8 Corpos xeométricos

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Distinguir as clases de corpos xeométricos.
- Construílos a partir do seu desenvolvemento plano.
- Calcular as súas áreas e volumes.
- Localizar un punto sobre a Terra.
- Calcular a hora en cada país.
- Como se fan os distintos tipos de mapas e as vantaxes e inconvenientes de cada un deles.

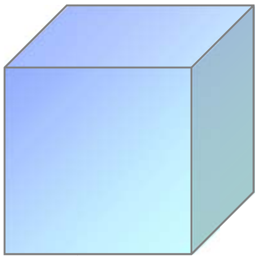
Antes de empezar

Lembra

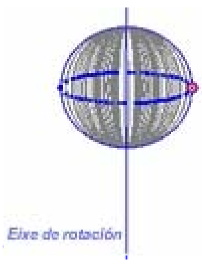
Un **poliedro** é un corpo pechado limitado por polígonos.
Cada un deles recibe o nome de **cara.** Os lados das caras son as **arestas** do poliedro e os extremos das arestas son os **vértices** do poliedro.
En todo poliedro simple (sen ocos) cúmprese **a relación de** Euler:

O número de caras dun poliedro (C) é igual ao número de arestas (A) menos o de vértices (V) máis 2

$$C = A - V + 2$$



C=6 V=8 A=12
A-V+2=12−8+2=6=C



Un **corpo de revolución** é calquera figura xeométrica construída ao facer xirar unha figura plana ao redor dun eixe contido no mesmo plano.

1. Poliedros regulares

Definicións

Diremos que un **poliedro** é **regular** cando se cumpren as seguintes condicións:

- As súas caras son polígonos regulares iguais.
- En cada vértice concorren o mesmo número de caras.

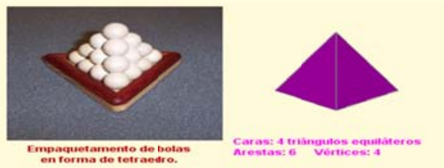
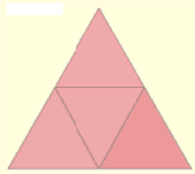
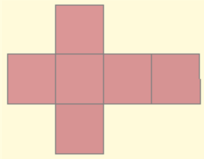
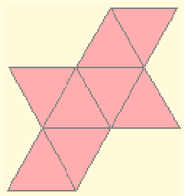
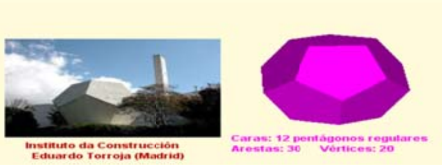
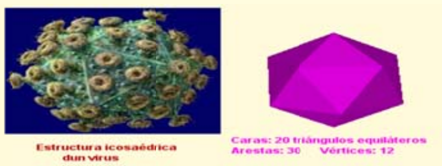
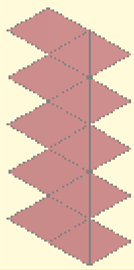
Só hai cinco poliedros regulares (chamados tamén Sólidos Platónicos):

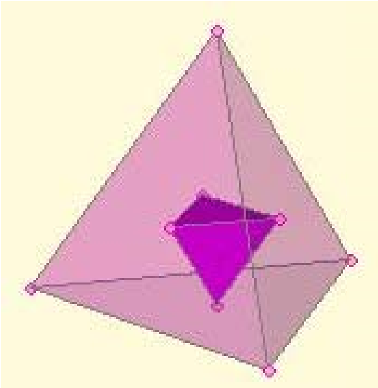
- **Tetraedro**: 4 caras (triángulos equiláteros)
- **Hexaedro o cubo**: 6 caras (cadrados)
- **Octaedro**: 8 caras (triángulos equiláteros)
- **Dodecaedro**: 12 caras (pentágonos regulares)
- **Icosaedro**: 20 caras (triángulos equiláteros)

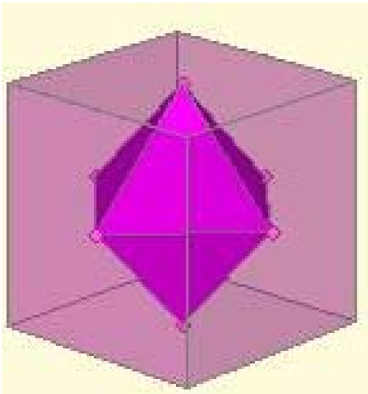
Desenvolvementos

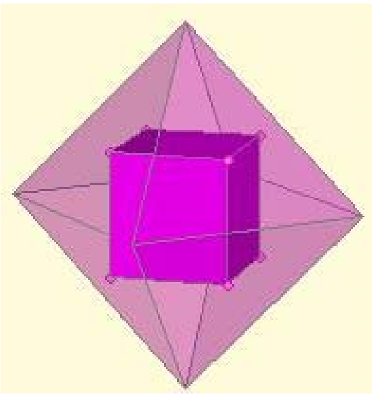
Dise que un corpo xeométrico é **desenvolvible** cando pode ser construído a partir dunha figura plana formada por todas as caras do corpo.

Todos os poliedros regulares son desenvolvibles e neste apartado mostrámosche as figuras que permiten a súa construción.

<table>
<tr><th>Características</th><th>Desenvolvemento</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>







Poliedros duais

Dise que dous poliedros son **duais** se o número de vértices do primeiro coincide co número de caras do segundo e viceversa. Ademais ambos os dous deben ter o mesmo número de arestas.

Se dous poliedros son duais pode construírse un a partir do outro unindo con segmentos os centros de cada dúas caras contiguas do primeiro.

Nas imaxes amósase que o cubo e o octaedro son duais, o dodecaedro e o icosaedro tamén e que o tetraedro é dual consigo mesmo.

Tetraedro: nº de vértices = 4 = nº de caras.

Nº de caras do cubo = 6 = nº de vértices do octaedro

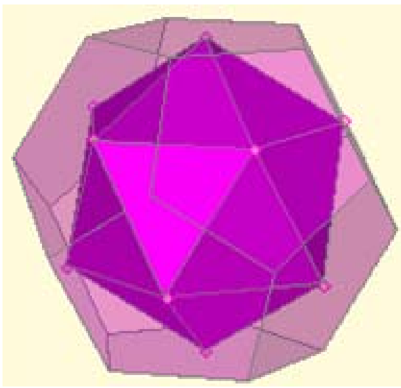
Nº de caras do octaedro = 8 = nº de vértices do cubo

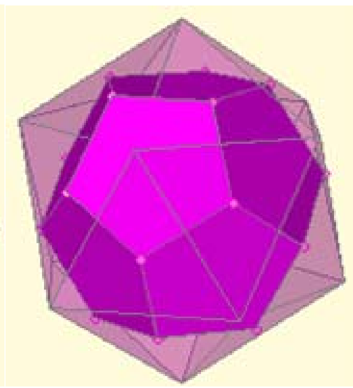
Nº de arestas do cubo = 12 = nº de arestas do octaedro.

Nº de caras do dodecaedro = 12 = nº de vértices do icosaedro

Nº de caras do icosaedro = 20 = nº de vértices do dodecaedro

Nº de arestas do dodecaedro = 30 = nº de arestas do icosaedro.



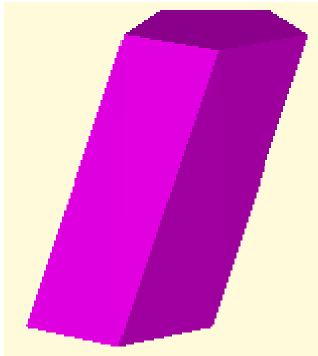


2. Outros poliedros

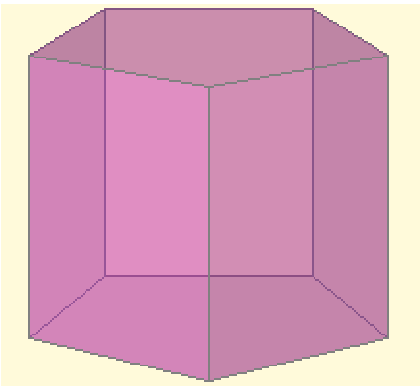
Prismas

Un **prisma** é un poliedro con dúas caras paralelas formadas por polígonos iguais cuxos lados únense mediante paralelogramos. As caras paralelas son as ***bases*** e os paralelogramos son os ***lados***.

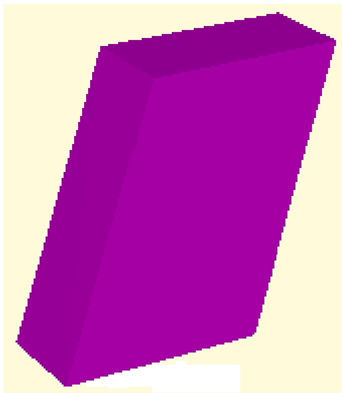
- Se os lados son rectángulos é un **prisma recto**, en caso contrario é un **prisma oblicuo.**
- Se as bases son paralelogramos é un **paralelepípedo** e si as bases e os lados son rectángulos é un **ortoedro.**
- Se as bases dun prisma recto son polígonos regulares dicimos que é un **prisma regular.**



Prisma oblicuo

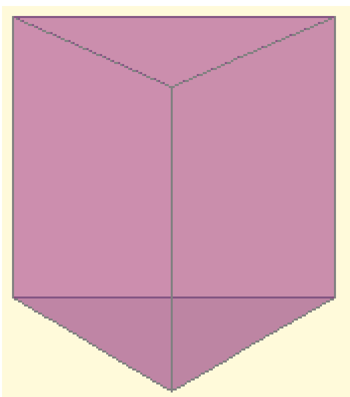


Prisma regular pentagonal

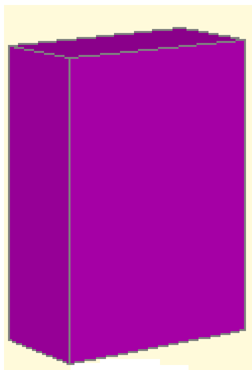


Prisma oblicuo

Paralelepípedo



Prisma regular triangular



Prisma recto

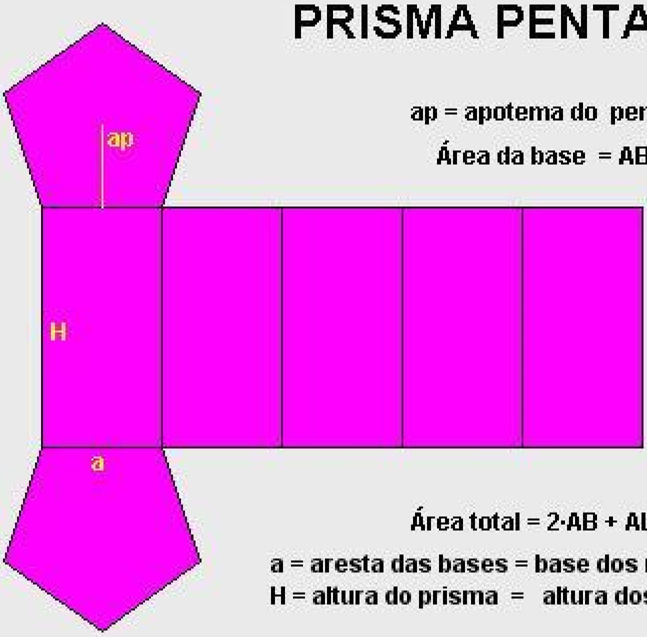
Ortoedro

Desenvolvementos, áreas e volumes de prismas regulares

Os prismas son corpos desenvolvibles. En particular, os prismas regulares teñen un desenvolvemento moi sinxelo, formado por tantos rectángulos iguais como lados teña e dous polígonos regulares que forman as bases. Isto facilita o cálculo das súas áreas e volumes.

1. Desenvolvemento e área dun prisma regular pentagonal:

PRISMA PENTAGONAL



ap = apotema do pentágono   p = perímetro = $5 \cdot a$

Área da base = AB = $\frac{p \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$

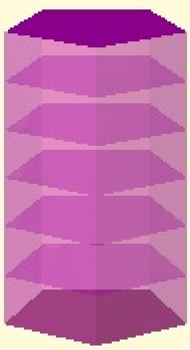
Área dun lado = $a \cdot H$

Área lateral = AL = $5 \cdot a \cdot H$

Área total = $2 \cdot AB + AL = 5 \cdot a \cdot ap + 5 \cdot a \cdot H = 5 \cdot a \cdot (ap + H)$

a = aresta das bases = base dos rectángulos laterais
H = altura do prisma = altura dos rectángulos laterais

2. Volume dun prisma pentagonal regular:



Observa o prisma da esquerda.

Podemos considerar que está formado por unha serie apilada de prismas do mesmo tipo cuxa altura é a unidade.

O volume de cada un destes pequenos prismas é igual á área da base, A, logo o volume do prisma grande será:

$$V = A \cdot H$$

sendo H a altura do prisma.

PRISMA PENTAGONAL

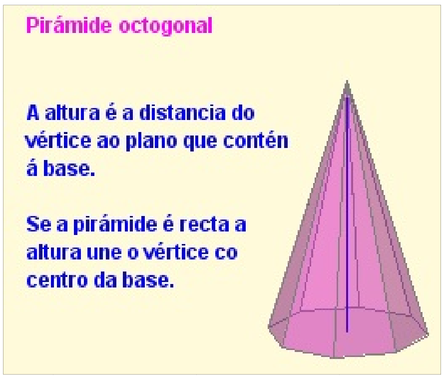
$$V = \frac{p \cdot ap}{2} \cdot H = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} \cdot H$$

Pirámides

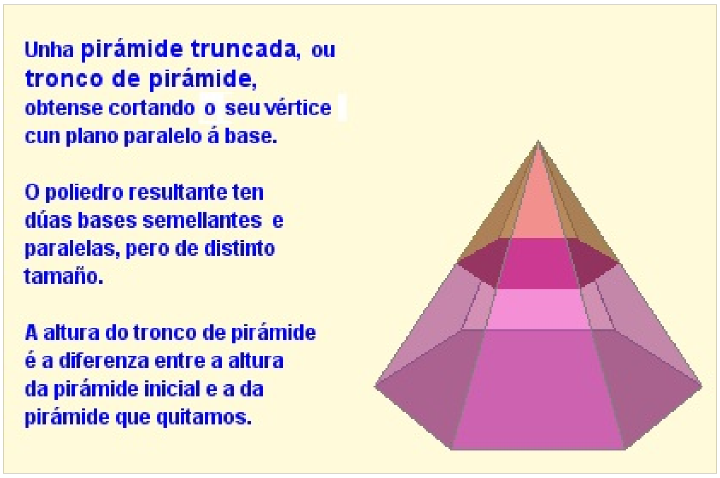
Unha **pirámide** é un poliedro cunha cara formada por un polígono calquera e sobre os seus lados levántanse triángulos que se unen nun punto común. O polígono é a ***base*** da pirámide, os triángulos son os ***lados*** e o punto común é o ***vértice***.

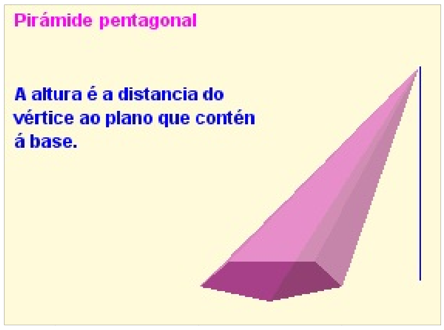
Se o vértice se proxecta verticalmente sobre o centro da base é unha **pirámide recta**, en no caso contrario é unha **pirámide oblicua**.

Se a base dunha pirámide recta é un polígono regular dicimos que é unha **pirámide regular**. Nese caso os lados son triángulos isósceles e todos iguais. *O tetraedro é un caso particular de pirámide*.



Pirámide octogonal recta



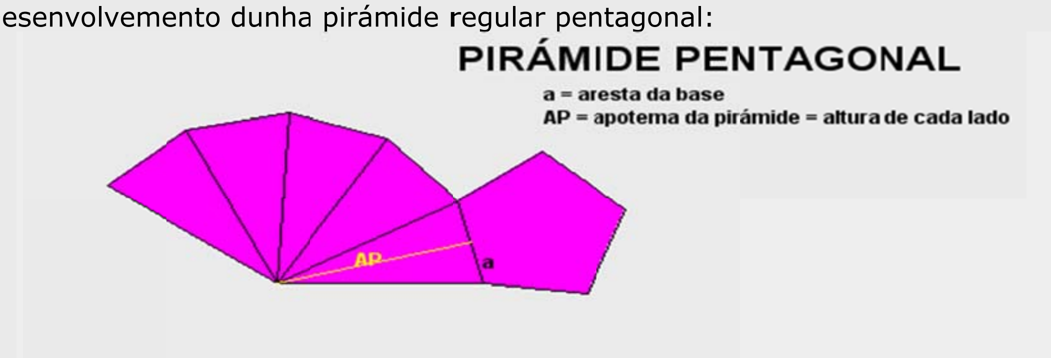


Pirámide pentagonal oblicua

Desenvolvementos, áreas e volúmes de pirámides regulares

As pirámides son corpos desenvolvibles. En particular, as pirámides regulares teñen un desenvolvemento moi sinxelo, formado por tantos triángulos isósceles iguais como lados teña e un polígono regular que forma a base. Ao igual que nos prismas isto facilita o cálculo das súas áreas e volumes.

3. Desenvolvemento dunha pirámide regular pentagonal:

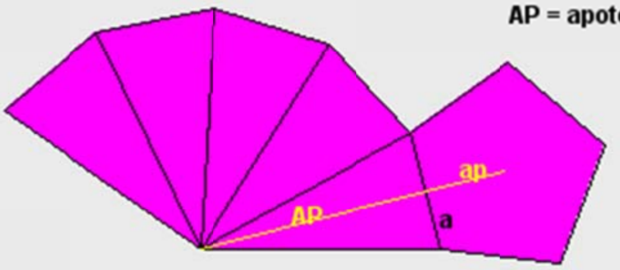


4. Área dunha pirámide regular pentagonal:

PIRÁMIDE PENTAGONAL

a = aresta da base

AP = apotema da pirámide = altura de cada lado

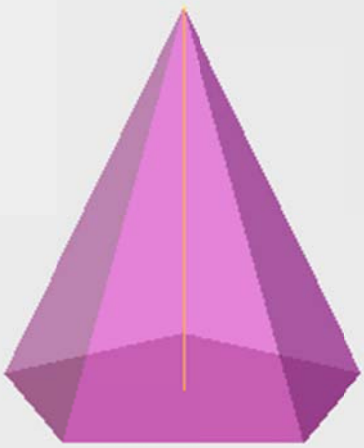


$$\text{Área da base} = AB = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$$

$$\text{Área dun lado} = \frac{a \cdot AP}{2} \qquad \text{ÁREA TOTAL} = AB + AL = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} + 5 \cdot \frac{a \cdot AP}{2} = \frac{5 \cdot a}{2} \cdot (ap + AP)$$

$$\text{Área lateral} = AL = 5 \cdot \frac{a \cdot AP}{2}$$

5. Volume dunha pirámide regular pentagonal:



O volume de calquer pirámide é sempre igual á terceira parte do volume dun prisma que teña a mesma base e a mesma altura, é dicir,

$$V = \frac{1}{3} AB \cdot H$$

sendo, AB a área da base e H a altura da pirámide

PIRÁMIDE PENTAGONAL

$$\text{Área da base} = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$$

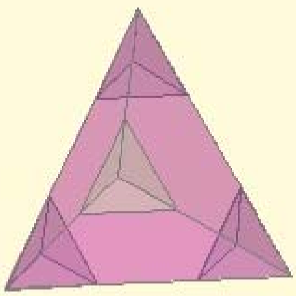
$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} \cdot H = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{6} \cdot H$$

Poliedros semirregulares

Un **poliedro semirregular** é un poliedro cuxas caras son polígonos regulares de dous ou máis tipos, de xeito que en cada vértice concorren os mesmos polígonos (en número e en tipo).

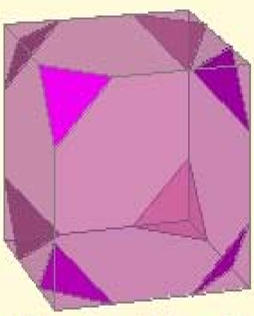
Pódense obter con certa facilidade poliedros semirregulares a partir dos poliedros regulares mediante a técnica do truncamento.

Truncar un poliedro consiste en suprimir un dos seus vértices mediante a aplicación dun corte plano.



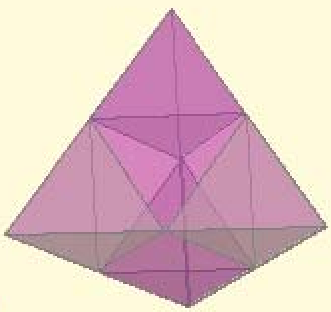
Tetraedro truncado

Poliedro semirregular con 4 hexágonos regulares e 4 triángulos equiláteros. En cada vértice conflúen 2 hexágonos e 1 triángulo.



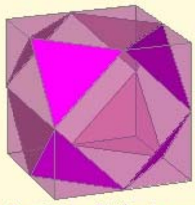
Cubo truncado

Poliedro semirregular con 8 triángulos equiláteros e 6 octógonos regulares. En cada vértice conflúen 2 octógonos e 1 triángulo.



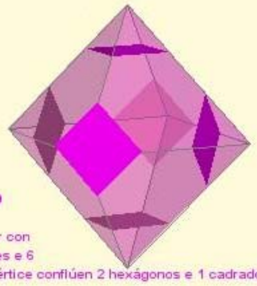
Tetraedro truncado

Octaedro regular.



Cubo truncado

Cuboctaedro. Formado por 6 cadrados e 8 triángulos equiláteros. En cada vértice conflúen 2 cadrados e 2 triángulos.



Octaedro truncado

Poliedro semirregular con 8 hexágonos regulares e 6 cadrados. En cada vértice conflúen 2 hexágonos e 1 cadrado.

Dodecaedro truncado

Poliedro semirregular con 12 pentágonos e 20 triángulos equiláteros. En cada vértice conflúen 2 pentágonos e 2 triángulos.

Dodecaedro truncado

Poliedro semirregular con 12 decágonos regulares e 20 triángulos equiláteros. En cada vértice conflúen 2 decágonos e 1 triángulo.

Dodecaedro truncado

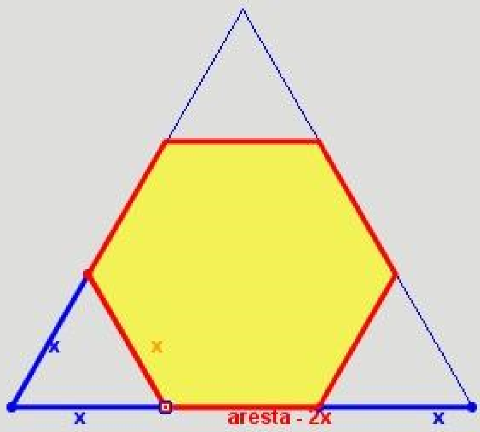
Poliedro semirregular con 12 pentágonos e 20 triángulos equiláteros. En cada vértice conflúen 2 pentágonos e 2 triángulos.

Icosaedro truncado

Poliedro semirregular con 12 pentágonos regulares e 20 hexágonos regulares. En cada vértice conflúen 2 hexágonos e 1 pentágono

EXERCICIOS resoltos

6. Determinar a lonxitude da aresta dun tetraedro, dun octaedro ou dun icosaedro que hai que truncar a partir dun vértice para obter un poliedro semirregular.



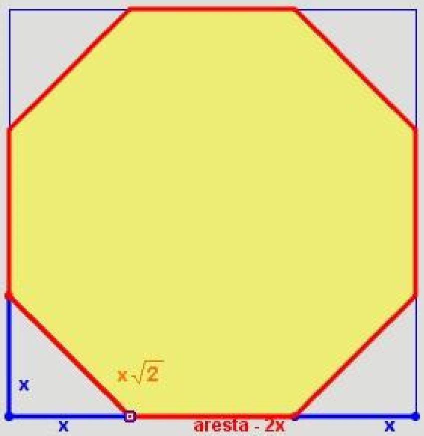
O triángulo adxunto representa unha cara dun tetraedro, octaedro ou icosaedro regular.
Movendo o punto vermello simúlase o truncamento dos vértices.

A figura resultante é un hexágono, que debe ser regular para que o poliedro que buscamos sexa semirregular.

Isto conséguese cando
$$x = \text{aresta} - 2x$$
ou sexa, cando
$$\text{aresta} = 3x$$

Logo o corte debe producirse a unha distancia do vértice dun terzo do total da aresta.

7. Determinar a lonxitude da aresta dun cubo que hai que truncar a partir dun vértice para obter un poliedro semirregular.



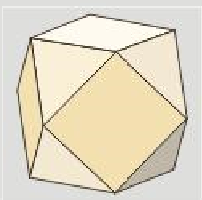
O cadrado adxunto representa unha cara dun cubo.
Movendo o punto vermello simuláse o truncamento dos vértices.

Ao truncar observamos que a figura resultante é un octógono, que debe ser regular para que o poliedro que buscamos sexa semirregular.

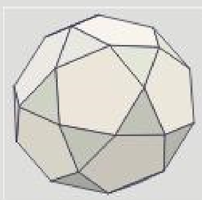
Isto conséguese cando
$$x\sqrt{2} = \text{aresta} - 2x$$
ou sexa, cando
$$x = \frac{\text{aresta}}{2+\sqrt{2}}$$

8. Analiza a dualidade de poliedros regulares cando se truncan pola metade da arista.

O cubo e o octaedro son duais.
En ambos os dous casos obtense un
CUBOCTAEDRO



O dodecaedro e o icosaedro son duais.
En ambos os dous casos obtense un
ICOSIDODECAEDRO

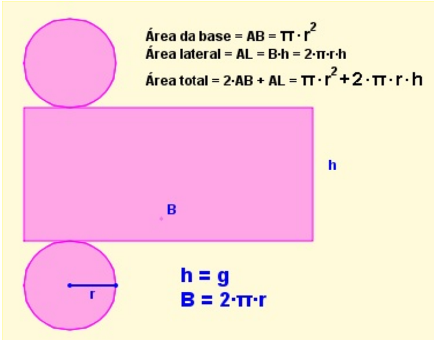


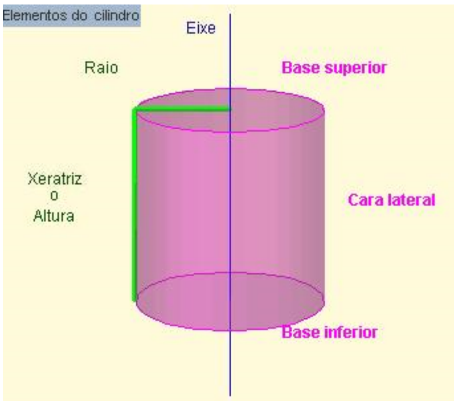
3. Corpos de revolución

Cilindros

Un **cilindro** é un corpo xerado por un segmento (***xeratriz***) ao xirar arredor dunha recta paralela ao mesmo (***eixe***). O cilindro é un corpo desenvolvible.

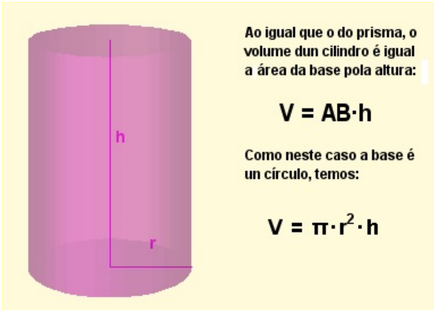
Un cilindro ten 3 caras: dúas delas son círculos paralelos e iguais (***bases***) e a outra é unha cara curva (***cara lateral***) que desenvolvida transfórmase nun rectángulo.





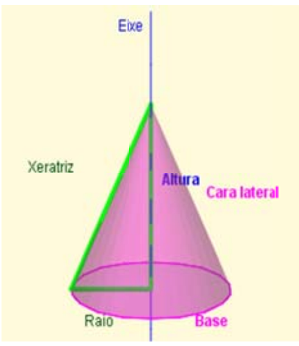
O ***raio*** do cilindro é o raio de calquera das súas bases e a ***altura*** do cilindro é a lonxitude da xeratriz.

A cara lateral desenvolvida é un rectángulo cuxa base é a lonxitude da circunferencia que rodea a base e cuxa altura é a xeratriz.



Conos

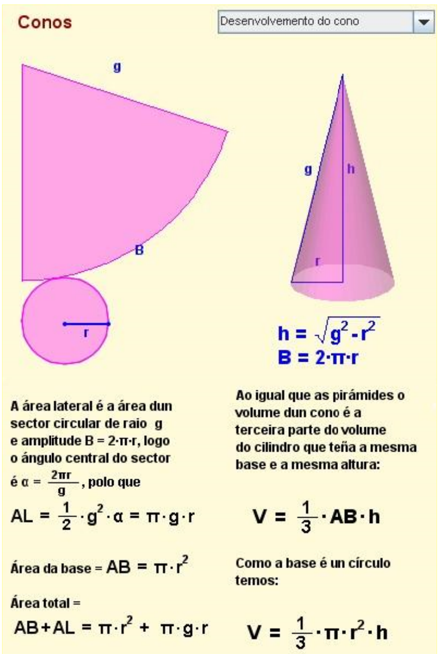
Un **cono** é un corpo xerado por un segmento (***xeratriz***) ao xirar arredor dunha recta sobre a que se apoia un dos seus extremos (***eixe***). O cono é un corpo desenvolvible.



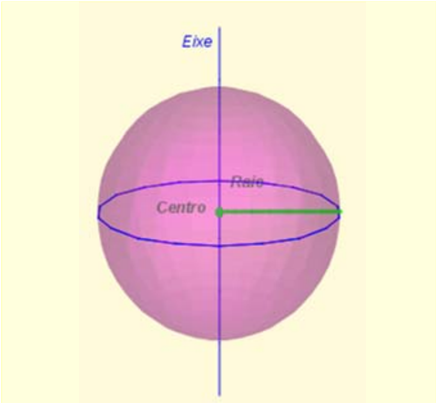
Un cono ten 2 caras: un círculo (***base***) e unha cara curva (***cara lateral***) que desenvolvida transfórmase nun sector circular.

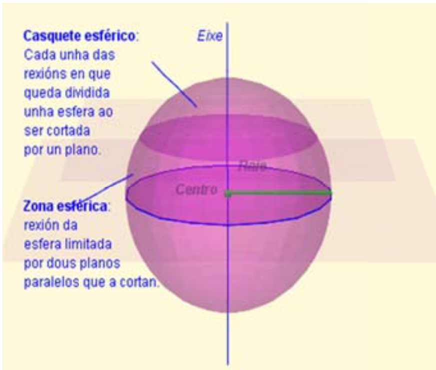
O punto de apoio da xeratriz sobre o eixe é o ***vértice*** do cono. O ***raio*** do cono é o raio da súa base e a ***altura*** do cono é a distancia do vértice ao centro da base.

A cara lateral desenvolvida é un sector circular cuxo raio é a xeratriz e cuxa amplitude é a lonxitude da circunferencia da base.



.





Esferas

Unha **esfera** é un corpo xerado por un círculo ao xirar arredor de calquera dos seus diámetros.

O ***raio*** dunha esfera é o mesmo que o raio do círculo que a xera e coincide coa distancia do centro da esfera a calquera dos puntos da súa superficie. Esta propiedade caracteriza á esfera: *a esfera é o conxunto de puntos do espazo que equidistan dun punto fixo, chamado centro*.

As esferas non son desenvolvibles. Por ese motivo a elaboración de mapas é un problema importante. Analizaremos este problema con máis detalle no último capítulo.

- **Área da esfera**

A área dunha esfera de raio r é igual á área lateral do cilindro que a circunscribe.

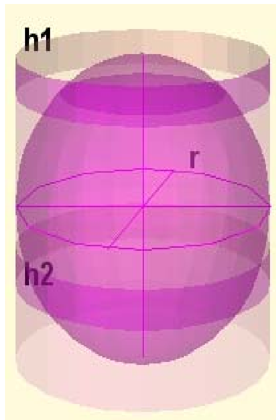
Como o raio dese cilindro tamén é r e a súa altura 2r, a área da esfera é:

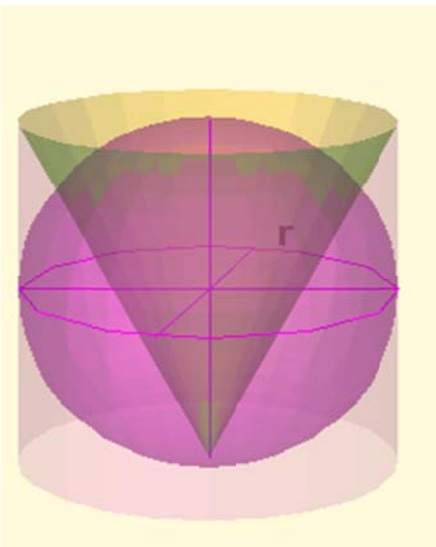
$$\mathbf{A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2r = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Ademais a área dun casquete esférico ou dunha zona esférica tamén é igual á área lateral do cilindro que a contén.

Área do casquete$=2\cdot\pi\cdot r\cdot h1$

Área da zona$=2\cdot\pi\cdot r\cdot h2$





- **Volume da esfera**

$$\mathbf{V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$

O volume do cilindro circunscrito é:

$$\mathbf{V_{CI} = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2 \cdot \pi \cdot r^3}$$

Polo tanto o volume da esfera equivale a os dous terzos do volume do cilindro circunscrito.

Como o volume dun cono do mesmo raio e altura é a terceira parte do volume do cilindro:

$$\mathbf{V_E + V_{CO} = V_{CI}}$$

A mesma relación vale para o volume dunha zona esférica:

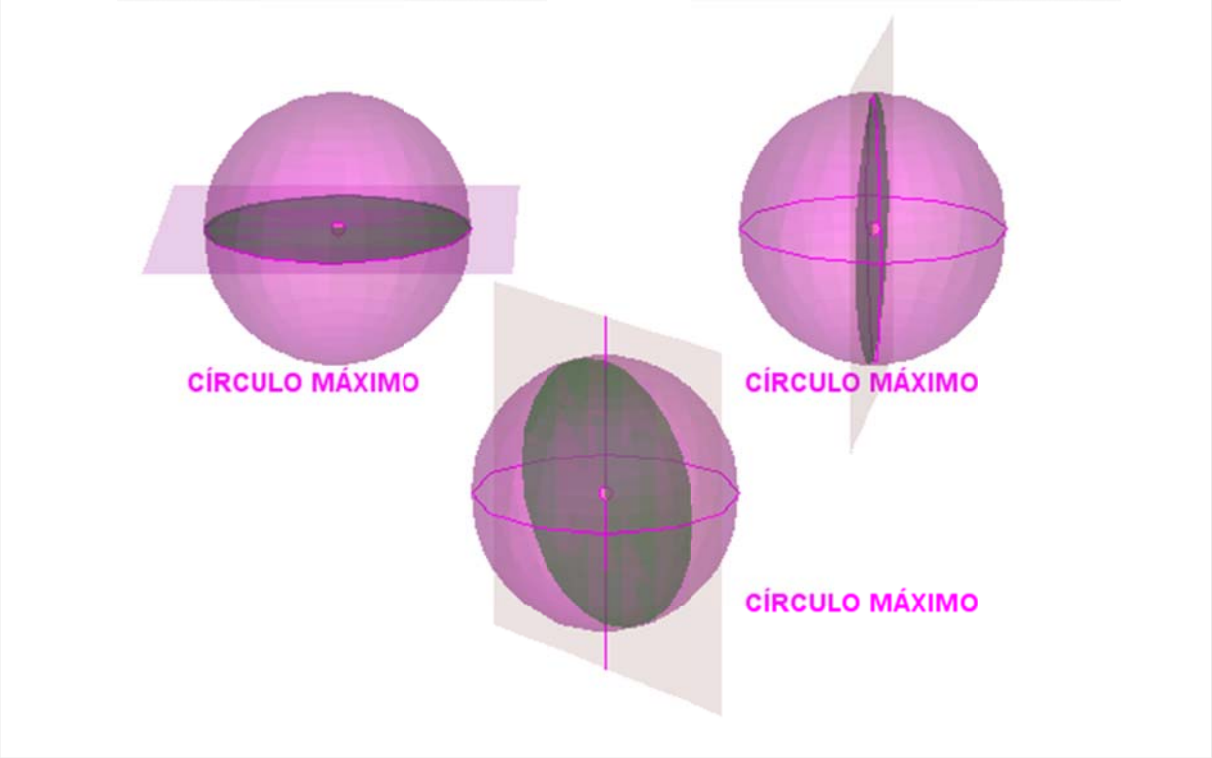
O volume dunha zona esférica é igual ao volume do cilindro que a rodea menos o volume do tronco de cono que queda no seu interior.

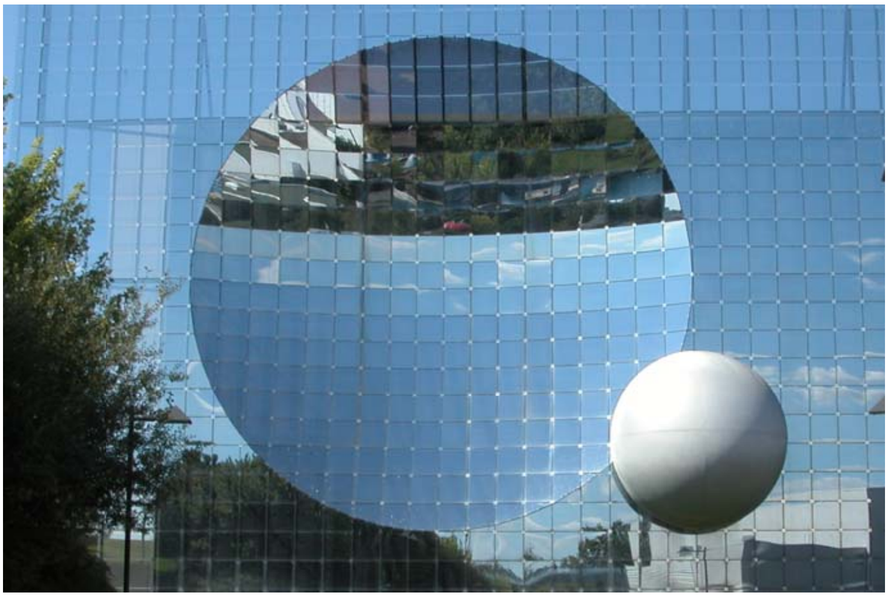
$$V_{ZE} = \pi \cdot r^2 \cdot h2 - V_{TCO}$$

Círculos na esfera

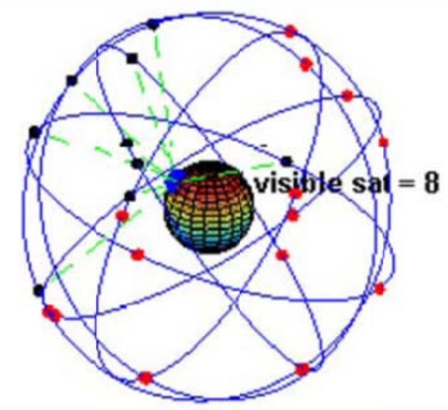
Cando un plano corta a unha esfera a intersección de ambas as dúas figuras produce sempre un círculo. Se ese círculo contén o centro da esfera dise que é un CÍRCULO MÁXIMO.

As circunferencias que limitan os círculos máximos teñen a propiedade de que son camiños máis curtos entre dous puntos calquera da superficie da esfera.





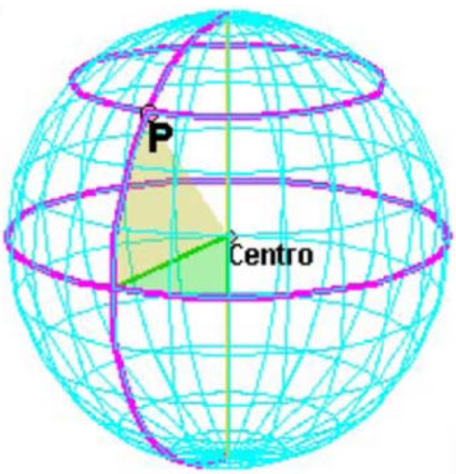
4. A esfera terrestre



Na imaxe podes ver unha representación do conxunto de satélites que utiliza o Sistema de Posicionamento Global (GPS) para localizar con precisión persoas, obxectos, vehículos.

A parella de números (lonxitude, latitude) forman o que se chama coordenadas xeográficas dun lugar.
Estas coordenadas determinan de forma precisa a posición sobre a Terra dunha poboación, un barco, un avión, un coche e incluso un teléfono móbil.

Polo norte



Polo sur

LONXITUDE: **30° O**
LATITUDE: **45° N**

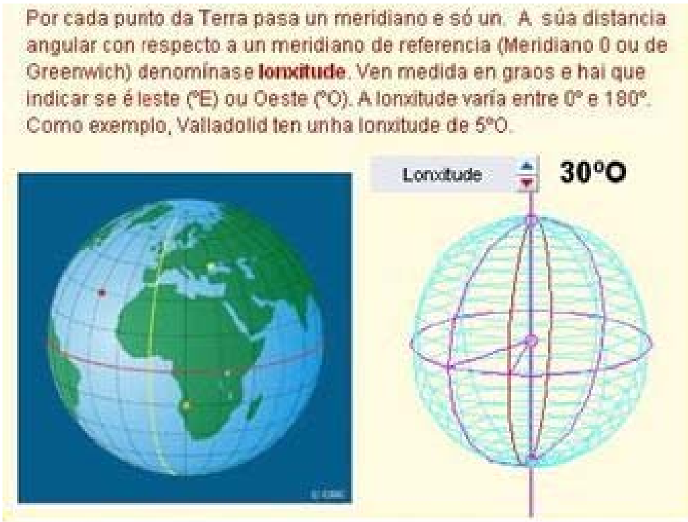
Coordenadas xeográficas

A Terra ten unha forma case esférica. Xira sobre unha liña chamada **eixe**. Os puntos nos que o eixe corta á superficie da Terra son os **polos xeográficos**.

Os planos que conteñen o eixe cortan á Terra en círculos máximos e os bordos destes son circunferencias chamadas **meridianos**.

O plano perpendicular ao eixe que pasa polo centro da Terra córtaa nun círculo máximo e o seu bordo é o **Ecuador**. Os planos paralelos ao plano do Ecuador cortan á Terra en círculos que xa non son máximos. Os seus bordos son os **paralelos**.

- **Lonxitude e Latitude**



EXERCICIOS resoltos

9. Aínda que agora se usa unha definición máis precisa, o metro é, aproximadamente, a *dezmillonésima parte do cuadrante dun meridiano calquera*. Isto significa que todos os círculos máximos sobre a Terra miden, aproximadamente, 40.000.000 de metros (en particular, todos os meridianos e o Ecuador). A partir deste dato calcula a lonxitude do raio da Terra, a súa superficie e o seu volume.

SOLUCIÓN:

40.000.000 m = 40.000 km. Como a lonxitude dunha circunferencia é $2\pi r$, temos que

$$r = \frac{40000}{2\pi} \approx 6366 \text{ km}$$

A área da súa superficie (usando a fórmula da área dunha esfera) é:

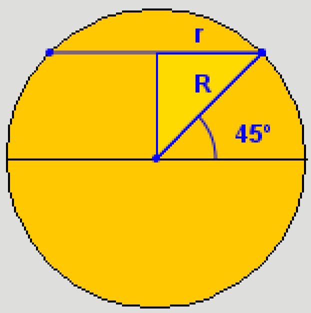
$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6366^2 \approx 509.000.000 \text{ km}^2$$

E o seu volume é:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 6366^3}{3} \approx 1{,}08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3 \approx \text{un billón de km}^3$$

10. Agás o Ecuador, os paralelos non son círculos máximos e calcular a súa lonxitude require do uso dunhas ferramentas que non verás ata o vindeiro curso. Con todo, nalgúns casos concretos e coa axuda do noso vello amigo, o Teorema de Pitágoras, podemos facelo. Calcula a lonxitude do paralelo de 45ºN.

SOLUCIÓN: R = raio da Terra = 6366 km



A horizontal superior representa o diámetro do paralelo 45ºN

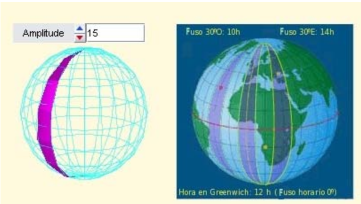
O complementario de 45º é 45º, logo o triángulo rectángulo da figura ten os dous catetos iguais e un deles é o raio do paralelo 45º:

$$r^2 + r^2 = R^2, \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{6366}{\sqrt{2}} \approx 4501 \text{ km}$$

A lonxitude do paralelo 45º é pois:

$$\text{lonx} = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4501 \approx 28281 \text{ km}$$

Un fuso esférico é a rexión da superficie da esfera limitada por dous círculos máximos.
No caso da Terra chamamos FUSO HORARIO a un fuso esférico limitado por dous meridianos.



Fusos horarios

Un **día** é o tempo que tarda a Terra en xirar sobre si mesma. Así, en calquera punto é ***mediodía*** cando o Sol pasa polo meridiano do lugar. Isto fai que incluso localidades próximas teñan horas distintas.

Para evitar este problema dividiuse a Terra en 24 zonas que teñen a mesma hora. Esas zonas establécense así: centrado no meridiano 0º fórmase un ***fuso esférico*** de 15º (360º:24h=15º). En todos os puntos deste fuso será mediodía cando o Sol pase polo meridiano 0º. A partir del, con xiros de 15º fórmanse os outros 23 **fusos horarios**. O Sol tarda unha hora en cruzar cada fuso.

EXERCICIOS resoltos

11. Temos unha esfera de 9 cm de raio. Calcula a superficie dun fuso esférico sobre esa esfera de 59º de amplitude.

SOLUCIÓN:

A superficie da esfera é $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 9^2 = 1017{,}88 \text{ cm}^2$

A superficie dun fuso esférico de 1º de amplitude é $\frac{A}{360}$

Polo tanto, a superficie do noso fuso é de $\frac{A}{360} \cdot 59 = 166{,}82 \text{ cm}^2$

12. A cidade A ten unha lonxitude de 123ºO e a cidade B de 23ºE. Calcula a hora que é na cidade B cando na cidade A son as 10 horas.

SOLUCIÓN:

Dividimos as lonxitudes pola amplitude dun fuso horario (15º). Se o resto é menor de 7º 30' o cociente é a diferenza de fusos horarios de cada cidade co meridiano 0º. Se o resto é maior entón hai que sumar unha unidade ao cociente:

$123^\circ = 15^\circ \cdot 8 + 3^\circ$ logo a cidade A está 8 husos horarios ao Oeste do merid. de Greenwich.

$23^\circ = 15^\circ \cdot 1 + 8^\circ$ logo a cidade B está 2 husos horarios ao Leste do merid. de Greenwich.

Polo tanto, a diferenza horaria entre A e B é de 10 horas,

logo en B son as 20 horas.

5. Mapas

Proxeccións da esfera sobre un plano

Un mapa é unha representación da esfera terrestre sobre un plano.

Como sabemos que a esfera non é una superficie desenvolvible chegamos á conclusión de que os mapas non poden ser máis que representacións aproximadas da realidade e nunca exactas.

Neste apartado imos analizar algunhas das técnicas empregadas para construir mapas. Todas elas consisten en proxectar os puntos da esfera sobre un plano e todas elas teñen vantaxes e inconvenientes.

Veremos en cada caso cales son estas vantaxes e inconvenientes e describiremos a súa construcción.

Na actualidade adóitanse empregar técnicas máis complexas para reducir no posible os inconvenientes. Estas técnicas adoitan mesturar varias das descritas aquí pero, a pesar de todo, non conseguen suprimir completamente os erros.

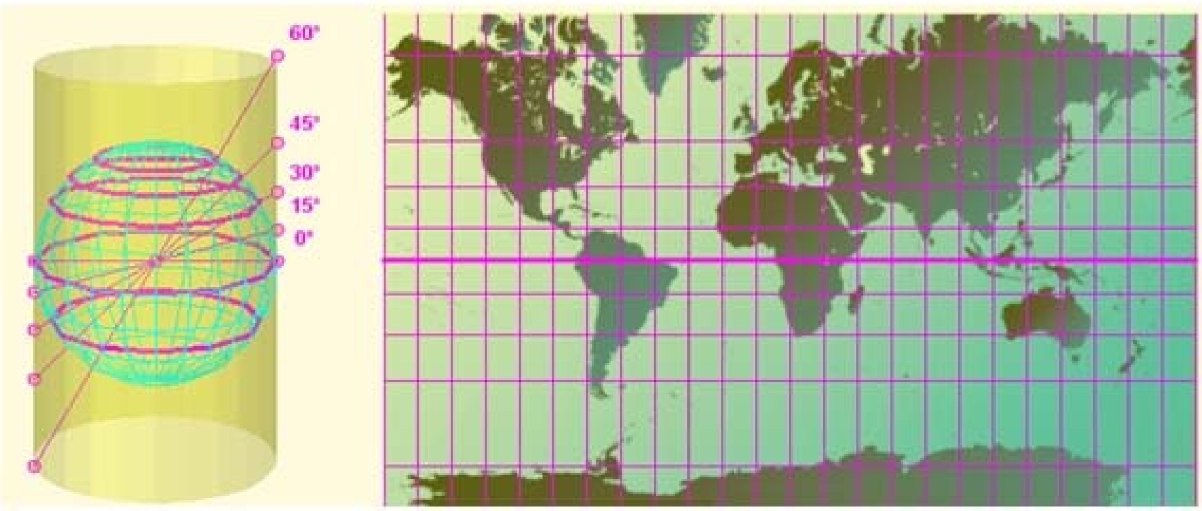
Proxección de Mercator

Proxección cilíndrica dende o centro da Terra, inventada por Gerardus Mercator en 1569.

Características: Os meridianos represéntanse mediante rectas verticais separados por distancias iguais. Os paralelos represéntanse mediante rectas horizontais máis separadas a medida que nos afastamos do Ecuador.

Vantaxes: Mantén a forma real dos continentes e facilita establecemento de rumbos constantes de navegación.

Inconvenientes: Diminúe a súa precisión a medida que nos afastamos do Ecuador, o que fai que a superficie dos países de Europa e América do Norte pareza moito maior do que é en realidade.



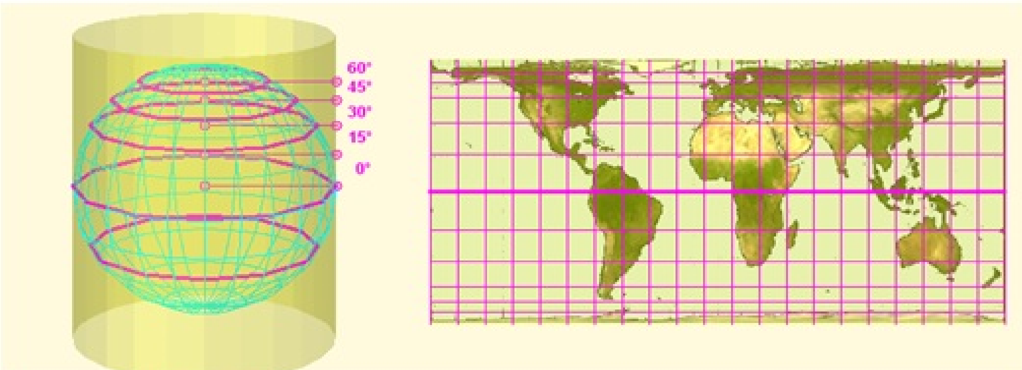
Proxección de Gall-Peters

Proxección cilíndrica dende o infinito.

Características: Os meridianos represéntanse mediante rectas verticais separados por distancias iguais. Os paralelos represéntanse mediante rectas horizontais máis xuntas a medida que nos afastamos do Ecuador.

Vantaxes: Este tipo de proxección conserva as áreas, é dicir, a superficie dos continentes tal como se ve no mapa é a correcta de acordo á escala do mapa.

Inconvenientes: A diferenza da proxección de Mercator, neste caso non se mantén a forma correcta dos continentes. Para manter as áreas, as zonas cercanas ao Ecuador vense máis estreitas e longas do habitual e as zonas cercanas aos polos vense máis anchas e achatadas.



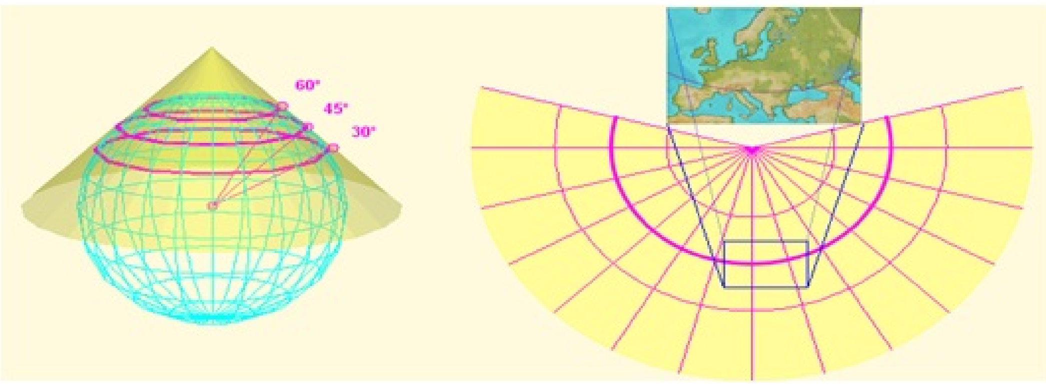
Proxección Cónica

Proxección sobre un cono tanxente á esfera ao longo dun paralelo.

Características: O mapa aparece no desenrolo do cono. Os meridianos represéntanse mediante xeratrices do cono separados por distancias angulares iguais. Os paralelos represéntanse mediante arcos de circunferencia perpendiculares aos meridianos.

Vantaxes: É moi axeitado para representar mapas zonais. É moi preciso cerca do paralelo de tanxencia.

Inconvenientes: Ao igual que nos casos anteriores as distorsións aumentan ao afastarnos do paralelo de tanxencia.



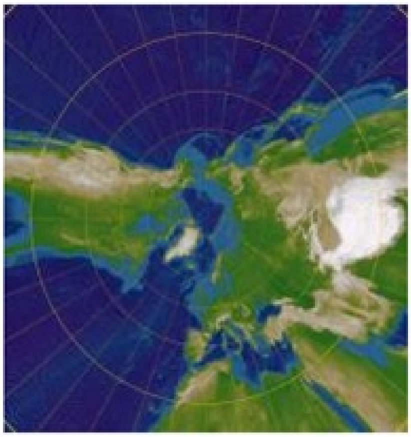
Proxección Azimutal

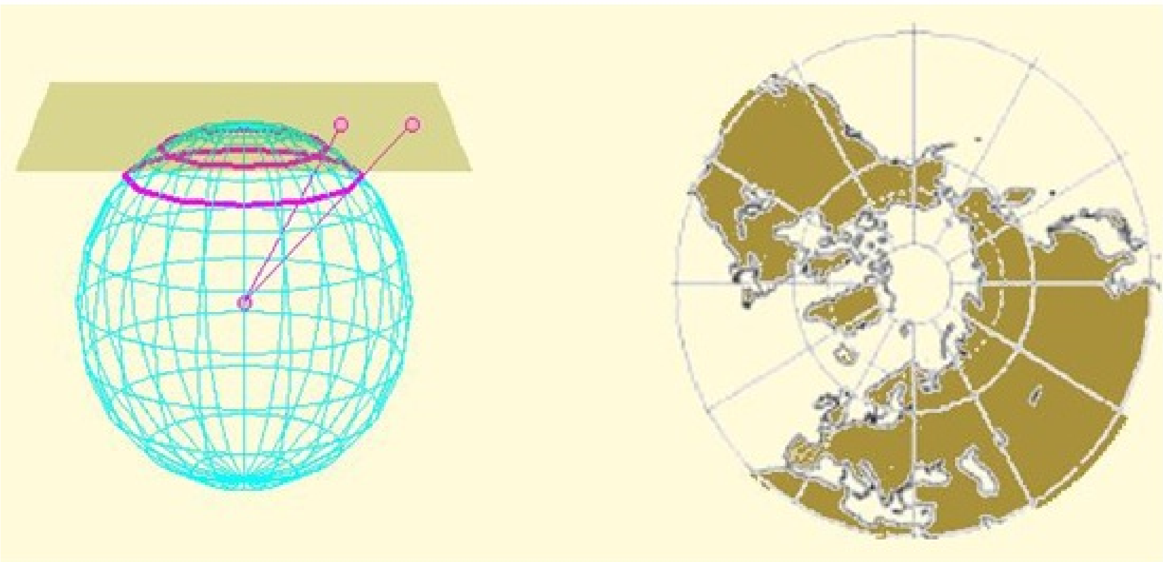
Proxección sobre un plano tanxente á esfera nun dos polos.

Características: O mapa é circular. Os meridianos represéntanse como raios do círculo separados por distancias angulares iguais. Os paralelos son circunferencias concéntricas máis separados a medida que nos afastamos do polo.

Ventajas: É moi axeitado para representar mapas polares. É mo preciso cerca do polo.

Inconvenientes: As distorsións aumentan ao afastarnos do polo.





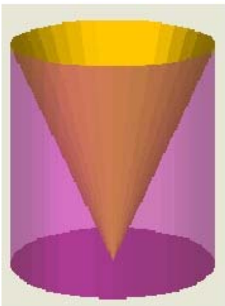
Para practicar

1. Calcula a área total do tetraedro truncado sabendo que a súa aresta mide 12 cm.

2. Calcula a área total dun prisma recto sabendo que as súas bases son rombos de diagonais D=26cm e d=14cm e a súa altura de h=26cm.

3. Calcula a área lateral dun madeiro de pirámide cuadrangular regular sabendo que o lado da base maior é B=26cm. O lado da base menor é b=14cm e a aresta lateral é a=13cm.

4. Calcula a área total do recipiente da figura esquerda sabendo que o raio da base é r=7cm e a altura é h=13cm.

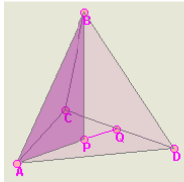


5. Cantos litros de pintura se necesitan para pintar a parede exterior dun observatorio astronómico (figura arriba dereita) sabendo que ten un raio de 5 m, que a altura do cilindro é de 9 m e que con cada litro se poden pintar 10 metros cadrados?

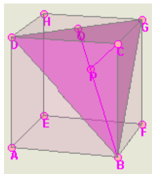
6. Unha bóla de nadal de 3 cm de raio quérese cubrir parcialmente con pan de ouro de forma que a franxa cuberta teña unha amplitude de 60º dende o centro da bóla. Calcula a superficie da bóla que se pintará.

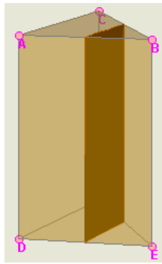
7. Calcula o volume do tetraedro regular da figura sabendo que a súa aresta AB=10cm.

(O triángulo APB axudarache).



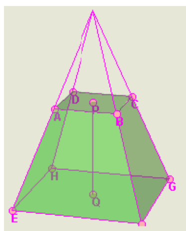
8. O cubo da figura ten 10 cm de aresta. Calcula o volume do tetraedro de vértices BCDG e comproba que é a sexta parte do volume do cubo.

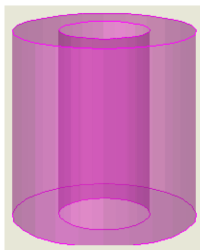




9. Calcula o volume dos dous prismas en que queda dividido o prisma regular triangular da figura ao ser cortado por un plano perpendicular ás bases que pasa polos puntos medios das arestas. AD=20m e AC=15m.

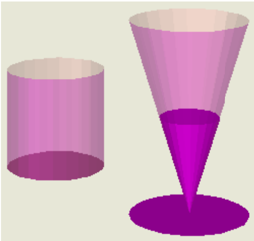
10. Calcula o volume dun tronco de pirámide cuadrangular sabendo que a aresta da base maior é EF=20cm, a aresta da base menor é AB=8cm e a altura do tronco é PQ=15cm.



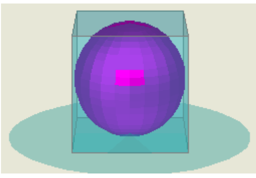


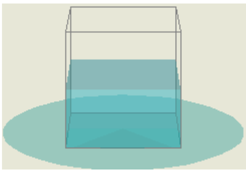
11. Calcula o volume da peza de arriba sabendo que o diámetro da circunferencia exterior é de 10 cm, o diámetro da circunferencia interior é de 5 cm e a altura é de 10 cm.

12. As figuras representan un vaso cilíndrico de 6 cm de diámetro e 8 cm de altura e unha copa con forma de tronco de cono con 7 cm de diámetro maior, 5 cm de diámetro menor e 8 cm de xeratriz. Cal ten máis capacidade?

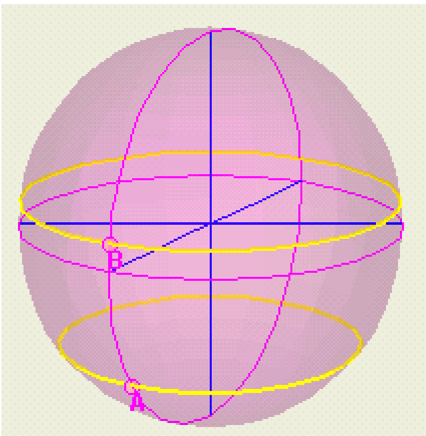


13. Un recipiente cúbico de 10 cm de aresta está cheo de auga. Introdúcese nel con coidado unha bóla de cristal de 5 cm de raio e logo sácase con coidado. Calcula o volume da auga que se derramou e a altura á que queda a auga cando se saca a bóla.

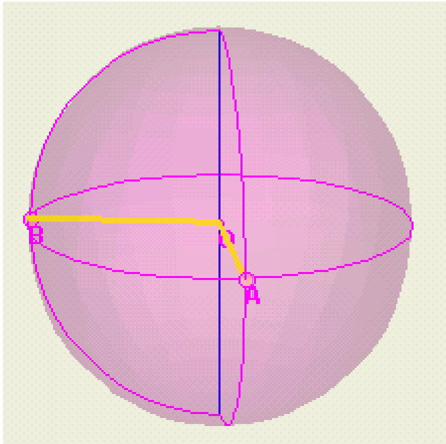




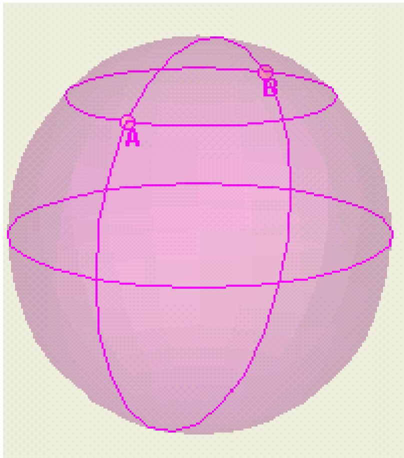
14. Calcula a distancia entre dous puntos da Terra, A e B, situados no mesmo meridiano, se a Latitude de A é de 38º 5' S e a de B é de 7º 28′ N.



15. O punto A encóntrase no meridiano 7º e o punto B no meridiano 94º. Se en A son as 23 horas, que hora é en B?



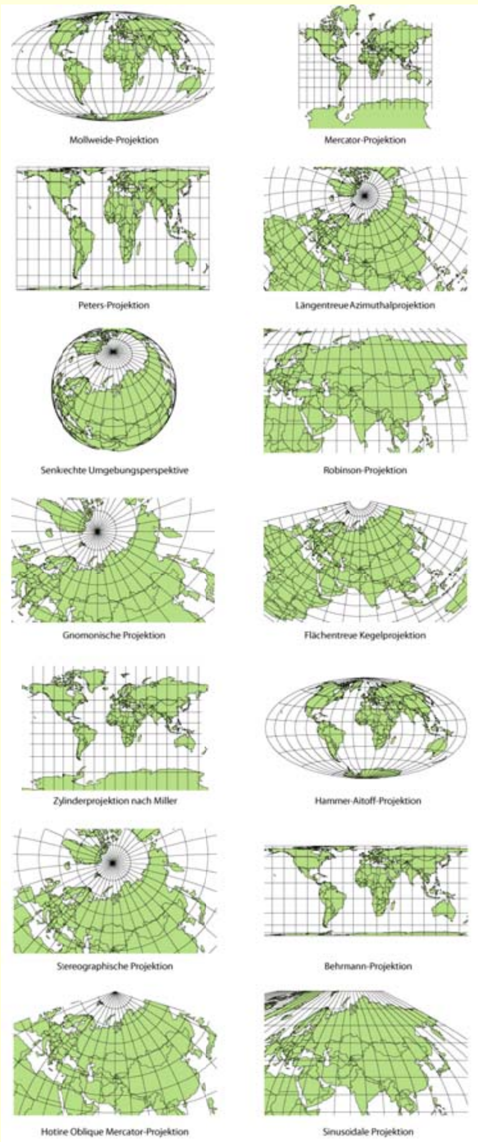
16. Os puntos A e B encóntranse sobre o paralelo 45ºN e as súas Lonxitudes diferéncianse en 180º. Un avión ten que ir dende A ata B que ruta é máis curta: seguindo o paralelo ou seguindo o meridiano polo Polo Norte?



Para saber máis

Outros tipos de mapa

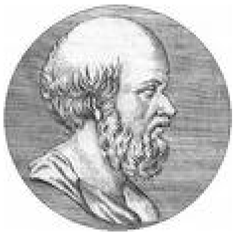
Como vimos hai diferentes tipos de mapas baseados en proxeccións distintas da esfera sobre diferentes tipos de superficie. Aquí mostrámosche algúns outros tipos:



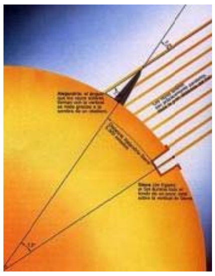
A medida da Terra

O tamaño aproximado do noso planeta coñécese dende antigo.

No século III a C. Eratóstenes calculou o raio da Terra cunha precisión moi boa.



Sabía que as cidades exipcias de Siena e Alexandría estaban no mesmo meridiano e que o día do solsticio de verán a luz do Sol chegaba ao fondo dun pozo en Siena e, o mesmo día, en Alexandría os obeliscos proxectaban sombra cun ángulo de 7º.



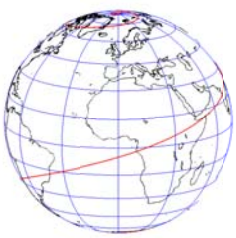
No debuxo podes ver que o ángulo da sombra coincide coa diferenza de Latitude entre as dúas cidades.

Eratóstenes contratou un home para que medise a distancia entre ambas as dúas cidades que resultou ser duns 800 km.

Se 7º de meridiano teñen unha Lonxitude de 800 km, o meridiano enteiro de 360º medirá 800/7.360 =41143 km, de onde o raio da Terra será:

$$R = 41143/(2\pi) = 6548 \text{ km.}$$

Unha excelente aproximación para a época! O raio medio real é duns 6400 km.



Xeodésicas e loxodromías.

Unha **xeodésica** é unha liña que une dous puntos dunha superficie polo camiño máis curto. Sobre a Terra as xeodésicas son os círculos máximos. Unha **loxodromía** é unha traxectoria sobre a Terra que corta a todos os meridianos cun ángulo constante. Son moi usadas na navegación aérea e marítima. Na imaxe podes ver unha loxodromía de 72º.

Lembra o máis importante

Poliedros

Regulares: as súas caras son polígonos regulares iguais e en cada vértice concorre o mesmo nº de caras.
Semirregulares: as caras son polígonos regulares de tipos diferentes e co mesmo nº e tipo de caras en cada vértice.
Prismas: as bases son polígonos regulares iguais e os lados son paralelogramos.
Pirámides: a base é un polígono regular e os lados son triángulos concorrentes nun vértice común.
Todos son desenvolvibles.

Corpos de revolución

Cilindro: xerado por un rectángulo ao xirar sobre un dos seus lados.
Cono: xerado por un triángulo rectángulo ao xirar sobre un dos seus catetos.
O cilindro e o cono son desenvolvibles.
Esfera: xerada por unha circunferencia ao xirar sobre un dos seus diámetros.
A esfera non é desenvolvible.

Áreas e volumes

	A. lat.	A. total	Volume
Prismas	$p\cdot h$	$B+p\cdot h$	$B\cdot h$
Pirámides	$(p\cdot a)/2$	$B+(pa)/2$	$(B\cdot h)/3$
Cilindros	$2\pi rh$	$2\pi r^2+2\pi rh$	πr^2h
Conos	πgr	$\pi r^2+\pi gr$	$(\pi r^2h)/3$
Esferas		$4\pi R^2$	$(4\pi R^3)/3$

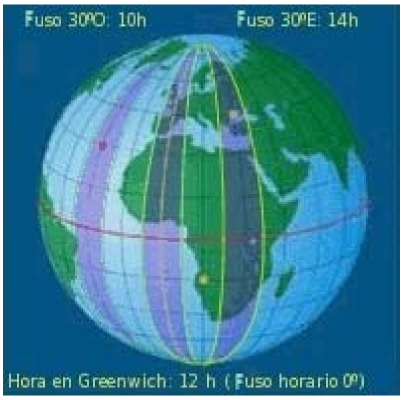
p = perímetro da base,
B = área da base,
h = altura, a = apotema (pirámide),
r = raio da base (conos e cilindros),
R = raio (esfera), g = xeratriz (cono)

Poliedros:

A área dun poliedro é sempre igual á suma das áreas dos polígonos que forman as súas caras. O volume calcúlase descompoñendo o poliedro en prismas e/ou pirámides e sumando os seus volumes.

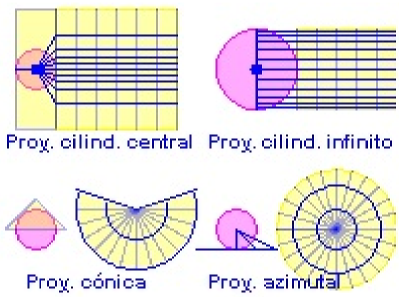
A esfera terrestre

Meridianos: círculos máximos que pasan polos polos. Numéranse de 0º a 180º Leste e Oeste a partir do ***Meridiano de Greenwich***. O meridiano dun lugar é a súa **Lonxitude**.
Paralelos: círculos perpendiculares ao eixe da Terra. Numéranse de 0º a 90º Norte e Sur a partir do ***Ecuador***. O paralelo dun lugar é a súa **Latitude**.
Fusos horarios: a Terra divídese en 24 fusos xeográficos de 15º de amplitude cunha hora de diferenza entre eles.



Mapas

Un mapa é unha representación da esfera terrestre sobre un plano, obtida mediante algunha forma de proxección. As máis habituais son as seguintes:



Autoavaliación

1. Indica que poliedro se obtén ao truncar as arestas dun dodecaedro pola metade e indica o número de caras, arestas e vértices que ten.

2. Os catetos dun triángulo rectángulo miden 12 cm e 16 cm. Pescuda que cono ten maior área total: o que se obtén facendo xirar o triángulo arredor do primeiro cateto ou o que se obtén ao xirar sobre o segundo.

3. Calcula a área total do poliedro semirregular da imaxe sabendo que a súa aresta é a. (Expresa o resultado en función de a)

4. Calcula a área do triángulo da figura sabendo que a aresta do cubo é a. (Expresa o resultado en función de a)

5. A "zona tropical" da Terra está situada, aproximadamente, entre os paralelos 30º N e 30º S. Que porcentaxe da superficie da Terra está situada na zona tropical?

6. Unha pirámide de base cadrada córtase cun plano paralelo á base pola metade da altura da pirámide, obtendo unha pirámide máis pequena e un tronco de pirámide. Cantas veces é máis grande o volume do tronco con respecto ao volume da pirámide pequena?

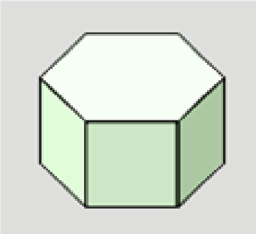
7. Córtase unha semiesfera de raio R cun plano paralelo á base da semiesfera, a unha altura de 2/3 do raio. Acha o volume da maior das dúas zonas en que queda dividida. (Expresa o resultado en función de R)

8. Unha milla náutica é a distancia entre dous puntos situados sobre o Ecuador cunha diferenza de Lonxitudes de 1'. A cantos km equivale unha milla náutica se o raio da Terra é de 6366 km?

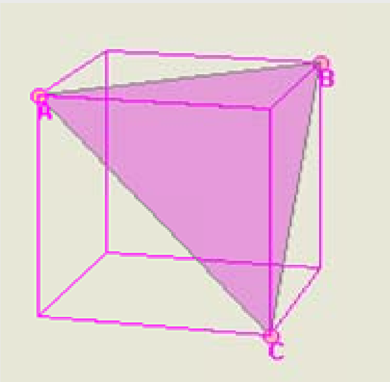
9. Boston está no meridiano 71º O e Frankfurt no meridiano 9º E. Un avión sae de Frankfurt ás 23 horas e tarda 8 horas en chegar a Boston. Que hora é en Boston cando chega?

10. Asocia os distintos tipos de mapa coas súas características.

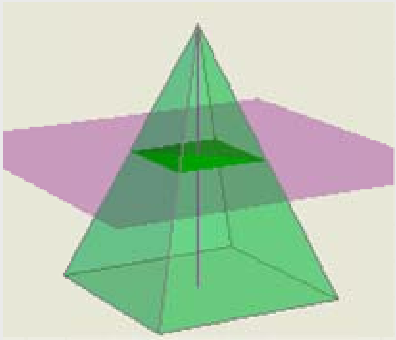
3



4



6



10

a) Mapa de Mercator
1) Os paralelos son círculos e os meridianos raios.

b) Mapa de Gall-Peters
2) Os meridianos e paralelos son rectas perpendiculares e os paralelos están máis separados canto máis lonxe do Ecuador.

c) Mapa azimutal
3) O paralelos son arcos de circunferencia e os meridianos son rectas converxentes.

d) Mapa cónico
4) O meridianos e paralelos son rectas perpendiculares e os paralelos están máis xuntos canto máis lonxe do Ecuador.

Solucións dos exercicios para practicar

1. 1745,9 cm^2
2. 1899,54 cm^2
3. 922,6 cm^2
4. 1050,4 cm^2
5. 43,98 litros
6. 56,54 cm^2
7. 117,85 cm^3
8. 500/3 cm^3
9. O pequeno 162,37 m^3 e o grande 487,13 cm^3.
10. 3120 cm^3.
11. 589,04 cm^3
12. A copa ten un volume de 226,49 cm^3 e o vaso de 226,19 cm^3. Teñen practicamente a mesma capacidade.
13. Derramáronse 523, 59 cm^3 de auga. A altura final da auga é de 4,76 cm
14. 5061 km.
15. En B son as 17 horas.
16. Polo meridiano son 10.000 km e polo paralelo son 14.172 km.

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. É un icosidodecaedro con 32 caras, 60 arestas e 30 vértices.
2. O que xira sobre o primeiro: 576π cm^2 fronte a 384π cm^2.
3. $6a^2 + 3a^2\sqrt{3}$
4. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
5. 50%
6. O tronco é 7 veces maior que a pirámide pequena.
7. $\frac{46\pi R^3}{81}$
8. 1,85 km
9. É a 1 da madrugada do día seguinte.
10. a2, b4, c1, d3