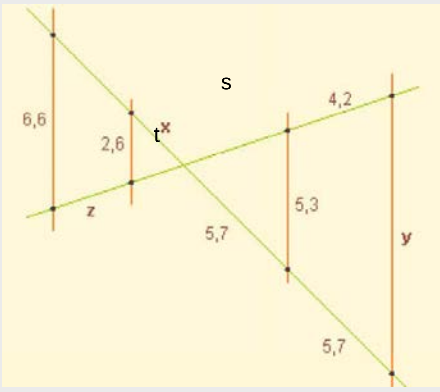
$$\frac{6}{5}=\frac{x}{4,8} \Rightarrow x=\frac{4,8\cdot 6}{5}=5,76$$

b) Calcula a distancia entre A e C.



Posto que os segmentos homólogos son iguais $\overline{AB}=\overline{BC}=6$, logo $\overline{AC}=12$

3. Calcula x, y, z.



$$\frac{x}{5,7}=\frac{2,6}{5,3} \rightarrow x=\frac{5,7\cdot 2,6}{5,3}=2,8$$

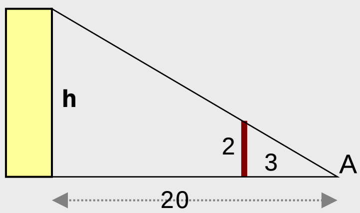
$$\frac{5,7}{5,3}=\frac{2\cdot 5,7}{y} \rightarrow y=10,6$$

Para calcular z hai varias formas; por exemplo: O segmento s mide 4,2 xa que debe gardar a proporción cos que miden 5,7.

Calcúlase t: $\frac{t}{2,6}=\frac{4,2}{5,3} \rightarrow t=2,06$

E, coñecido t: $\frac{2,06}{2,6}=\frac{2,06+z}{6,6} \rightarrow z=3,17$

4. Dende o punto A vense aliñados os extremos do poste marrón e do edificio amarelo. Cal é a altura deste?

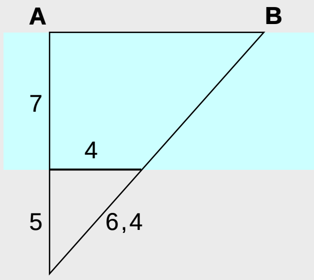


Como o edificio e o poste son paralelos, segundo o teorema de Tales:

$$\frac{h}{2}=\frac{20}{3} \rightarrow h=\frac{20\cdot 2}{3}=13,3\text{m}$$

EXERCICIOS resoltos

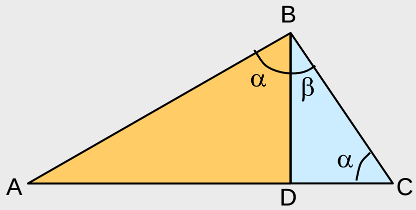
5. Calcula a distancia entre os puntos A e B situados ao outro lado do río.



Polo Teorema de Tales: $\frac{7+5}{5}=\frac{AB}{4}$

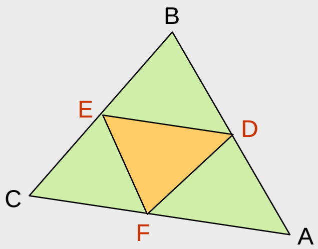
Logo AB= $\frac{48}{5}$ =9,6

6. Nun triángulo rectángulo ABC (B=90º) trázase a altura sobre o lado AC, formándose así os triángulos tamén rectángulos, BDA e BCD. Son semellantes tamén estes triángulos?, que criterio aplicas?



En efecto; son semellantes xa que teñen os ángulos iguais (primeiro criterio).
1) Ambos teñen un ángulo D=90º
2) O ángulo α é igual en ambos xa que é 90º-β. No triángulo laranxa vese a simple vista e, no azul, lembra que a suma dos tres debe ser 180º; polo que $\alpha + \beta =$ 90º

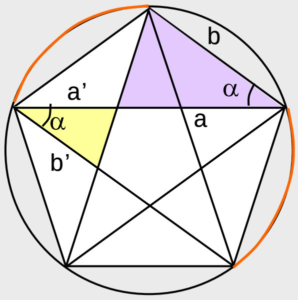
7. Nun triángulo calquera ABC, únense os puntos medios dos lados para formar outro triángulo DEF. Son semellantes estes dous triángulos?, que criterio aplicas?.



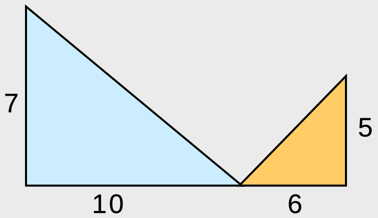
ABC e DEF son semellantes.
Observa que os triángulos ABC e DBE están en posición de Tales, polo que AC/DE=CB/EB=2 xa que E é o punto medio de BC.
Seguindo o mesmo razoamento AB/EF=2 e BC/DF=2, por tanto os tres pares de lados gardan a mesma proporción. (Criterio 3)

8. A figura era coñecida na antigüidade como "pentagrama pitagórico". Nela pódense ver bastantes parellas de triángulos semellantes. Os de cor amarelo e morado, son semellantes?, que criterio aplicas?.

Son semellantes xa que os ángulos chamados α son iguais pois abarcan o mesmo arco de circunferencia (360º/5). Ademais, polo Teorema de Tales, a/a' = b/b'; por tanto, os lados que forman o ángulo α son proporcionais. (Criterio 2º)



9. Os triángulos da figura, son semellantes?.

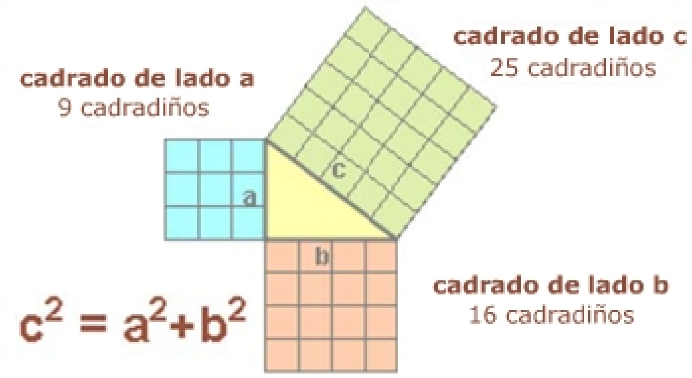


Non son semellantes xa que os lados non son proporcionais, $\frac{10}{6} \neq \frac{7}{5}$

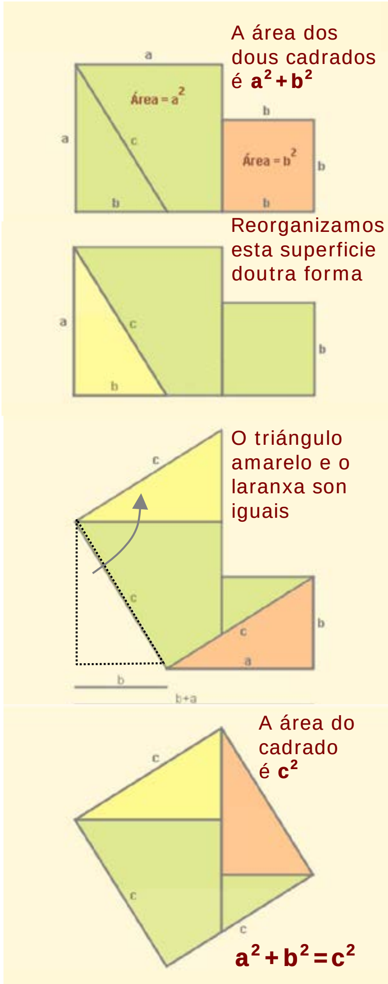
3. Triángulos rectángulos

Teorema de Pitágoras

Nun triángulo rectángulo o cadrado da hipotenusa é igual á suma dos cadrados dos catetos.

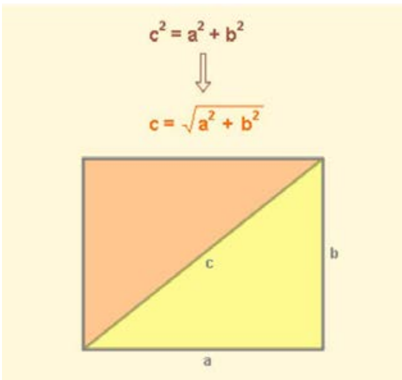


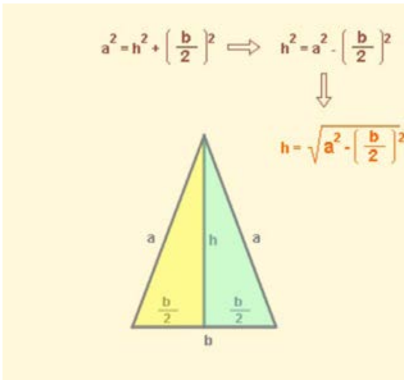
Observa a demostración da dereita.



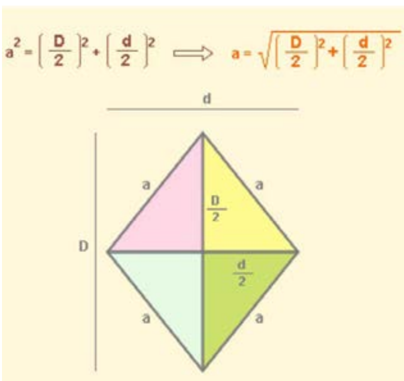
Aplicacións do Teorema de Pitágoras

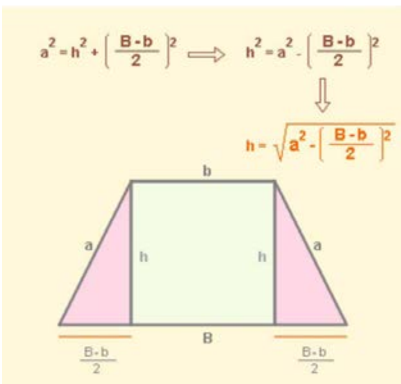
O **teorema de Pitágoras** é de gran utilidade en moitos problemas nos que se presenta algún triángulo rectángulo. Aquí podes ver algúns exemplos.

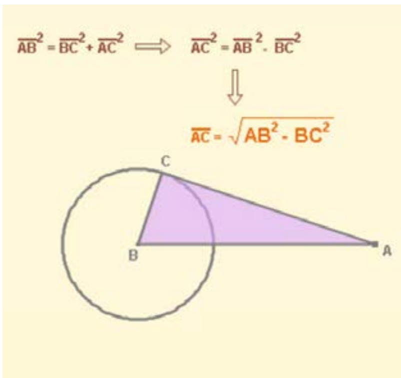




- Calcular a diagonal dun rectángulo.
- Calcular a altura nalgúns triángulos.
- Calcular os lados dun rombo.
- Calcular a altura dun trapecio
- Calcular segmentos de tanxente a unha circunferencia.

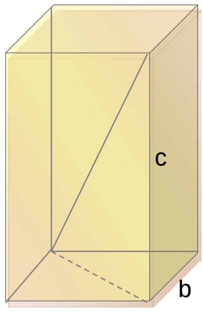






A diagonal dun ortoedro de arestas a, b e c é:

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



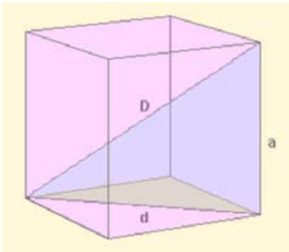
O Teorema de Pitágoras no espazo

- Calcular a **diagonal dun cubo** de aresta **a**

$D^2=a^2+d^2$

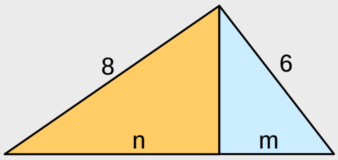
$d^2=a^2+a^2=2a^2$

$D^2=3a^2$ y $D=a\sqrt{3}$



EXERCICIOS resoltos

10. No triángulo rectángulo da figura trázase a altura sobre a hipotenusa dando lugar aos triángulos laranxa e azul. Calcula o valor de **m** e de **n**.



A hipotenusa do triángulo inicial é $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

No triángulo laranxa: $64=h^2+n^2$

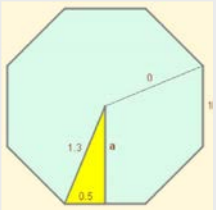
No triángulo azul: $36=h^2+m^2$

restando ambas ecuacións e como $m+n=10$, queda:

$28=n^2-(10-n)^2$; $28=n^2-100+20n-n^2$ $128=20n$

$n=6{,}4$ **$m=3{,}6$**

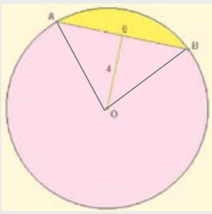
11. Calcula canto mide o apotema dun octógono regular de lado 1 dm e raio 1,3 dm.



No triángulo rectángulo que determinan o apotema, o raio e a metade do lado:

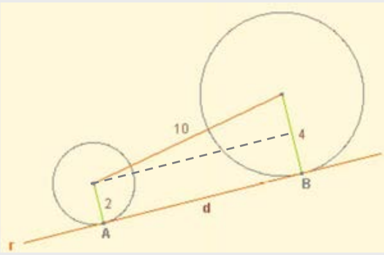
$a = \sqrt{1{,}3^2 - 0.5^2} = \sqrt{1{,}69 - 0{,}25} = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$

12. Nunha circunferencia sábese a lonxitude dunha corda AB, 6 cm, e a distancia desta ao centro da circunferencia, 4 cm. Canto mide o raio?.



O triángulo AOB é isóscele (OA=OB=raio) e, como a distancia do centro á corda se toma sobre a perpendicular, a altura deste triángulo é 4cm, $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$cm

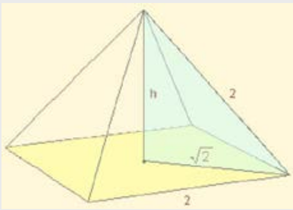
13. A recta r é tanxente ás dúas circunferencias nos puntos A e B. Acha a distancia que hai entre ambos puntos de tanxencia.



Observa o triángulo rectángulo:

$d = \sqrt{10^2 - (4-2)^2} = \sqrt{96} = 9{,}8$

14. A pirámide da figura é regular, as súas caras son triángulos equiláteros e a súa base un cadrado de lado 2m. Calcula a súa altura.



A diagonal da base mide $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

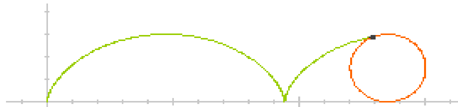
A altura é un cateto do triángulo azul:

$h = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$

4. Lugares xeométricos

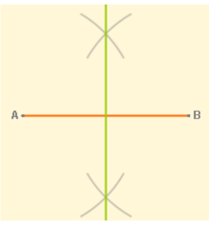
Definición e exemplos

Un **lugar xeométrico** no plano é un **conxunto de puntos** que cumpren todos eles unha mesma propiedade.



Observa a curva que describe un punto P ao rodar a circunferencia sobre o eixe OX, chámase **cicloide**.

- A **mediatriz** dun segmento

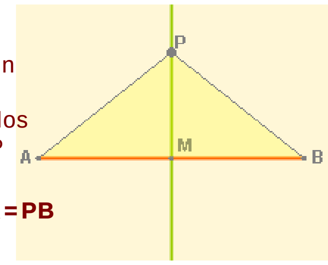


É a perpendicular polo punto medio do segmento.

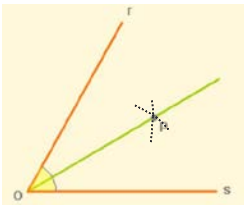
A **mediatriz** dun segmento AB é o lugar xeométrico dos puntos do plano que **equidistan** de A e de B.

MA=MB
O ángulo en M é recto.
Os triángulos AMP e BMP son iguais.

PA=PB



- A **bisectriz** dun ángulo

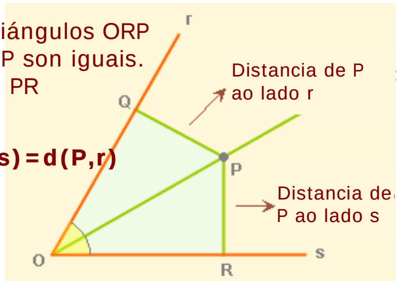


É a recta que o divide en dous ángulos iguais.

A **bisectriz** dun ángulo é o lugar xeométrico dos puntos do plano que **equidistan** dos lados do devandito ángulo.

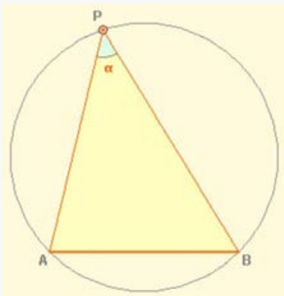
Os triángulos ORP e OQP son iguais.
PQ = PR

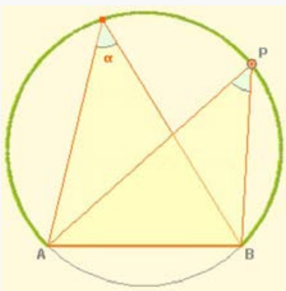
d(P,s)=d(P,r)



Un EXEMPLO interesante

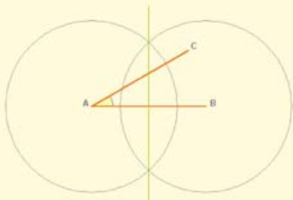
O **arco capaz** dun ángulo α sobre un segmento $\overline{AB}$ é o lugar xeométrico dos puntos do plano dende os que se ve o segmento $\overline{AB}$ dende un ángulo α.



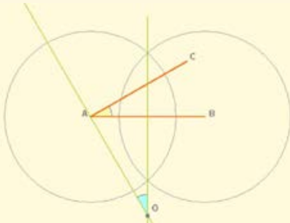


construción

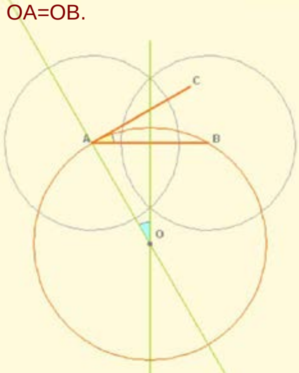
1) Elixido o ángulo, α, debúxase a mediatriz do segmento AB.



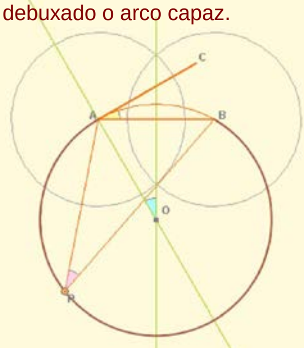
2) Dende A trázase a perpendicular a AC.
O ángulo azul é igual a α.



3) Trázase a circunferencia con centro en O e raio OA=OB.



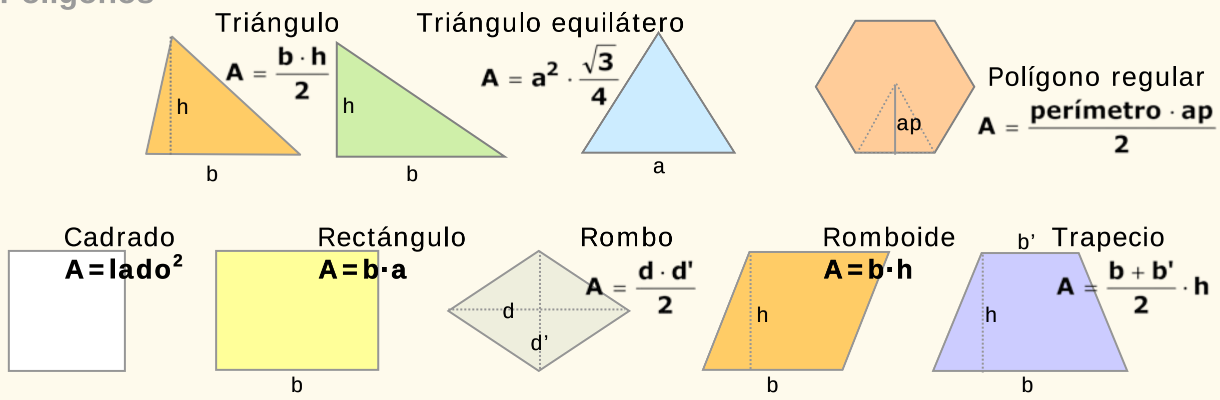
4) O ángulo de vértice P é inscrito e mide a metade do AOB; é dicir, α, co que temos debuxado o arco capaz.



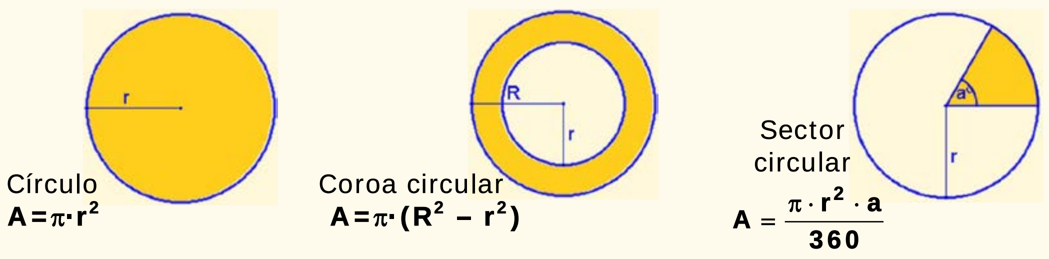
5. Áreas de figuras planas

Lembra as áreas de figuras coñecidas

Polígonos



Figuras Curvas



EXERCICIOS resoltos

15. A figura da dereita está composta por áreas de cor branca (cadrados e triángulos), vermella (pentágonos) e negra. Calcula a área de cada cor. Toda a figura é un cadrado de 12m de lado.

Unha das formas de afrontar o problema:

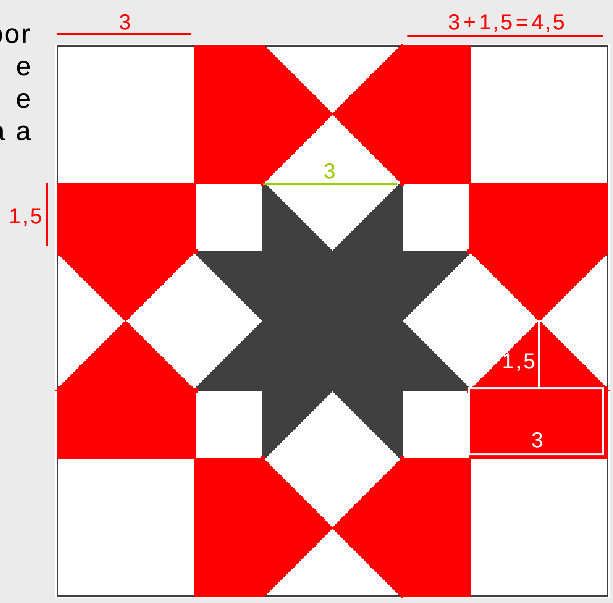
A área total é $12^2 = 144$ m^2

A área de cor vermella é a de 8 pentágonos, cada un dos cales está formado por un rectángulo e un triángulo.
Área vermella = 8·(3·1,5+3·1,5/2)= 54 m^2

A área da estrela de cor negra é a de dous cadrados de lado 3 (o central e as 8 puntas que compoñen outro).
Área negra = $2 \cdot 3^2$ = 18 m^2

A área de cor branca é a de 8 cadrados de lado 3 m.
Área branca = $8 \cdot 3^2$ = 72 m^2

Entre as tres suman 54+18+72 = 144 m^2



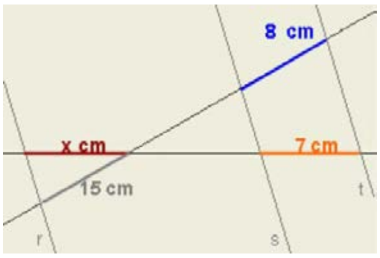
O embaldosado do chan fronte á porta principal da catedral de La Seo de Zaragoza

Para practicar

1. As rectas r, s e t son paralelas, determina o valor de x en cada caso:

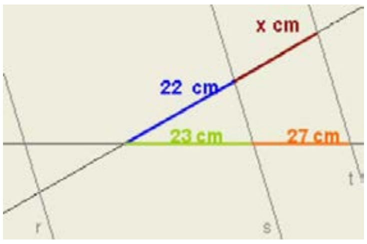
a)

b)

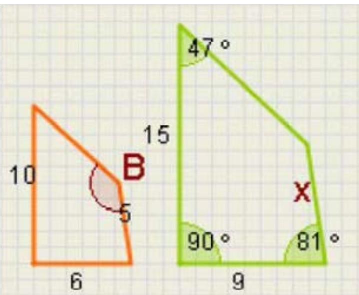


c)

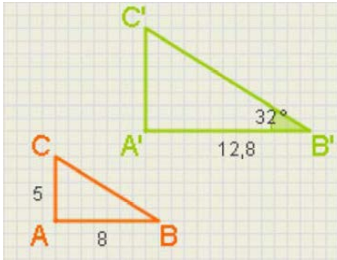
d)



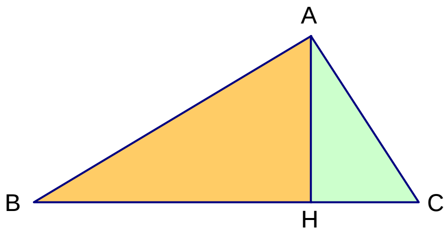
2. Os cuadriláteros da figura son semellantes. Acha a lonxitude do lado x e o ángulo B.



3. Os triángulos da figura son rectángulos e semellantes. Calcula os elementos que faltan en cada un.



4. Comproba que nun triángulo rectángulo ABC, os triángulos que determina a altura sobre a hipotenusa e o mesmo ABC son semellantes. Se os catetos miden 8cm e 5cm, calcula a altura.



5. Os lados dun triángulo miden:

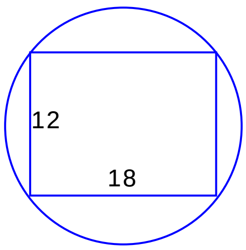
a) 157, 85 e 132

b) 75, 24 e 70

c) 117, 45 e 108

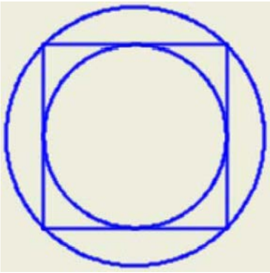
É rectángulo? En caso afirmativo, canto mide a hipotenusa?

6. Canto mide o raio da circunferencia da figura?.

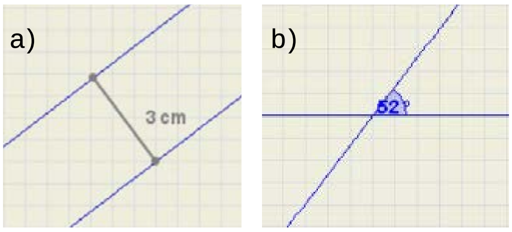


7. Nun triángulo isóscele os lados iguais miden 12cm e o lado desigual 8cm, canto mide a altura?

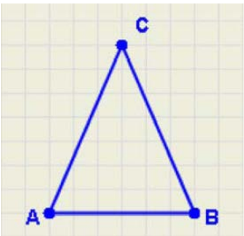
8. O raio da circunferencia maior mide 10cm, canto mide o raio da menor?



9. Determina o lugar xeométrico dos puntos que equidistan as rectas da figura:

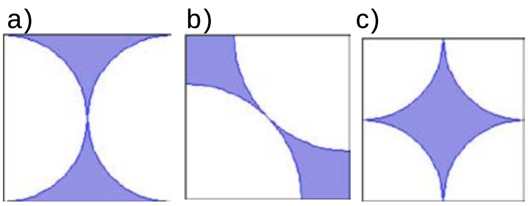


10. O triángulo da figura é isóscele. Se se despraza o vértice C de forma que o triángulo siga sendo isóscele, que lugar xeométrico determina C?

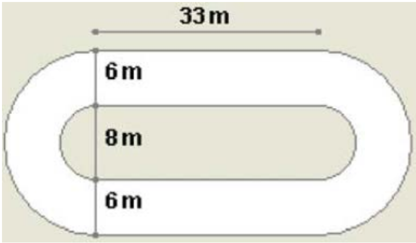


11. Determina o lugar xeométrico dos puntos que equidistan de dúas circunferencias concéntricas, de raios respectivos 8 e 12 cm.

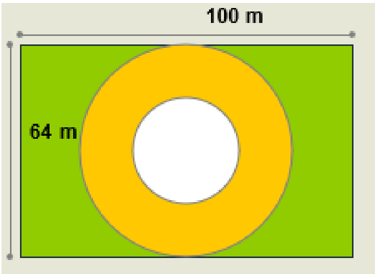
12. Quérese construír un mural de 3m de longo por 2,7m de alto unindo cadrados de 30cm de lado como o da figura. Que superficie quedará de cor azul?



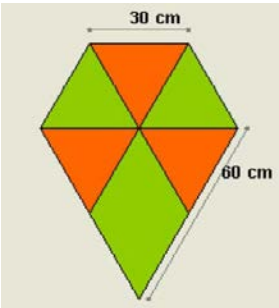
13. Un estadio ten a forma e dimensións do debuxo. Que superficie ocupan as pistas?



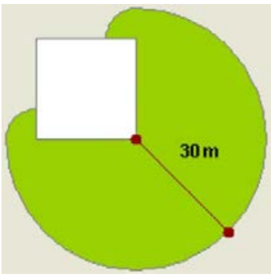
14. Unha praza ten forma rectangular e as dimensións da figura. No centro hai unha fonte circular de 13m de raio, rodeada dun paseo de terra e no resto hai céspede. Que superficie ocupa o céspede?, e o paseo?.



15. Para construír un papaventos empregouse tea de cor verde e laranxa como na figura. Que cantidade de cada cor?

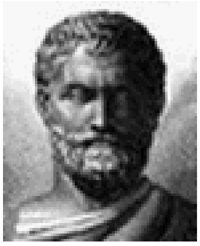


16. Unha cabra está atada na esquina dun curral cadrado de 20m de lado, cunha corda de 30m de longo. Cal é a superficie sobre a que pode pastar?



Para saber máis

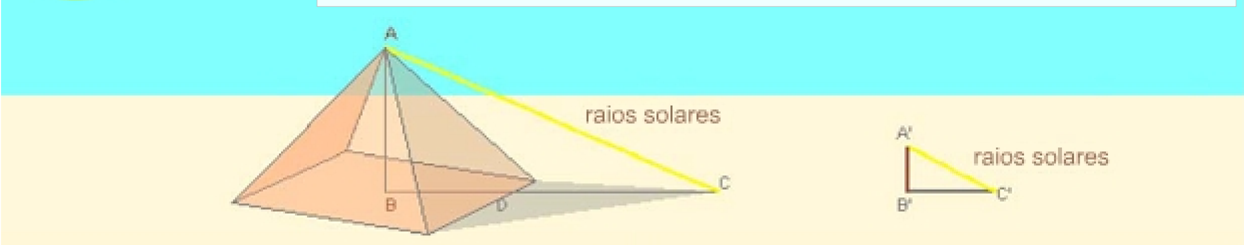
Tales e a gran pirámide



Tales de Mileto, que viviu entre os séculos VII y VI antes da nosa era, está considerado como o primeiro matemático da historia. Na súa xuventude viaxou a Exipto, onde aprendeu algunhas das técnicas xeométricas que os exipcios utilizaban, e propúxose calcular a altura da gran pirámide de Gizeh. Algúns din que foi o propio faraón quen llelo pediu. Tales utilizou o seu famoso teorema, o que estudaches nesta quincena, pero atopouse con algunhas dificultades para a resolución do problema. Vexamos como o conseguiu:

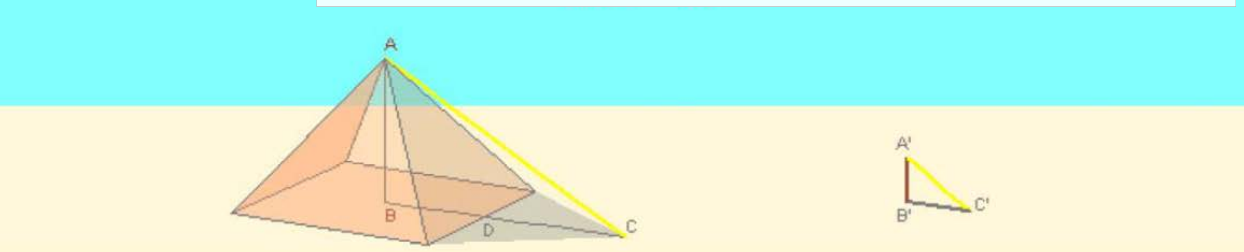
Tales cravou na area unha estaca de lonxitude coñecida e cuxa sombra en calquera momento do día podía medir doadamente. O seguinte paso consistía en medir a sombra que a altura da pirámide proxectaba.

Deste modo podíase aplicar o seu teorema aos dous triángulos semellantes ABC e A´B´C´. Tales podía medir aproximadamente o segmento DC, posto que era visible, pero non tiña forma de calcular BD, xa que este segmento quedaba dentro da pirámide. Pero sabía que a orientación da pirámide era norte-sur, co que esperou ao mediodía, cando o sol está ao sur e entón...



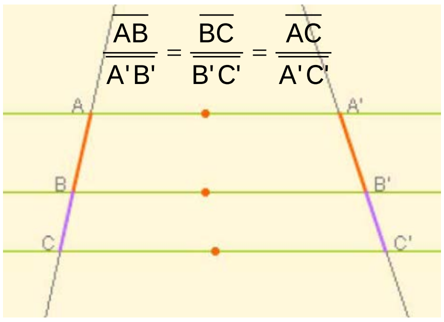
... o segmento BD é xusto a metade do cadrado da base da pirámide, algo que podía calcular perfectamente. O resto xa era doado:

$$\frac{AB}{BD + DC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$ de onde non hai máis que despexar AB.

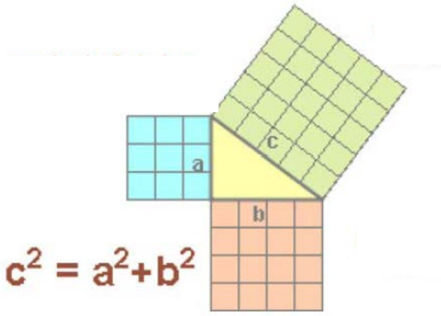


Lembra o máis importante

Teorema de Tales



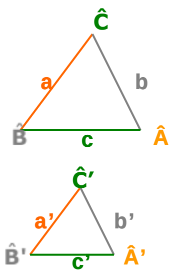
Teorema de Pitágoras



Semellanza

Dúas figuras planas son **semellantes** se existe a mesma proporción, chamada **razón de semellanza**, entre os seus lados homólogos e ademais os seus ángulos homólogos son iguais.

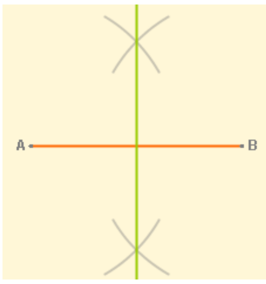
No caso dos triángulos basta que se cumpra un dos seguintes criterios:



1. Ángulos iguais (con dous basta)
   $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$
2. Un ángulo igual e os lados que o forman proporcionais
   $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
3. Lados proporcionais
   $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

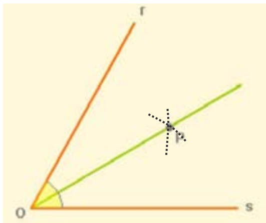
Lugares xeométricos

Un **lugar xeométrico** no plano é un **conxunto de puntos** que cumpren todos eles unha mesma propiedade.

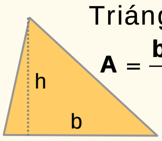


- A **mediatriz** dun segmento AB é o lugar xeométrico dos puntos do plano que **equidistan** de A e de B.

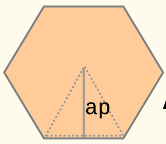
- A **bisectriz** dun ángulo é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan dos lados do devandito ángulo.



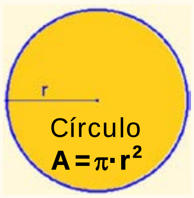
Áreas de recintos planos, descompóñense en áreas de figuras coñecidas.



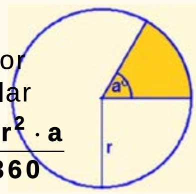
Triángulo $A = \frac{b \cdot h}{2}$



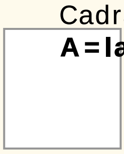
Polígono regular $A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{ap}}{2}$



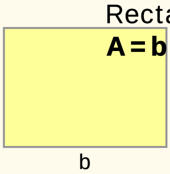
Sector circular $A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot a}{360}$



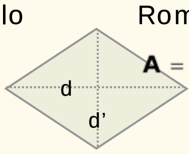
Cadrado $A = \text{lado}^2$



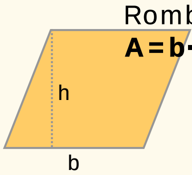
Rectángulo $A = b \cdot a$



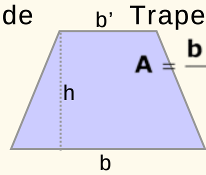
Rombo $A = \frac{d \cdot d'}{2}$



Romboide $A = b \cdot h$

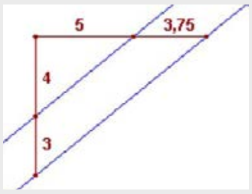


Trapecio $A = \frac{b + b'}{2} \cdot h$

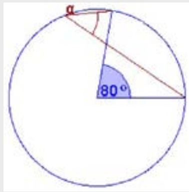


Autoavaliación

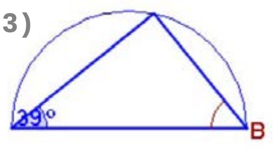
1. Son paralelas as rectas de cor azul da figura? Utiliza o Teorema de Tales para descubrilo.

1)


2. Canto mide o ángulo α?

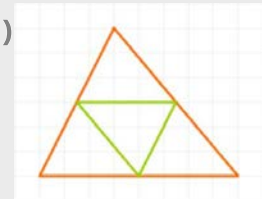
2)


3. Canto mide o ángulo B do triángulo da figura?

3)


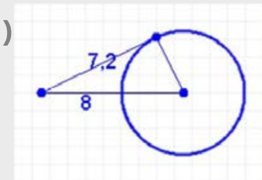
4. Os lados dun rectángulo miden 6 e 3cm; os doutro miden 9 e 4,5cm. Son semellantes?.

5. Os lados do triángulo verde miden 8cm, 6,7cm e 7,8cm; canto mide o lado maior do triángulo laranxa?

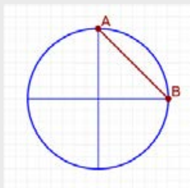
5)


6. Os lados iguais dun triángulo isóscele e rectángulo miden 14cm. Canto mide o lado desigual?

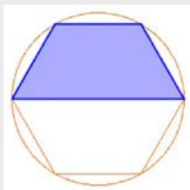
7. Calcula o raio da circunferencia da figura.

7)


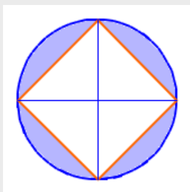
8. O radio da circunferencia mide 6 cm, cal é a lonxitude da corda AB?

8)


9. Calcula a área da figura de cor azul, inscrita nunha circunferencia de radio 5cm.

9)


10. O lado do cadrado da figura mide 5 cm, calcula a área do recinto de cor azul.

10)


Solucións dos exercicios para practicar

1. a) 7,5 b) 13,13
c) 15,05 d) 25,83

2. x=7,5 áng B=142º

3. Ángulos: A=90º, B=32º, C=58º
a=9,43 b'=8, a'=15,09

4. hipotenusa=9,43; altura h=4,24

5. a) si, hipotenusa=157
b) non
c) si, hipotenusa=117

6. A diagonal do rectángulo é o diámetro da circunferencia, r=10,82

7. $h=\sqrt{128}=11{,}31$ cm

8. $r=\sqrt{50}=7{,}07$ cm

9. a) Outra recta paralela situada entre as dúas, a unha distancia de 1,5cm de ambas.
b) Dúas solucións, as bisectrices dos dous ángulos que forman as rectas.

10. A mediatriz do lado AB

11. Outra circunferencia concéntrica de raio 10 cm.

12. Necesítanse 90 cadrados
En cada caso a área azul é:
$90\cdot193{,}5=17415$ cm^2 = 1,7415 m^2

13. Dous rectángulos e unha coroa circular:
$2\cdot198 + 263{,}76 = 659{,}76$ m^2

14. Céspede, recinto rectangular menos círculo: 3184,64 m^2
Paseo, coroa circular: 2411,52 m^2

15. Pódese descompoñer en triángulos equiláteros.
4 de tea verde: 3117,68 cm^2
3 de tea laranxa: 2338,26 cm^2

16. Área: ¾ partes dun círculo de raio 30m máis ½ círculo de raio 10m
2276,5 m^2

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. Si

2. 40º

3. 90º-39º = 51º

4. Si

5. 16 cm

6. $14\cdot\sqrt{2}=19{,}8$ cm

7. 3,49 cm

8. 8,49 cm

9. 32,48 cm^2

10. 14,25 cm^2