

6**Figuras planas, propiedades métricas****Contenidos**

1. Ángulos en la circunferencia
Ángulo central y ángulo inscrito
2. Semejanza
Figuras semejantes
Semejanza de triángulos, criterios
3. Triángulos rectángulos
Teorema de Pitágoras
4. Lugares geométricos
Definición y ejemplos
5. Áreas de figuras planas

Objetivos

- Reconocer los ángulos importantes en una circunferencia y sus relaciones.
- Averiguar cuándo dos triángulos son semejantes.
- Utilizar el teorema de Pitágoras para resolver algunos problemas.
- Identificar la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo como conjuntos de puntos.
- Calcular el área de recintos limitados por líneas rectas y por líneas curvas.



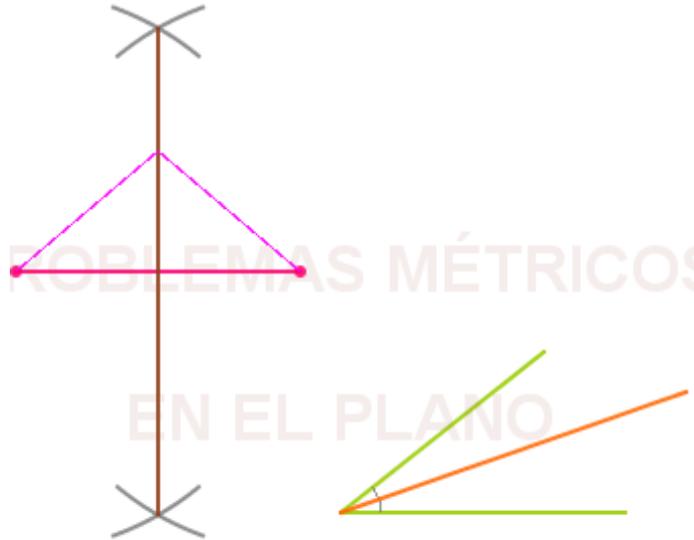
Antes de empezar

Observa en la escena que van apareciendo algunas figuras geométricas. En este tema trabajaremos con esas figuras y estudiaremos sus propiedades.

¿Qué figuras reconoces en esa escena?

En estas dos figuras de la derecha aparecen dos construcciones que habrás estudiado en cursos anteriores.

¿Sabrías a que corresponde cada una de ellas?



Pulsa en



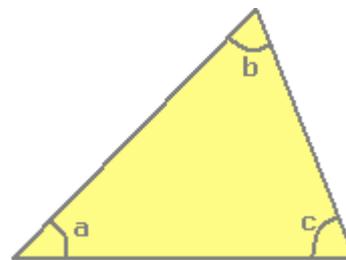
Para RECORDAR una propiedad importante de los triángulos.

PROPIEDAD

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a _____

Pulsa  para ver la demostración

Completa el dibujo y la demostración



Cuando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

1. Ángulos en la circunferencia

1.a. Ángulo central y ángulo inscrito

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

En la circunferencia de la escena de la derecha:

¿Dónde tiene su vértice el ángulo α ?

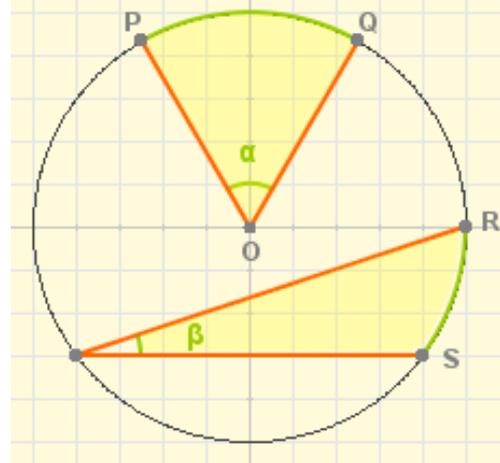
¿Cómo se llama ese ángulo?

¿A qué arco corresponde su medida? _____

¿Dónde tiene su vértice el ángulo β ?

¿Cómo se llama ese ángulo?

¿A qué arco corresponde su medida? _____



En la escena pulsa

Aparece un círculo y en él un **ángulo central** y un **ángulo inscrito** que comparten un mismo arco de circunferencia RS.

Mueve el punto R hasta un punto cualquiera.

¿Qué relación hay entre las medidas del ángulo central y del inscrito?

Pulsa nuevamente

Ahora mueve el punto P y fíjate en la medida del ángulo inscrito.

¿Cambia el valor del ángulo inscrito al cambiar el vértice de posición? _____

Es decir, **ángulos inscritos que abarcan el mismo arco de circunferencia son** _____

Pulsa nuevamente

Ahora sitúa el punto R en $x=-5, y=0$

¿Cuánto mide ahora el ángulo central? _____ ¿y el inscrito? _____

Escribe la propiedad que relaciona las medidas de un ángulo central y de un ángulo inscrito que abarcan un mismo arco de circunferencia:

Después... Pulsa en para hacer ejercicios.

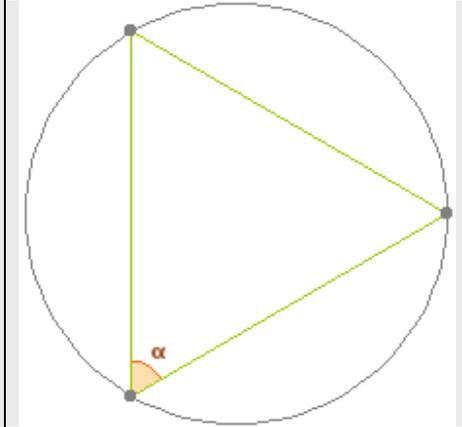
Se abre una ventana en la que aparecerán 3 escenas con ejercicios que debes resolver en los cuadros de la página siguiente.

Pulsa: Comenzar

EJERCICIOS

1. Calcula el valor del ángulo α o de los ángulos marcados en cada caso.

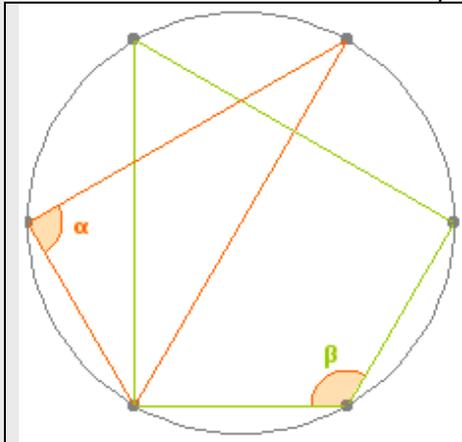
Circunferencia dividida en tres partes iguales



Operaciones

Valor de $\alpha =$

Circunferencia dividida en seis partes iguales

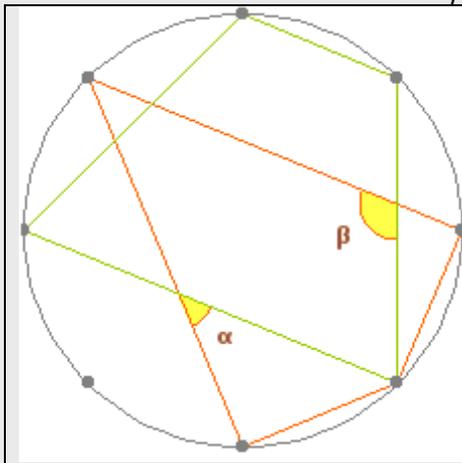


Operaciones

Valor de $\alpha =$

Valor de $\beta =$

Circunferencia dividida en ocho partes iguales



Operaciones

Valor de $\alpha =$

Valor de $\beta =$

Cuando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

2. Semejanza

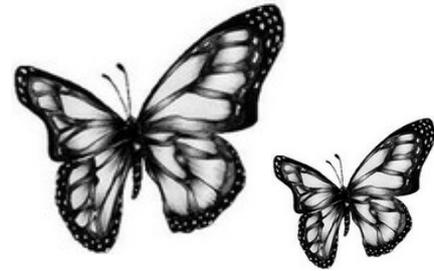
2.a. Figuras semejantes

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

Observa a la derecha, en la escena de pantalla, algunas parejas de **figuras semejantes**.

¿Qué es lo que tienen en común? _____

¿Qué es lo que tienen diferente? _____



Completa:

Dos figuras planas se consideran **semejantes** si existe _____
 _____, llamada _____,
 entre sus _____ homólogos y además sus _____
 homólogos son _____.

Pulsa la flecha de avanzar en la escena de la derecha

En las siguientes escenas verás la explicación del TEOREMA DE THALES. En la primera aparece su enunciado de este teorema.

Si quieres detener la escena, pulsa el botón secundario del ratón y aparecerá un recuadro que en su parte inferior tiene los botones de retroceso y pausa/avance:

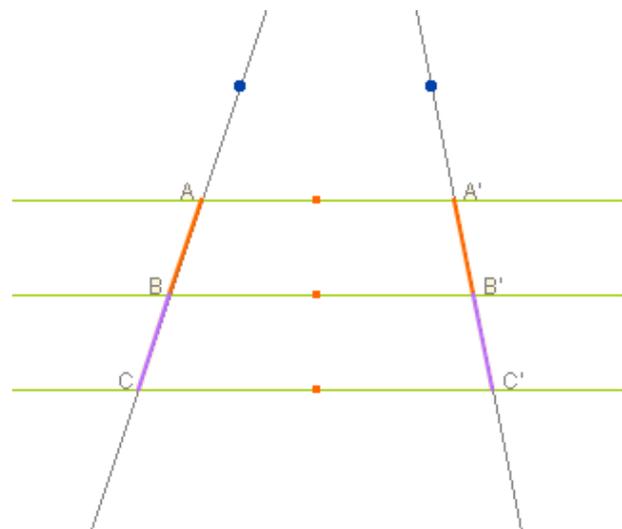
Enunciado del Teorema de Thales

Pulsando Continuar

Irá apareciendo una figura formada por tres rectas paralelas (que puedes mover arrastrando el punto naranja) y dos rectas que las cortan (que también puedes mover utilizando los puntos azules).

Anota aquí las medidas de los segmentos que se indican y los cocientes entre esos segmentos:

$\overline{AB} =$	$\overline{A'B'} =$	$\overline{AB} =$	$\overline{A'B'} =$
$\overline{BC} =$	$\overline{B'C'} =$	$\overline{AC} =$	$\overline{A'C'} =$
$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} =$	$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} =$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} =$	$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} =$



¿Qué relaciones observas?

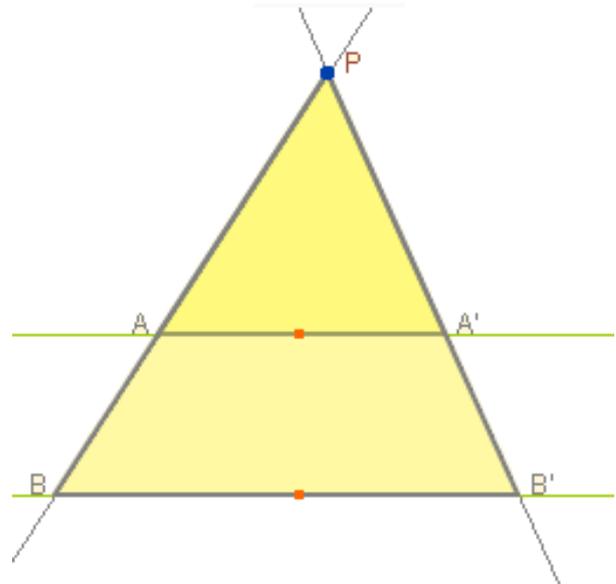
Pulsa Continuar 

Haz lo que se indica:

Une los puntos azules para construir dos triángulos PAB y PA'B'. ¿En que posición se dice que están?

Mueve en la escena el punto P y en cualquier posición toma nota de las siguientes medidas:

$$\begin{array}{l} \overline{PA} = \quad \quad \quad \overline{PB} = \quad \quad \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \\ \overline{PA'} = \quad \quad \quad \overline{PB'} = \quad \quad \quad \frac{\overline{PB'}}{\overline{PA'}} = \\ \overline{AA'} = \quad \quad \quad \overline{BB'} = \quad \quad \quad \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = \end{array}$$



Pulsa Continuar 

Aparecen dos **figuras semejantes**.

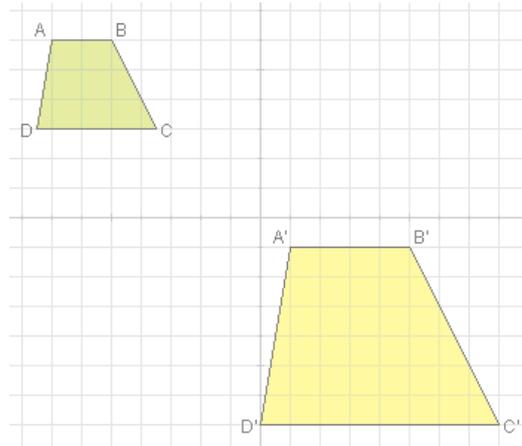
Observa la escena detenidamente.

¿Cómo son entre sí los ángulos homólogos?

A A' B B' C C' D D'

Los cuatro pares de lados guardan la misma

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{D'C'}}$$



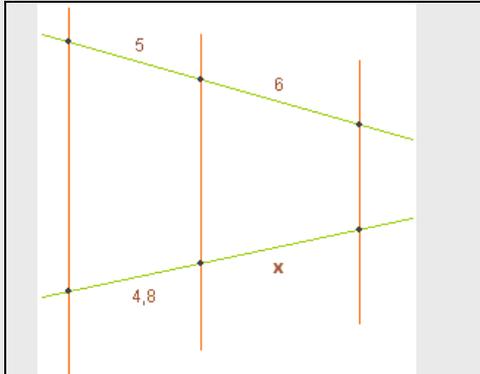
Pulsa en 

para hacer ejercicios. Aparecerán los mismos de los siguientes recuadros:

EJERCICIOS

2. a) Calcula el valor de "x" utilizando el teorema de Tales.

1



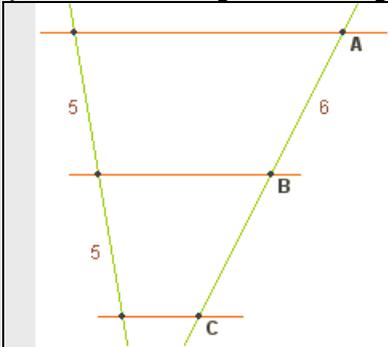
Operaciones

Valor de x =

EJERCICIOS

2. b) Calcula la longitud del segmento BC.

2

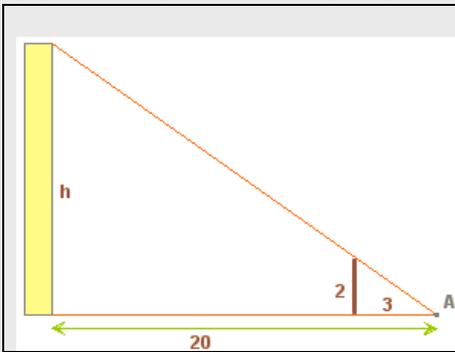


Operaciones

Medida de BC =

3. Calcula la altura "h" del edificio.

3

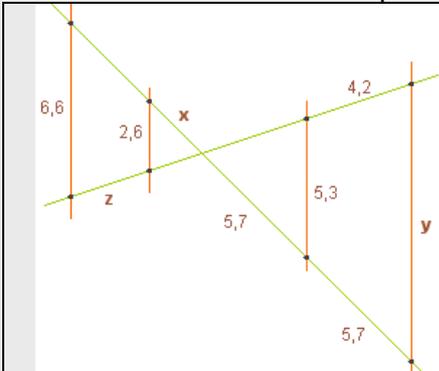


Operaciones

Altura: h =

4. Utiliza el teorema de Thales para calcular las medidas de x, y, z:

4

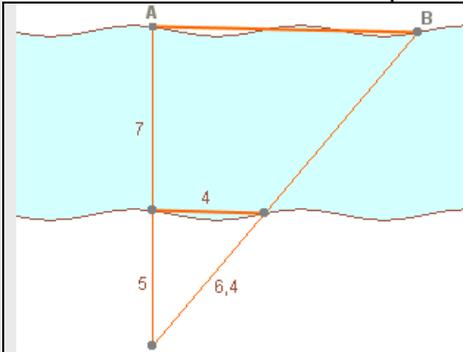


Operaciones

Medidas: x = y = z =

5. Calcula la distancia entre los puntos A y B.

5



Operaciones

Distancia entre A y B =

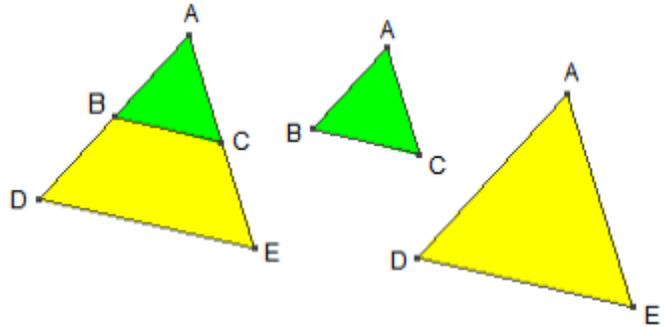
2.b. Triángulos semejantes. Criterios

Lee en la pantalla la explicación teórica de este apartado.

¿Cuándo se dice que dos triángulos son semejantes?

¿Cómo son entre si los **lados homólogos**?

¿Cómo son entre si los **ángulos**?



Criterios de semejanza de triángulos

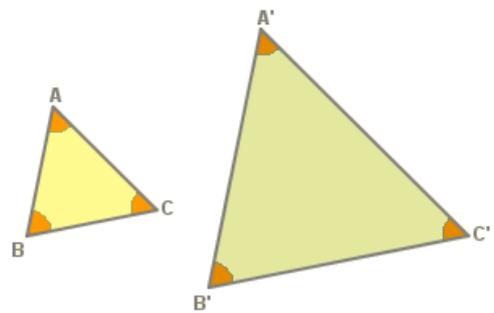
En la escena de la derecha puedes ver los tres criterios de semejanza de triángulos.

En cada uno de ellos puedes ver la demostración pulsando 

Lee atentamente cada una de las demostraciones y escribe cada uno de los criterios en los siguientes recuadros:

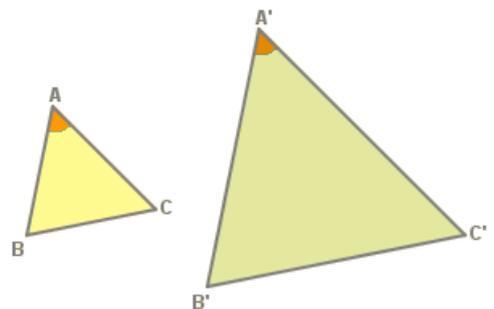
Pulsa Criterio 1

Primer criterio de semejanza



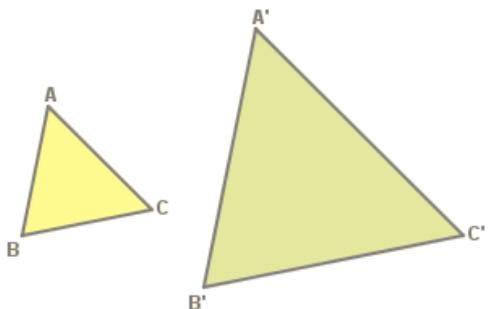
Pulsa Criterio 2

Segundo criterio de semejanza



Pulsa Criterio 3

Tercer criterio de semejanza

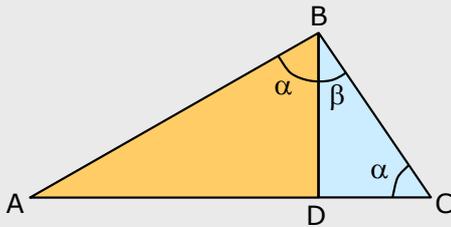


Pulsa en  para hacer ejercicios. Aparecerán los mismos del siguiente recuadro:

EJERCICIOS

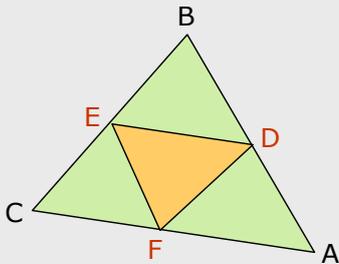
6. En un triángulo rectángulo ABC ($B=90^\circ$) se traza la altura sobre el lado AC, formándose así los triángulos también rectángulos, BDA y BCD, ¿son semejantes también estos triángulos? ¿Qué criterio aplicas?

1



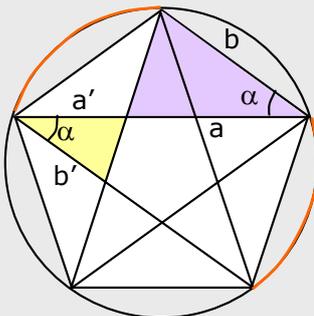
7. En un triángulo cualquiera ABC, se unen los puntos medios de los lados para formar otro triángulo DEF. ¿Son semejantes estos dos triángulos? ¿Qué criterio aplicas?

2



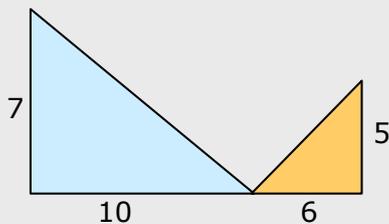
8. La figura era conocida en la antigüedad como "pentagrama pitagórico". En ella se pueden ver bastantes parejas de triángulos semejantes. Los de color amarillo y morado, ¿son semejantes? ¿Qué criterio aplicas?

3



9. Los triángulos de la figura, ¿son semejantes?

4



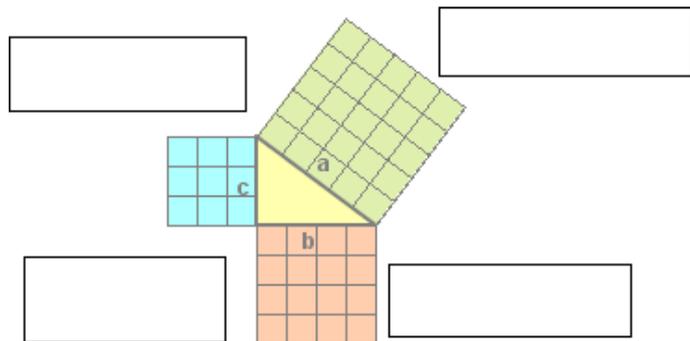
Cuando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

3. Triángulos rectángulos

3.a. El teorema de Pitágoras

Lee en pantalla el enunciado del **Teorema de Pitágoras** y escríbelo en el siguiente recuadro:

Debajo del enunciado del teorema de Pitágoras puedes ver una explicación geométrica.



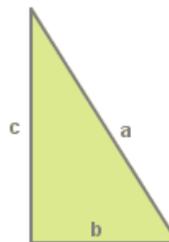
Completa lo que falta en este dibujo:

En la escena pulsa Para ver una demostración del TEOREMA DE PITÁGORAS

Aparece un triángulo rectángulo de hipotenusa **a** y catetos **b** y **c**

Paso 1. Construimos un cuadrado de lado el cateto **b** y otro cuadrado de lado el cateto **c**:

(Completa el dibujo) →



Pulsa nuevamente

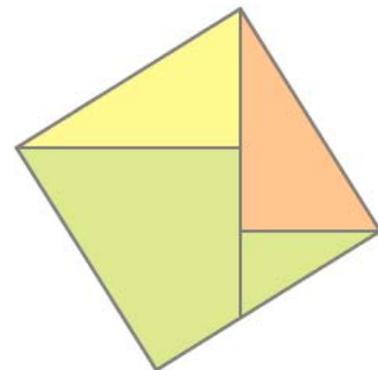
Observa como a partir de los cuadrados anteriores puedes obtener el siguiente cuadrado. Completa los datos en el dibujo:

¿Cuál es el área del cuadrado de lado **b**?

¿Cuál es el área del cuadrado de lado **c**?

¿Cuál es el área del cuadrado grande que se ha construido?

¿Qué relación hay entre esas tres áreas?



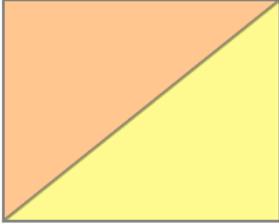
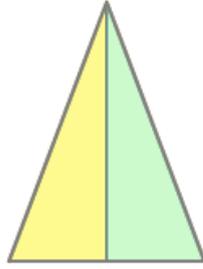
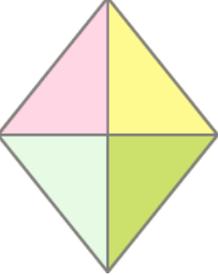
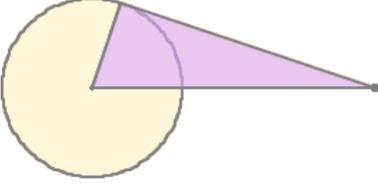
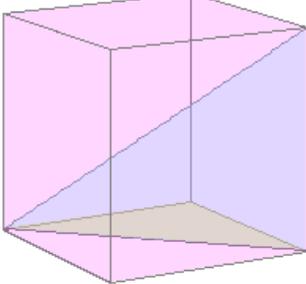
Pulsa Repetir Para ver de nuevo esta demostración

Para ver otra demostración pulsa en

Cuando acabes ... Pulsa para ir a la página siguiente.

3.b. Aplicaciones del teorema de Pitágoras

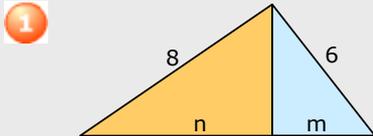
El **teorema de Pitágoras** es de gran utilidad en multitud de problemas en los que se presenta algún triángulo rectángulo. En la escena de la derecha verás ejemplos de cada uno de ellos.

Pulsa Comenzar Para ver el 1 ^{er} ejemplo	Pulsa Continuar para ver el siguiente
<p>DIAGONAL DE UN RECTÁNGULO</p> <p>Completa el dibujo Fórmulas</p> 	<p>ALTURA DE UN TRIÁNGULO ISÓSCELES</p> <p>Completa el dibujo Fórmulas</p> 
Pulsa Continuar para ver el siguiente	Pulsa Continuar para ver el siguiente
<p>LADO DE UN ROMBO</p> <p>Completa el dibujo Fórmulas</p> 	<p>ALTURA DE UN TRAPECIO</p> <p>Completa el dibujo Fórmulas</p> 
Pulsa Continuar para ver el siguiente	Pulsa Continuar para ver el siguiente
<p>SEGMENTO DE TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA</p> <p>Completa el dibujo Fórmulas</p> 	<p>DIAGONAL DE UN CUBO</p> <p>Completa el dibujo Fórmulas</p> 

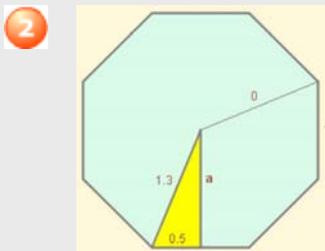
Pulsa en  para hacer ejercicios. Aparecerán los mismos del siguiente recuadro:

EJERCICIOS

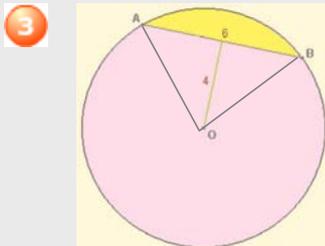
10. En el triángulo rectángulo de la figura se traza la altura sobre la hipotenusa dando lugar a los triángulos naranja y azul. Calcula el valor de m y de n .



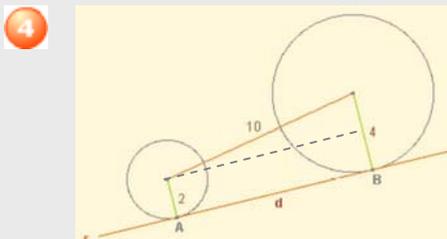
11. Calcula cuanto mide la apotema de un octógono regular de lado 1 dm y radio 1,3 dm.



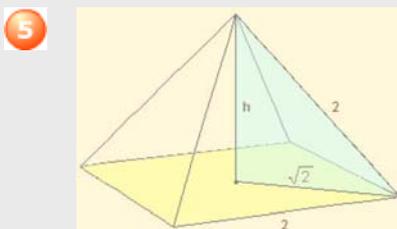
12. En una circunferencia se sabe la longitud de una cuerda AB, 6 cm, y la distancia de ésta al centro de la circunferencia, 4 cm. ¿Cuánto mide el radio?



13. La recta r es tangente a las dos circunferencias en los puntos A y B. Halla la distancia que hay entre ambos puntos de tangencia.



14. La pirámide de la figura es regular, sus caras son triángulos equiláteros y su base un cuadrado de lado 2 m. Calcula su altura.



4. Lugares geométricos

4.a. Definición y ejemplos

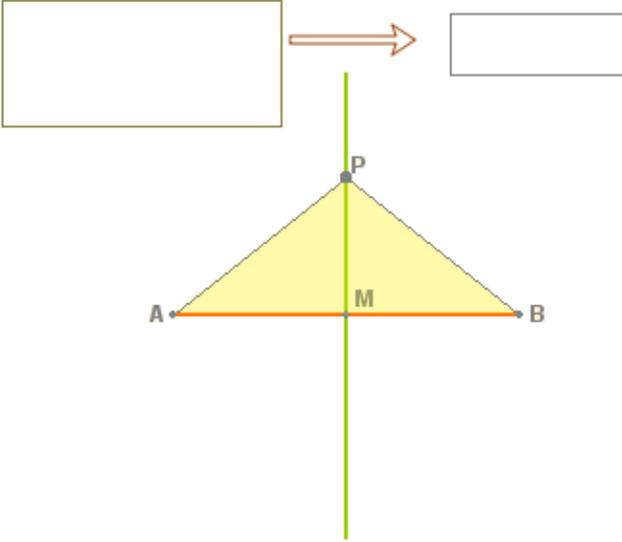
Completa:

Un **lugar geométrico** en el plano es _____, que cumplen todos ellos _____.

En la escena de la derecha, pulsa **mediatriz de un segmento**

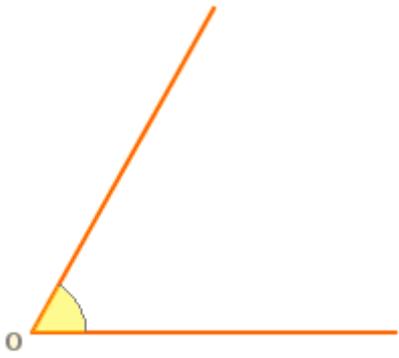
En las siguientes escenas verás la explicación de la construcción geométrica con regla y compás de la **MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO**.

Si quieres detener la escena, pulsa el botón secundario del ratón y aparecerá un recuadro que en su parte inferior tiene los botones de retroceso y pausa/avance: 

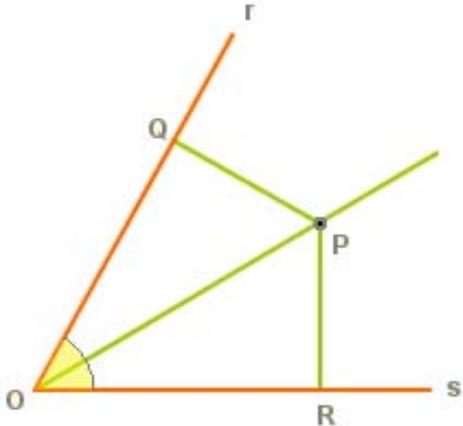
PASOS PARA REALIZAR LA CONSTRUCCIÓN	DIBUJO DE LA MEDIATRIZ
<p>1.- Trazamos un arco de circunferencia _____</p> <p>2.- Con centro en B _____</p> <p>La recta que pasa _____</p> <p>La MEDIATRIZ del segmento AB es _____</p>	
<p>Una vez dibujada la mediatriz del segmento AB, vamos a definirla como LUGAR GEOMÉTRICO.</p> <p>Completa el siguiente gráfico y razona cuál es la propiedad que cumple cualquier punto P que esté situado en la mediatriz.</p>	
	<p>La MEDIATRIZ del segmento AB es el LUGAR GEOMÉTRICO de los puntos, P,</p> <p>que: _____</p>

En la escena de la derecha, pulsa bisectriz de un ángulo

Ahora veremos la construcción geométrica con regla y compás de la BISECTRIZ DE UN ÁNGULO.

PASOS PARA REALIZAR LA CONSTRUCCIÓN	DIBUJO DE LA BISECTRIZ
1.- Con centro en O, trazamos _____ _____	
2.- Este arco corta _____ _____	
3.- Con centros en A y B _____ _____	
La recta que pasa _____ _____	
La BISECTRIZ de un ángulo es _____ _____ _____	

Ahora vamos a definir la bisectriz como LUGAR GEOMÉTRICO.
 En la escena ves que situando un punto P en cualquier lugar de la bisectriz, se trazan perpendiculares a los lados del ángulo r y s obteniendo los puntos Q y R.
 Se forman así dos triángulos rectángulos OQP y ORP.

	¿Cómo son entre si los dos triángulos ORP y OQP? _____ _____
	¿Cómo son entre si los segmentos RP y QP? _____ _____
	<p>CONCLUSIÓN: La BISECTRIZ de un ángulo es el LUGAR GEOMÉTRICO de los puntos del plano que _____ _____ _____</p>

Pulsa en  para ver otro ejemplo interesante: **ARCO CAPAZ**

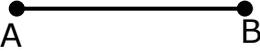
Pulsa en [Definición](#)

Completa:

El arco capaz de un ángulo α sobre un segmento AB es _____

Pulsa en [Construcción](#)

Indica un valor para el ángulo utilizando el control numérico  Pulsa Continuar 

PASOS PARA REALIZAR LA CONSTRUCCIÓN	DIBUJO DEL ARCO CAPAZ
1.- Empezamos trazando _____ _____ _____ Pulsa Continuar 	
2.- A continuación trazamos _____ _____ Y obtenemos el punto _____ _____ Pulsa Continuar 	
3.- Observamos que el ángulo inicial α es igual al ángulo azulado que obtenemos, formado por _____ _____ Pulsa Continuar 	
4.- Por fin trazamos _____ _____ _____ Pulsa Continuar  Observa en la escena, moviendo el punto P, que ha quedado dibujado el arco capaz .	

Quando acabes pulsa  para ir a la página siguiente.

5. Aplicaciones

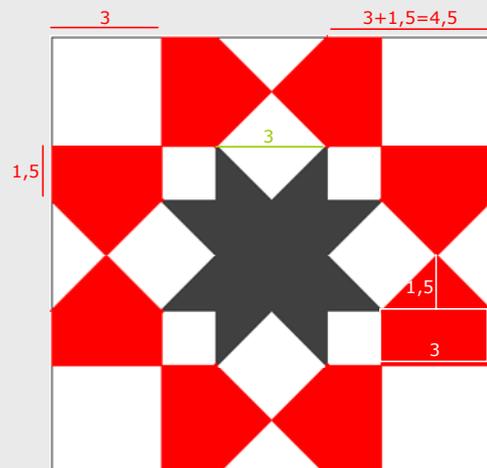
5.a. Áreas de figuras planas

Completa los nombres de las figuras geométricas y las fórmulas para calcular sus áreas:

Figura	Nombre y Área	Figura	Nombre y Área

EJERCICIOS

15. La figura de la derecha está compuesta por áreas de color blanco (cuadrados y triángulos), rojo (pentágonos) y negro. Calcula el área de cada color. Toda la figura es un cuadrado de 12 m de lado.





Recuerda lo más importante – RESUMEN

Teorema de Tales	Teorema de Pitágoras
<div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 30px; margin: 0 auto;"></div>	

Semejanza	
<p>Dos figuras planas son semejantes si llamada _____, entre _____</p> <p>En el caso de los triángulos basta que se cumpla uno de los criterios: →</p>	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <p>1. _____</p> <p>2. _____</p> <p>3. _____</p> <p>— = — = —</p> </div> </div>

Lugares geométricos	Un lugar geométrico en el plano es _____.
<p>La mediatriz de un segmento AB es el lugar geométrico _____.</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> </div>	<p>La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico _____.</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> </div>
<p>(Completa los dibujos)</p>	

Pulsa para ir a la página siguiente



Para practicar

En esta unidad encontrarás ejercicios de:

- Semejanza, teorema de Pitágoras y lugares geométricos
- Áreas de figuras planas

Completa los enunciados y resuélvelos. Después comprueba si lo has hecho bien.

TEOREMA DE THALES

1. Las rectas r , s y t son paralelas, determina el valor de x en cada caso:

SEMEJANZA

2. Los cuadriláteros de la figura son semejantes. Halla la longitud del lado x y el ángulo B.

--	--

3. Los triángulos de la figura son rectángulos y semejantes, calcula los elementos que faltan en cada uno.

--	--

4. Comprueba que en un triángulo rectángulo ABC, los triángulos que determina la altura sobre la hipotenusa y el mismo ABC son semejantes. Si los catetos miden 8 cm y 5 cm, calcula la altura.

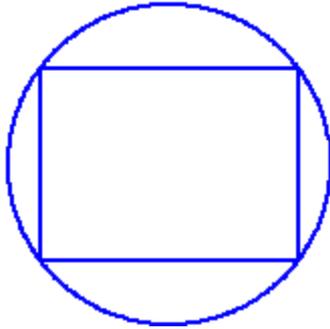
--	--

TEOREMA DE PITÁGORAS

5. Los lados de un triángulo miden _____. ¿Es rectángulo? En caso afirmativo, ¿cuánto mide la hipotenusa?

--	--

6. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia de la figura?

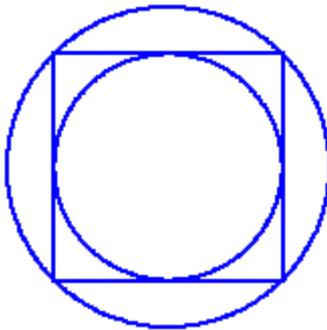


--	--

7. En un triángulo isósceles los lados iguales miden 12 cm y el lado desigual 8 cm, ¿cuánto mide la altura?

--	--

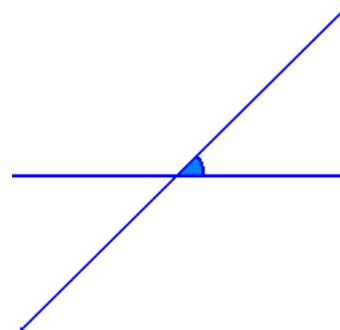
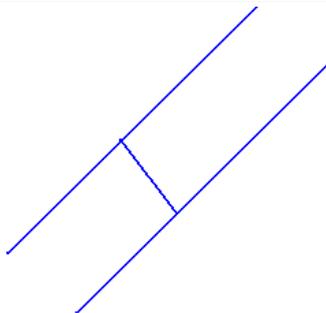
8. El radio de la circunferencia mayor mide 10 cm, ¿cuánto mide el radio de la menor?



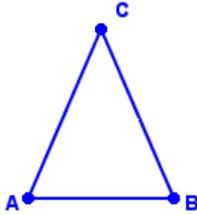
--	--

LUGARES GEOMÉTRICOS

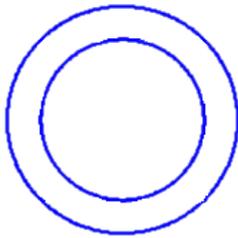
9. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas de las figuras:



10. El triángulo de la figura es isósceles. Si se desplaza el vértice C de forma que el triángulo siga siendo isósceles, ¿qué lugar geométrico determina C?



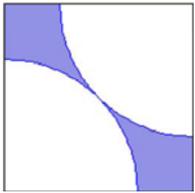
11. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos circunferencias concéntricas, de radios respectivos _____.



ÁREAS DE RECINTOS PLANOS

El mural – Tipo 1

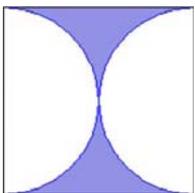
12. Se quiere construir un mural de _____ de largo por _____ de alto uniendo cuadrados de _____ de lado como el de la figura. ¿Qué superficie quedará de color azul?



--	--

El mural – Tipo 2

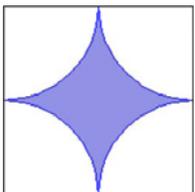
13. Se quiere construir un mural de _____ de largo por _____ de alto uniendo cuadrados de _____ de lado como el de la figura. ¿Qué superficie quedará de color azul?



--	--

El mural – Tipo 3

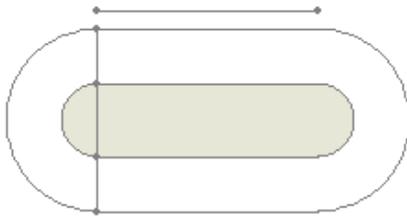
14. Se quiere construir un mural de _____ de largo por _____ de alto uniendo cuadrados de _____ de lado como el de la figura. ¿Qué superficie quedará de color azul?



--	--

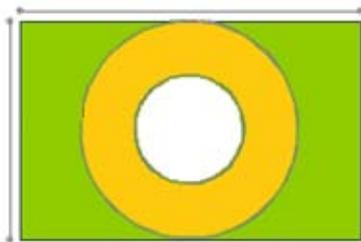
El estadio

15. Un estadio tiene la forma y dimensiones del dibujo. ¿Qué superficie ocupan las pistas?



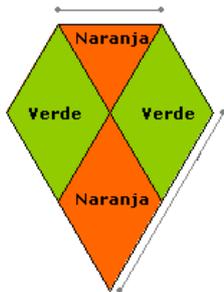
La plaza

16. Una plaza tiene forma elíptica y las dimensiones de la figura. En el centro hay una fuente circular de _____ de radio, rodeada de un paseo de tierra y en el resto hay césped. ¿Qué superficie ocupa el césped?, ¿y el paseo?



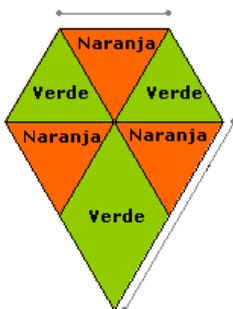
La cometa – Tipo 1

17. Para construir una cometa se ha empleado tela de color verde y naranja como en la figura. ¿Qué cantidad de cada color?



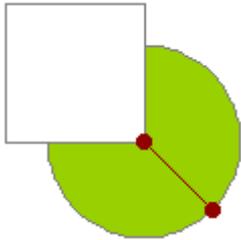
La cometa – Tipo 2

18. Para construir una cometa se ha empleado tela de color verde y naranja como en la figura. ¿Qué cantidad de cada color?



La cabra – Tipo 1

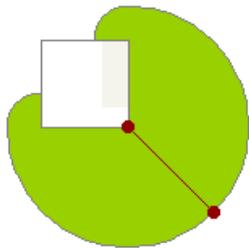
19. Una cabra está atada en la esquina de un corral cuadrado de _____ de lado, con una cuerda de _____ de largo, ¿cuál es la superficie sobre la que puede pastar?



Blank space for the student's answer to problem 19.

La cabra – Tipo 2

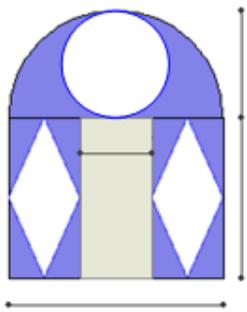
20. Una cabra está atada en la esquina de un corral cuadrado de _____ de lado, con una cuerda de _____ de largo, ¿cuál es la superficie sobre la que puede pastar?



Blank space for the student's answer to problem 20.

La catedral

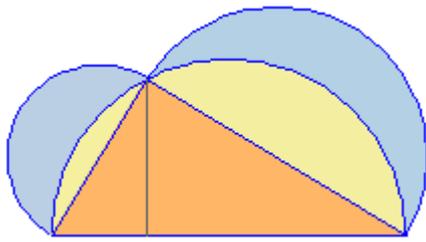
21. La portada de una catedral románica está decorada con frescos pintados sobre una zona como la coloreada en la figura. ¿Qué superficie se ha pintado?



Blank space for the student's answer to problem 21.

Las lúnulas

22. La base del triángulo de la figura mide _____ y la altura _____. Calcula el área del recinto de color azul (formado por dos figuras parecidas a dos lunas).



Blank space for the student's answer to problem 22.

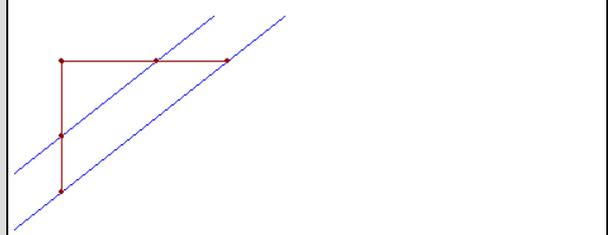
Autoevaluación



Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.

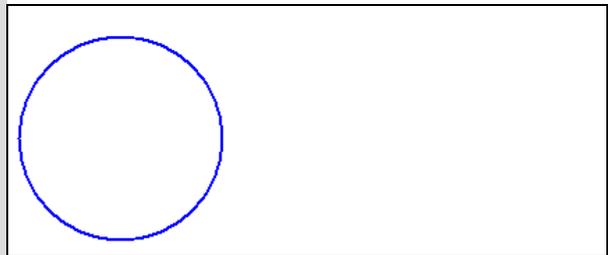
- 1 ¿Son paralelas las dos rectas de color azul de la figura?

(Utiliza el teorema de Thales para comprobar la respuesta)

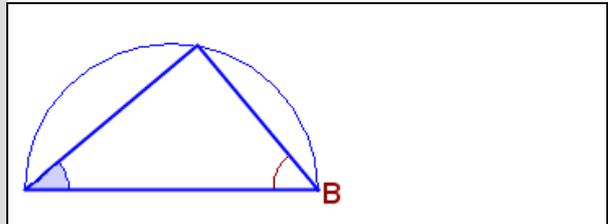


- 2 ¿Cuánto mide el ángulo α de la figura?

(Dibújalo primero en el círculo de la derecha)



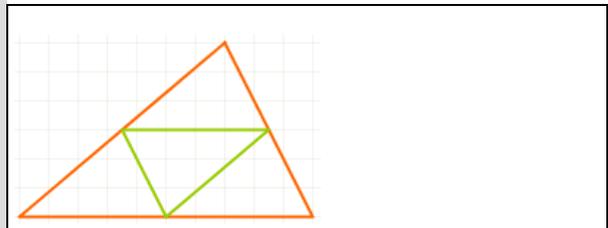
- 3 ¿Cuánto mide el ángulo B de la figura?



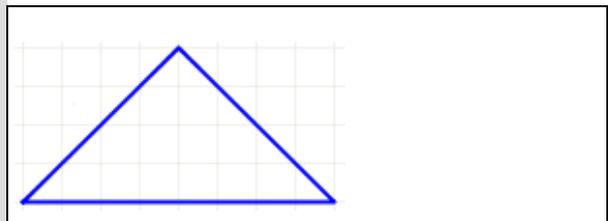
- 4 Los lados de un rectángulo miden _____ y los de otro _____.
¿Son semejantes esos dos rectángulos?



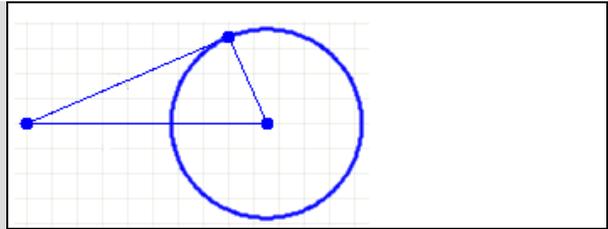
- 5 Los lados del triángulo verde (el interior) miden _____. ¿Cuánto mide el lado mayor del triángulo naranja?



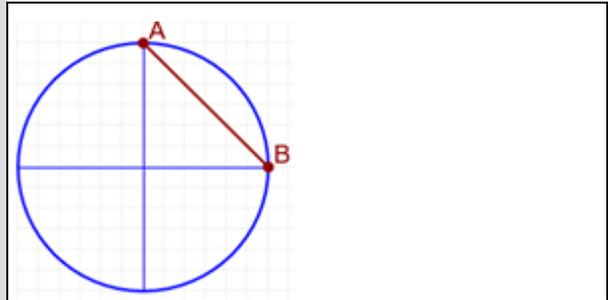
- 6 Los lados iguales de un triángulo isósceles y rectángulo miden _____. ¿Cuánto mide el lado desigual?



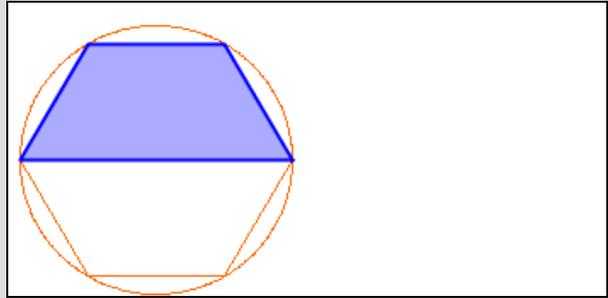
7. Calcula el radio de la circunferencia de la figura.



8. El radio de la circunferencia mide _____ cm. Cuál es la longitud de la cuerda AB?



9. Calcula el área de la figura azul inscrita en una circunferencia de radio _____.



10. El lado del cuadrado de la figura mide _____ cm. Calcula el área del recinto de color azul.

