

## Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Identificar as solucións dunha ecuación.
- Recoñecer e obter ecuacións equivalentes.
- Resolver ecuacións de primeiro grao.
- Resolver ecuacións de segundo grao tanto completas como incompletas.
- Resolver algunhas ecuacións sinxelas de grao superior a dous.
- Utilizar a linguaxe alxébrica e as ecuacións para resolver problemas.

Antes de empezar.

1. Expresións Alxébricas ..... páx. 4  
 Identidade e ecuación  
 Solución dunha ecuación

2. Ecuacións de primeiro grao..... páx. 6  
 Definición  
 Método de resolución  
 Resolución de problemas

3. Ecuacións de segundo grao ..... páx. 8  
 Definición. Tipos  
 Resolución de  $ax^2+bx=0$   
 Resolución de  $ax^2+c=0$   
 Resolución de  $ax^2+bx+c=0$   
 Suma e produto das raíces  
 Discriminante dunha ecuación  
 Ecuación  $(x-a) \cdot (x-b)=0$   
 Resolución de problemas

4. Ecuacións de grao superior a dous... páx. 11  
 Ecuacións factorizadas  
 Ecuacións bicadradas

Exercicios para practicar

Para saber máis

Resumo

Autoavaliación

Actividades para enviar ao titor



## Antes de empezar

Canto che custou esa radio?  
Un cuarto, máis un quinto,  
máis un sexto, menos 21  
euros foi a metade de todo.



Chamamos  $x$  á cantidade buscada:

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} - 21 &= \frac{x}{2} \\ \frac{15x}{60} + \frac{12x}{60} + \frac{10x}{60} - \frac{1260}{60} &= \frac{30x}{60} \\ 7x = 1260 &\rightarrow x = 180\end{aligned}$$

# Ecuacións de segundo grao

## 1. Expresións alxébricas

### Identidade e Ecuación.

Unha **igualdade alxébrica** está formada por dúas expresións alxébricas separadas poloel signo igual (=).

- Cando a igualdade é certa para algún valor das letras chámase **ecuación**.
- Se a igualdade é certa para calquera valor das letras chámase **identidade**.

### Solución dunha ecuación

O valor da letra que fai que a igualdade se verifique chámase **solución** da ecuación.

**Resolver** unha ecuación é encontrar a solución ou solucións.

Unha ecuación chámase **compatible** se ten solución.

Se non ten solución chámase **incompatible**.

Dúas ou máis ecuacións que teñen as mesmas solucións chámanse **equivalentes**.

Para obter unha **ecuación equivalente** a unha dada utilízanse as seguintes regras.

- Se **sumamos ou restamos** aos dous membros dunha ecuación a mesma expresión alxébrica, obtense unha ecuación equivalente á dada.
- Se **multiplicamos ou dividimos** os dous membros dunha ecuación a mesma expresión alxébrica, obtense unha ecuación equivalente á dada.

**Identidade:**  $2(x + 1) = 2x + 2$

Observa que se verifica para calquera valor de x:

$$x = 0; 2(0 + 1) = 2 = 2(0) + 2$$

$$x = 1; 2(1 + 1) = 4 = 2(1) + 2$$

$$x = 2; 2(2 + 1) = 6 = 2(2) + 2$$

**Ecuación:**  $x + 1 = 2$

Observa que se verifica só para  $x=1$

$$x = 1; 1 + 1 = 2$$

$$x = 2; 2 + 1 = 3 \neq 2$$

$$x = 3; 3 + 1 = 4 \neq 2$$

$x + 5 = 8$  é unha **ecuación compatible** ten por única solución  $x=3$

$x + 1 = 4$  é unha **ecuación compatible** ten por única solución  $x=3$

As dúas **ecuacións** son **equivalentes**

$x^2 = -1$  é unha **ecuación incompatible**, non ten solución, ningún número elevado ao cadrado pode ser negativo

Ecuacións equivalentes a  $x + 5 = 8$

$$x + 7 = 10 \text{ obtense sumando } 2 \\ x + 5 + 2 = 8 + 2 \rightarrow x + 7 = 10$$

$$2x + 10 = 16 \text{ obtense multiplicando por } 2 \\ 2(x + 5) = 2 \cdot 8 \rightarrow 2x + 10 = 16$$

## EXERCICIOS resoltos

1. Clasifica a seguinte expresión alxébrica:  $6(7x - 1) + 3x = 4x + 76$ , en identidade ou ecuación.

Sol: É unha ecuación,  $6(7x - 1) + 3x = 42x - 6 + 3x = 45x - 6 \neq 4x + 76$

2. Clasifica a seguinte expresión alxébrica:  $7(5x - 1) + 5x = 40x - 7$ , en identidade ou ecuación.

Sol: É unha identidade,  $7(5x - 1) + 5x = 35x - 7 + 5x = 40x - 7$

3. Escribe unha ecuación da forma  $ax + b = c$  cuxa solución sexa  $x = 4$

Sol:  $3x - 5 = 7$

4. Escribe unha ecuación da forma  $ax = b$  que sexa equivalente a  $5x + 4 = -16$

Sol: Restando 4 aos dous membros da ecuación obtense  $5x = -20$

5. Escribe unha ecuación da forma  $x + b = c$  que sexa equivalente a  $5x + 20 = 15$

Sol: Dividindo por 5 aos dous membros da ecuación obtense  $5x + 4 = 3$

6. Razona se  $x = 2$  é solución da ecuación:  $5x + 3(x - 1) = 13$

Sol: Si é solución  $5(2) + 3(2 - 1) = 10 + 3 = 13$

7. Razona se  $x = 3$  é solución da ecuación:  $7x + 3(x - 2) = 16$

Sol: Non é solución  $7(3) + 3(3 - 2) = 21 + 3 = 24 \neq 16$

8. Comproba que  $x = -1$ , é solución da ecuación  $5x + x^2 = -4$

Sol: Si é solución  $5(-1) + (-1)^2 = -5 + 1 = -4$

9. Escribe unha ecuación que sexa incompatible

Sol:  $(x - 1)^2 = -4$ , ningún número elevado ao cadrado é negativo

# Ecuacións de segundo grao

## 2. Ecuacións de primeiro grao

### Definición

Unha **ecuación de primeiro grao cunha incógnita** é unha igualdade alxébrica que se pode expresar na forma:  **$ax=b$** , sendo **a** e **b** números reais e  **$a \neq 0$** .

O maior expoñente das **x** debe ser **1**.

Se  **$a \neq 0$**  sempre ten solución e ademais é única, a solución é:  **$x=-b/a$**

### Método de resolución

Para resolver unha ecuación de primeiro grao séguense estes pasos.

- Elimínanse os denominadores. Para elo calcúlase o m.c.m dos denominadores e multiplícanse os dous membros da ecuación por el.
- Quítanse os parénteses.
- Xuntamos os termos en x á esquerda do igual e os números á dereita.
- Reducir termos semellantes.

### Resolución de problemas

Para resolver un problema mediante unha ecuación, hai que traducir á linguaxe alxébrica as condicións do enunciado e despois resolver a ecuación resultante.

Comeza por ler detidamente o enunciado ata asegurarte de que comprendes ben o que hai que calcular e os datos que che dan.

Unha vez resolta a ecuación dá a solución ao problema.

*EXEMPLO 1) A idade dun pai é triplo da do seu fillo, se entre os dous suman 72 anos, que idade ten cada un?*

- ✓ Idade do fillo:  $x$  anos      Idade do pai:  $3x$  anos  
Entre os dous 72 anos  $\rightarrow 3x+x=72$

*EXEMPLO 2) Cantos litros de viño de 4€ litro temos que mesturar con viño de 2 € litro, para obter 40 litros de viño cuxo prezo sexa 3 € o litro.*

- ✓ Viño de 4€/l:  $x$  litros      Prezo:  $4x$   
Viño de 2€/l:  $40-x$  litros      Prezo:  $2(40-x)$   
Prezo da mestura  $40 \cdot 3 \rightarrow 4x+2(40-x)=3 \cdot 40$

$2x + 9 = 15$  Ecuación de grao 1, pódese escribir como  $2x = 6$

A solución é:  $x = \frac{6}{2} = 3$

$$\frac{3x}{2} + 2(x - 1) = 5$$

Quitar denominadores:

$$2\left(\frac{3x}{2} + 2(x - 1)\right) = 2 \cdot 5$$

$$3x + 4(x - 1) = 10$$

Quitar parénteses:

$$3x + 4x - 4 = 10$$

$$\text{Xuntar: } 3x + 4x = 10 + 4$$

$$\text{Reducir: } 7x = 14$$

$$\text{Despexar: } x = \frac{14}{7} = 2$$



Ecuación:  $3x+x=72$

Resólvese:  $4x=72 \quad x=72/4=18$

O fillo ten 18 e o pai 54 anos

Ecuación:  $4x+2(40-x)=3 \cdot 40$

Resólvese:  $4x+80-2x=120$

$$2x=40 \quad x=40/2=20$$

Hai que mesturar 20 litros de viño de cada prezo.

## EXERCICIOS resoltos

10. Resolve as seguintes ecuacións:

$$\text{a) } \frac{-7x+5}{7} + \frac{9x-7}{8} = -1 \quad \text{Sol: } 56 \frac{-7x+5}{7} + 56 \frac{9x-7}{8} = 56(-1) \rightarrow 8(-7x+5) + 7(9x-7) = -56$$

$$-56x + 40 + 63x - 49 = -56 \rightarrow 7x = -47 \rightarrow x = \frac{-47}{7}$$

$$\text{b) } \frac{2x-(x+1)}{4} = \frac{5x+2}{6} \quad \text{Sol: } 12 \frac{x-1}{4} = 12 \frac{5x+2}{6} \rightarrow 3(x-1) = 2(5x+2)$$

$$3x-3 = 10x+4 \rightarrow -7x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{-7} = -1$$

$$\text{c) } \frac{3x-7(x+1)}{6} = \frac{2x-1}{3} - 2 \quad \text{Sol: } 6 \frac{3x-7(x+1)}{6} = 6 \frac{2x-1}{3} - 6 \cdot 2 \rightarrow 3x-7(x+1) = 2(2x-1) - 12$$

$$3x-7x-7 = 4x-2-12 \rightarrow -8x = -7 \rightarrow x = \frac{7}{8}$$

$$\text{d) } \frac{2x-5}{3} - \frac{-2x+8}{7} = x \quad \text{Sol: } 21 \frac{2x-5}{3} - 21 \frac{-2x+8}{7} = 21x \rightarrow 7(2x-5) - 3(-2x+8) = 21x$$

$$14x-35+6x-24 = 21x \rightarrow -x = 59 \rightarrow x = -59$$

$$\text{e) } \frac{6x-(x-8)}{6} = \frac{-2x-17}{3} + x \quad \text{Sol: } 6 \frac{6x-(x-8)}{6} = 6 \frac{-2x-17}{3} + 6x \rightarrow 6x-(x-8) = 2(-2x-17) + 6x$$

$$5x+8 = -4x-34+6x \rightarrow 3x = -42 \rightarrow x = -14$$

11. A idade dun pai é o triplo ca do seu fillo, se entre os dous suman 56 anos. Cal é a idade de cada un?

Idade do fillo : x

Sol: Idade do pai : 3x     $x + 3x = 56 \rightarrow 4x = 56 \rightarrow x = \frac{56}{4} = 14$

A idade do fillo é 14 anos e a do pai é 42 anos

12. Cantos litros de viño de 5€ o litro deben mesturarse con viño de 3€ o litro para obter 50 litros de viño cuxo prezo sexa de 4€ o litro?

| Sol:                | litros | prezo (€) |
|---------------------|--------|-----------|
| Viño de 5 € o litro | x      | 5x        |
| Viño de 3 € o litro | 50-x   | 3(50-x)   |
| Viño de 4 € o litro | 50     | 4·50=200  |

$$5x+3(50-x)=200 \longrightarrow 2x=50 \longrightarrow x=25$$

Temos que mesturar 25 litros de 5€ con 25 litros de 3€ o litro.

# Ecuaciones de segundo grado

## 3. Ecuaciones de segundo grado

### Definición. Tipos

Unha **ecuación de segundo grado cunha incógnita** é unha igualdade alxébrica que se pode expresar na forma:  $ax^2 + bx + c = 0$ , sendo **a**, **b** e **c** números reais e **a** ≠ 0.

- Os **coeficientes** da ecuación son a e b. O **termo independente** é c.
- Se  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ , dise que a ecuación é **completa**.
- Se  $b=0$  ou  $c=0$  a ecuación é **incompleta**.

### Resolución de $ax^2+bx=0$

A ecuación de segundo grado **incompleta** do tipo  $ax^2+bx=0$  ten dúas solucións:  $x_1=0$  e  $x_2=-b/a$

Resólvese sacando factor común x e igualando os dous factores a cero.

### Resolución de $ax^2+c=0$

A ecuación de segundo grado **incompleta** do tipo  $ax^2+c=0$ , pode non ter solución ou ter dúas solucións distintas da forma  $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

### Resolución de $ax^2+bx+c=0$

A ecuación de segundo grado **completa** é unha igualdade alxébrica que se pode expresar da forma  $ax^2+bx+c=0$ , sendo a, b e c números reais e **a** ≠ 0

Para obter as solucións utilizamos a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Suma e Produto das raíces

Se  $x_1$  e  $x_2$  son as raíces dunha ecuación de segundo grado  $ax^2+bx+c=0$ , estas cumpren as seguintes propiedades :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad ; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ecuación de segundo grado **completa**:  $3x^2 + 4x + 2 = 0$

$$a=3 \ ; \ b=4 \ ; \ c=2$$

Ecuación de segundo grado **incompleta**:  $3x^2 + 2 = 0$

$$a=3 \ ; \ b=0 \ ; \ c=2$$

$$3x^2 + 9x = 0$$

$$x(3x + 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 9 = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

$$3x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

As raíces son  $x=3$  e  $x=2$

$$x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5 = \frac{-(-5)}{1}$$
$$x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 3 = 6 = \frac{6}{1}$$



$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0$   
Ten dúas raíces reais distintas

$$3x^2 + 5x + 6 = 0$$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -37 < 0$   
Non ten raíces reais

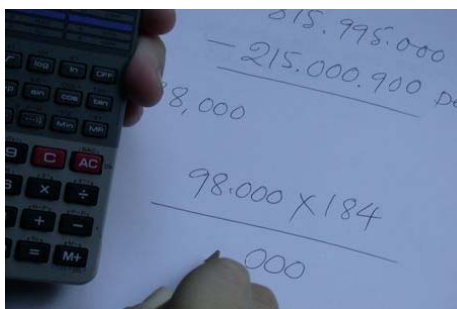
$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$   
Ten dúas raíces reais iguais

$$(x + 7) \cdot (x - 9) = 0$$

Para que un produto sexa igual a cero basta con que un dos factores sexa cero.

$$x + 7 = 0 \rightarrow x = -7$$
$$x - 9 = 0 \rightarrow x = 9$$



- Comprender o enunciado
- Identificar a incógnita
- Traducir a linguaxe alxébrica
- Presentar a ecuación
- Resolver
- Comprobar as solucións

## Discriminante

Chámase discriminante dunha ecuación de segundo grao  $ax^2 + bx + c = 0$ , á expresión:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Se  $\Delta > 0$  hai dúas raíces reais distintas
- Se  $\Delta = 0$  hai dúas raíces reais iguais
- Se  $\Delta < 0$  non hai raíces reais

## Ecuación $(x-a) \cdot (x-b) = 0$

Para que un produto de varios factores sexa cero, polo menos un dos factores debe ser cero.

Para resolver as ecuacións nas que un produto sexa igual a cero,  $(x-a)(x-b) = 0$ , iguálase a cero cada un dos factores e resólvense as ecuacións resultantes.

$$x - a = 0 ; x = a$$

$$x - b = 0 ; x = b$$

## Resolución de Problemas

As ecuacións de primeiro e segundo grao aparecen en multitude de ocasións na resolución de distintos problemas da vida cotiá.

*A suma dos cadrados de dous números naturais consecutivos é 313. Cales son os números?*

Chamamos  $x$  ao menor dos números.

Chamamos  $x+1$  ao consecutivo

A ecuación é:  $x^2 + (x+1)^2 = 313$

Resolvemos:

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 313$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 313$$

$$2x^2 + 2x - 312 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 2496}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2500}}{4} = \frac{-2 \pm 50}{4} = \begin{cases} 12 \\ -13 \end{cases}$$

A solución é o número 12 e o 13 (-13 non vale por non ser natural).

# Ecuaciones de segundo grado

## EXERCICIOS resoltos

13. Resolve as seguintes ecuacións de segundo grado incompletas:

$$\text{a) } x^2 - 6x = 0 \quad \text{Sol: } x(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 6 = 0 \rightarrow x = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } x^2 + 27x = 0 \quad \text{Sol: } x(x + 27) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 27 = 0 \rightarrow x = -27 \end{cases}$$

$$\text{c) } 3x^2 + 5x = 0 \quad \text{Sol: } x(3x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

14. Resolve as seguintes ecuacións de segundo grado incompletas:

$$\text{a) } x^2 - 36 = 0 \quad \text{Sol: } x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \end{cases}$$

$$\text{b) } 4x^2 - 9 = 0 \quad \text{Sol: } x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{c) } x^2 + 9 = 0 \quad \text{Sol: } x^2 = -9 \rightarrow \text{Non hai solución}$$

15. Resolve as seguintes ecuacións de segundo grado completas:

$$\text{a) } x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \text{Sol: } x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } 3x^2 + 17x + 20 = 0 \quad \text{Sol: } x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 240}}{6} = \frac{-17 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-17 \pm 7}{6} = \begin{cases} -\frac{5}{3} \\ -4 \end{cases}$$

$$\text{c) } 3x^2 + 5x + 4 = 0 \quad \text{Sol: } x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 48}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{6} \rightarrow \text{Non hai solución}$$

16. Escribe unha ecuación de segundo grado que teña por raíces  $x = -1$ ,  $x = 4$ :

$$\text{Sol: } \left. \begin{array}{l} S = -1 + 4 = 3 \\ P = -1 \cdot 4 = -4 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

17. Resolve as seguintes ecuacións:

$$\text{a) } (x - 2)(x + 3) = 0 \quad \text{Sol: } x - 2 = 0 \rightarrow x = 2; \quad x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

$$\text{b) } (3x - 1)(x - 5) = 0 \quad \text{Sol: } 3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}; \quad x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

$$(3x+3)(x+6)(-8x-11)=0$$

**Paso 1:** Iguálense a cero os factores

$$\begin{aligned} 3x+3 &= 0 \\ x+6 &= 0 \\ -8x-11 &= 0 \end{aligned}$$

**Paso 2:** Resólvese cada ecuación

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ x &= -6 \\ x &= -\frac{11}{8} \end{aligned}$$

$$49x^3 - 81x = 0$$

**Paso 1:** Sacando factor común e aplicando as identidades notables factorízase o polinomio.

$$\begin{aligned} x(49x^2 - 81) &= 0 \\ x(7x+9)(7x-9) &= 0 \end{aligned}$$

**Paso 2:** Iguálase a cero cada factor e resólvese as ecuacións.

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ 7x+9=0 &\rightarrow x = -\frac{9}{7} \\ 7x-9=0 &\rightarrow x = \frac{9}{7} \end{aligned}$$

$$-x^4 + 5x^2 + 6 = 0$$

**Paso 1:** Realizamos o cambio  $t = x^2$

$$-t^2 + 5t + 6 = 0$$

**Paso 2:** Aplicar a fórmula

$$\begin{aligned} t &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(-1)(6)}}{2 \cdot (-1)} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{-2} = \frac{-5 \pm 7}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 6 \end{cases} \end{aligned}$$

**Paso 3:** Calcular as solucións

$$\begin{aligned} x^2 &= -1 \rightarrow \text{No hay solución} \\ x^2 &= 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{6} \end{aligned}$$

## 4. Ecuaciones de grado superior a dous

### Ecuaciones factorizadas

Tes visto que para resolver ecuacións nas que un produto é cero iguálense a cero cada un dos factores e resólvense as ecuacións resultantes. O mesmo faremos cando haxa máis dun produto:

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b)(x-c) &= 0 \\ (x-a) &= 0 \rightarrow x=a \\ (x-b) &= 0 \rightarrow x=b \\ (x-c) &= 0 \rightarrow x=c \end{aligned}$$

Factorizar o polinomio da ecuación é un método útil para resolver ecuacións de grado superior a dous, para elo aquí vas sacar factor común e utilizar as identidades notables. O curso próximo aprenderás novos métodos para descompoñer en factores un polinomio.

### Bicadradas

Unha **ecuación bicadrada** é unha igualdade alxébrica que se pode expresar da forma  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , con a, b e c números reais e  $a \neq 0$ .

Para resolvelas faise o cambio  $t = x^2$ .

A ecuación transfórmase nunha de segundo grado con incógnita  $t$ :  $at^2 + bt + c = 0$

Ao aplicar a fórmula da ecuación de segundo grado obtemos dúas solucións:  $t_1$  e  $t_2$ .

Co que que  $x = \pm\sqrt{t_1}$  e  $x = \pm\sqrt{t_2}$

## EXERCICIOS resoltos

18. Resolve as seguintes ecuacións factorizadas:

a)  $(x + 3)(2x - 5)(3x + 1) = 0$       Sol:  $x = -3, x = \frac{5}{2}, x = -\frac{1}{3}$

b)  $(2x - 6)(3x + 7)(5x + 10) = 0$       Sol:  $x = 3, x = -\frac{7}{3}, x = -2$

c)  $(7x + 3)(4x - 6)(x - 8) = 0$       Sol:  $x = -\frac{3}{7}, x = \frac{3}{2}, x = 8$

19. Saca factor común e aplica as identidades notables para resolver as seguintes ecuacións:

a)  $4x^5 - 12x^4 + 9x^3 = 0$        $x^3(4x^2 - 12x + 9) = 0 \rightarrow x^3(2x - 3)^2 = 0$   
Sol:  $x = 0, x = \frac{3}{2}$

b)  $16x^3 + 40x^2 + 25x = 0$        $x(16x^2 + 40x + 25) = 0 \rightarrow x(4x + 5)^2 = 0$   
Sol:  $x = 0, x = -\frac{5}{4}$

c)  $16x^3 - 4x = 0$        $4x(4x^2 - 1) = 0 \rightarrow 4x(2x + 1)(2x - 1) = 0$   
Sol:  $x = 0, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$

20. Saca factor común e despois resolve a ecuación de segundo grado:

a)  $x^5 - 12x^4 + 32x^3 = 0$        $x^3(x^2 - 12x + 32) = 0$   
 $x^3 = 0 \quad x^2 - 12x + 32 = 0$   
Sol:  $x = 0, x = 4, x = 8$

b)  $3x^3 + 21x^2 + 30x = 0$        $3x(x^2 + 7x + 30) = 0$   
 $3x = 0 \quad x^2 + 7x + 30 = 0$   
Sol:  $x = 0, x = -2, x = -5$

21. Resolve as seguintes ecuacións bicuadradas:

a)  $3x^4 - 27x^2 + 42 = 0$        $x^2 = t \rightarrow 3t^2 - 27t + 42 = 0$   
 $t = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 3 \cdot 42}}{6} = \frac{27 \pm \sqrt{225}}{6} = \frac{27 \pm 15}{6} = \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases}$   
Sol:  $x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7}$   
 $x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

a)  $x^4 - 10x^2 - 96 = 0$        $x^2 = t \rightarrow t^2 - 10t - 96 = 0$   
 $t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 96}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{484}}{2} = \frac{10 \pm 22}{2} = \begin{cases} 16 \\ -6 \end{cases}$   
Sol:  $x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$   
 $x^2 = -6$  No hay solución



## Para practicar

- Determina se as seguintes igualdades alxébricas son identidades ou son ecuacións:
  - $6(x - 1) - 3x = 4x + 6$
  - $3(x - 1) - 5 = 3x - 8$
  - $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
  - $x - (2x - 5) = 3x - 8$
- Indica o grao das seguintes ecuacións:
  - $x^2 - 1 = x + 2$
  - $x^2 - 1 = x^2 + x + 2$
  - $x^3 - 1 = x^3 + x^2 + 2$
  - $x - 1 = 3x + 2$
- Indica se  $x=4$  é solución das seguintes ecuacións:
  - $3(x - 1) - 5 = 3x - 8$
  - $(x - 1)^2 - 5 = x$
  - $2(x + 3) - 5x = x + 2$
  - $x^3 - 60 = x$
- Escribe unha ecuación de primeiro grao cuxa solución sexa:
  - $x=2$
  - $x=3$
  - $x=1$
- Resolve as seguintes ecuacións de primeiro grao:
  - $10 - x = 3$
  - $2x - 5 = 15$
  - $-9 + 4x = x$
  - $3x - 10 = 50 + x$
- Calcula o valor de  $x$ :
  - $3(x - 1) + 2x = x + 1$
  - $2 - 2(x - 3) = 3(x - 3) - 8$
  - $2(x + 3) + 3(x + 1) = 24$
  - $\frac{3x}{2} + 2(x - 1) = 12$
- Obtén a solución das seguintes ecuacións:
  - $\frac{x - 1}{2} - \frac{x + 3}{3} = 1$
  - $\frac{x - 3}{2} - 3(x + 2) = -20$
  - $\frac{2 - 2(x - 3)}{2} - \frac{x + 4}{4} = 3$
  - $\frac{4(x + 1)}{2} + x - \frac{x + 3}{3} = 5 + 3(x - 2)$
- Encontra dous números consecutivos que sumen 71.
- Encontra un número tal que sumado co seu triplo sexa igual a 100.
- Que idade teño agora se dentro de 12 anos terei o triplo da idade que tiña hai 8 años?
- Xoán ten 12 anos menos que María, dentro de 4 años María terá o triplo da idade de Xoán, cantos anos ten agora?
- A unha festa asisten 43 persoas. Se se marchasen 3 mozos, habería o triplo de mozas que de mozos. Cantos mozos e mozas hai?

# Ecuacións de segundo grao

13. Resolve

- a)  $x^2 - 5x = 0$
- b)  $x^2 + 3x = 0$
- c)  $x^2 - 9 = 0$
- d)  $x^2 + 5 = 0$

14. Resolve

- a)  $x^2 - 5x + 6 = 0$
- b)  $x^2 - 3x - 4 = 0$
- c)  $x^2 + 3x - 10 = 0$
- d)  $x^2 - 6x + 9 = 0$

15. Resolve

- a)  $(x + 2)(x - 3) = 0$
- b)  $(3x + 1)(x + 5) = 0$
- c)  $x(x + 9) = 0$
- d)  $(2x + 8)(3x - 9) = 0$

16. Escribe unha ecuación de segundo grao que teña por raíces:

- a)  $x=3$  y  $x=-5$
- b)  $x=2$  y  $x=4$
- c)  $x=-1$  y  $x=-9$
- d)  $x=0$  y  $x=-5$

17. Resolve

- a)  $(x + 2)(x - 3) = 6$
- b)  $(x + 1)(x - 5) = 16$

18. Calcula o valor de  $m$  sabendo que  $x=3$  é solución da ecuación de segundo grao  $x^2 - mx + 27 = 0$

19. A suma dun número natural e o seu cadrado é 42. De que número se trata?

20. A diagonal dun rectángulo mide 10 cm. Acha as súas dimensións se un lado mide 2 cm menos có outro.

21. Encontra dous números positivos que se diferencien en 7 unidades sabendo que o seu produto é 44.

22. Encontra dous números cuxa suma sexa 10 e o seu produto 24.

23. Un campo de fútbol mide 30 m máis de longo que de largo e a súa área é de 7000 m<sup>2</sup>, acha as súas dimensións.

24. Temos un arame de 17 cm. Como temos que dobralo para que forme un ángulo recto de modo que os seus extremos queden a 13 cm?

25. Acha o valor dos coeficientes  $a, b$  e  $c$  na ecuación de segundo grao  $7x^2 + bx + c = 0$  para que as súas solucións sexan 3 e -2.

26. A diagonal dun rectángulo ten 10 cm. Calcula as súas dimensións se o lado pequeno mide  $\frac{3}{4}$  do lado grande.

27. Reparte o número 20 en dúas partes de forma que a suma dos seus cadrados sexa 202.

28. Encontra dous números positivos sabendo que se diferencian en 7 unidades e o seu produto é 60.

29. Un triángulo rectángulo ten de perímetro 24 metros, e a lonxitude dun cateto é igual a  $\frac{3}{4}$  do outro. Acha os seus lados.

30. Encontra dos números sabendo que suman 18 unidades e o seu produto é 77.

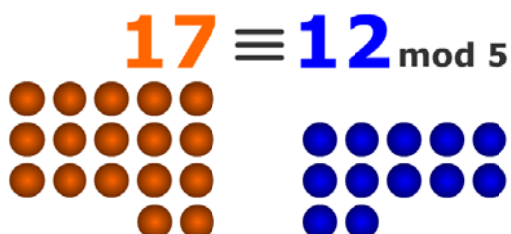
Para saber máis



## Congruencias lineais

Dise que **a** é **congruente** con **b** módulo **m** se **a** e **b** **dan o mesmo resto ao dividir por m**.

Escríbese:  $a \equiv b \pmod{m}$



$$17 \equiv 12 \pmod{5}$$

Observa que ao dividir 17 entre 5 dá resto 2 e ao dividir 12 entre 5 dá resto 2.

$$17 \equiv 11 \pmod{2}$$

$$12 \equiv 6 \pmod{3}$$

Unha ecuación lineal de congruencias é unha ecuación da forma:

$$ax + b \equiv 0 \pmod{m}$$

Se **p** é unha solución da ecuación tamén o son **p+m, p+2m, p+3m, ...**

- ✓ Se  $M = \text{m.c.d.}(a, m) = 1$  hai unha solución
- ✓ Se  $M = \text{m.c.d.}(a, m) \neq 1$  e  $M$  é divisor de  $b$  hai  $M$  solucións
- ✓ Se  $M = \text{m.c.d.}(a, m) \neq 1$  e  $M$  non é divisor de  $b$  non hai solución

**Resolver:  $2x - 4 \equiv 0 \pmod{3}$**

$\text{mcd}(2, 3) = 1$  hai unha solución que é  $x = 2$ , tamén o son  $2 + 3k$

**Resolver:  $2x - 12 \equiv 0 \pmod{4}$**

$\text{mcd}(2, 4) = 2$  e 2 divisor de 4 hai dúas solucións que son

$x = 0$ , tamén o son  $0 + 4k$   
 $x = 2$ , tamén o son  $2 + 4k$

**Resolver:  $2x - 1 \equiv 0 \pmod{4}$**

$\text{mcd}(2, 4) = 2$  e 2 non é divisor de 4 non hai solución.

Observa que  $2x - 1$  é impar, e ningún impar é múltiplo de 4

# Ecuacións de segundo grao



## Lembra o máis importante

### Identidade

Igualdade entre dúas expresións alxébricas que se verifica para calquera valor das letras

### Ecuación

Igualdade entre dúas expresións alxébricas que se verifica para algún valor das letras

### Ecuación de primeiro grao

Son ecuacións que se poden expresar na forma  $ax=b$  con  $a \neq 0$ .

Teñen unha soa solución que é  $x=a/b$

### Solución dunha ecuación

É o valor da incógnita que fai certa a igualdade.

### Ecuación Incompatible

É a ecuación que non ten solución.

### Ecuación Compatible

É a ecuación que ten solución.

### Ecuacións equivalentes

Dúas ecuacións son equivalentes se teñen as mesmas solucións.

### Ecuación de segundo grao

Completas:  $ax^2+bx+c=0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Se  $b^2-4ac > 0$  ten 2 solucións
- Se  $b^2-4ac = 0$  ten 1 solución dobre
- Se  $b^2-4ac < 0$  non ten solución

Incompletas: Se  $b=0$  ou  $c=0$

- $ax^2+c=0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ 
  - $-c/a > 0$ , dúas solucións
  - $-c/a < 0$ , non hai solución
  - $c=0$ , unha solución dobre,  $x=0$

- $ax^2+bx=0$   
Solucións:  $x=0$ ,  $x=-b/a$

### Propiedades das raíces da ecuación de segundo grao

A **suma** das solucións da ecuación de segundo grao é

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

O **produto** das solucións da ecuación de segundo grao é

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

### Ecuación Canónica

Se  $S$  é a suma das raíces e  $P$  o produto a ecuación de segundo grao pódese escribir na forma:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

### Ecuacións de grao superior a dous

- Factorizadas:  $(x-a)(x-b)(x-c)=0$   
 $x-a=0 \rightarrow x=a$ ;  $x-b=0 \rightarrow x=b$ ; ...
- Bicadradas:  $ax^4+bx^2+c=0$   
Faixe  $x^2=t$  e resólvese a ecuación de segundo grao resultante.



## Autoavaliación



1. Escribe unha ecuación da forma  $ax+b=c$  cuxa solución sexa  $x=8$ .
2. Resolve a ecuación:  $x - \frac{x-16}{6} = 2(x+6)$
3. Encontra un número sabendo que se lle sumo seis veces o consecutivo o resultado é igual a 755.
4. Resolve a ecuación:  $\frac{x+4}{2} + \frac{x+7}{3} = 1$
5. Resolve a ecuación:  $-4x^2 - 7x = 0$
6. Resolve a ecuación:  $-2x^2 + 8 = 0$
7. Resolve a ecuación:  $x^2 - 24x + 108 = 0$
8. Escribe unha ecuación de segundo grao que teña por raíces 20 e 1.
9. O cadrado dun número positivo máis o dobre do seu oposto é 960. Cal é o número?
10. Resolve:  $(x+9) \cdot (4x-8) \cdot (3x+15) = 0$

# Ecuaciones de segundo grado

## Soluciones dos ejercicios para practicar

- a) ecuación      b) identidad  
c) identidad      d) ecuación
- a) 2      b) 1      c) 2      d) 1
- a) si      b) si      c) non      d) si
- a)  $x + 3 = 5$       b)  $2x + 1 = 7$   
c)  $3x - 1 = 2$
- a)  $x = 7$       b)  $x = 10$   
c)  $x = 3$       d)  $x = 30$
- a)  $x = 1$       b)  $x = 5$   
c)  $x = 3$       d)  $x = 4$
- a)  $x = 15$       b)  $x = 5$   
c)  $x = 1$       d)  $x = 6$
- 35
- 25
- 18
- Xoán 2 e María 14 anos
- 13 mozos e 30 mozas
- a)  $x = 0$        $x = 5$       b)  $x = 3$        $x = -3$   
c)  $x = 0$        $x = -3$       d) Non hai solución
- a)  $x = 2$        $x = 3$       b)  $x = -1$        $x = 4$   
c)  $x = 2$        $x = -5$       d)  $x = 3$        $x = 3$
- a)  $x = -2$        $x = 3$       b)  $x = -1/3$        $x = -5$   
c)  $x = 0$        $x = -9$       d)  $x = -4$        $x = 3$
- a)  $x^2 + 2x - 15 = 0$   
b)  $x^2 - 6x + 8 = 0$   
c)  $x^2 + 10x + 9 = 0$   
d)  $x^2 - 5x = 0$
- a)  $x = 4$ ,  $x = -3$       b)  $x = 7$ ,  $x = -3$   
c)  $x^2 + 10x + 9 = 0$       d)  $x^2 - 5x = 0$
- 12
- 6
- 8 e 6
- 11 e 4
- 6 e 4
- 100 e 70
- Os puntos onde dobrar están a 12 e 5 cm dos extremos.
- $b = -7$        $c = -42$
- 6 e 8
- 11 e 9
- 12 e 5
- 6,8 e 10
- 11 e 7

## Soluciones AUTOAVALIACIÓN

- $-2x + 7 = -9$
- 8
- 107
- 4
- 0 e  $-7/4$
- 2 e -2
- 18 e 6
- $x^2 - 21x + 20 = 0$
- 32
- 9, 2 e -5