

Objectius

Aquesta quinzena aprendràs a:

- Identificar, ordenar i representar nombres racionals.
- Efectuar operacions amb fraccions.
- Expressar fraccions amb nombres decimals i nombres decimals com a fraccions.
- Calcular potències amb exponent enter i efectuar operacions amb potències.
- Aproximar nombres i calcular l'error absolut i relatiu.
- Expressar un nombre en notació científica i realitzar operacions amb nombres en aquesta notació.
- Utilitzar els nombres racionals per resoldre problemes.
- Calcular arrels i realitzar operacions senzilles amb radicals.

Abans de començar

1. Nombres racionals	pàg. 6
Decimals periòdics	
Fracció generatriu	
Ordenació i representació	
2. Operacions amb fraccions	pàg. 9
Sumes i restes	
Productes i quocients	
Operacions combinades	
3. Potències d'exponent enter	pàg. 12
Definició	
Operacions	
4. Notació científica	pàg. 14
Introducció	
Nombres extrems	
Operacions	
5. Radicals	pàg. 16
Arrels	
Propietats de les arrels	
Calcular arrels	
Sumes i restes	
Productes i quocients	
6. Mesura d'errors	pàg. 18
Aproximacions	
Error absolut i relatiu	
7. Aplicacions	pàg. 19
Problemes d'aplicació	

Exercicis per practicar

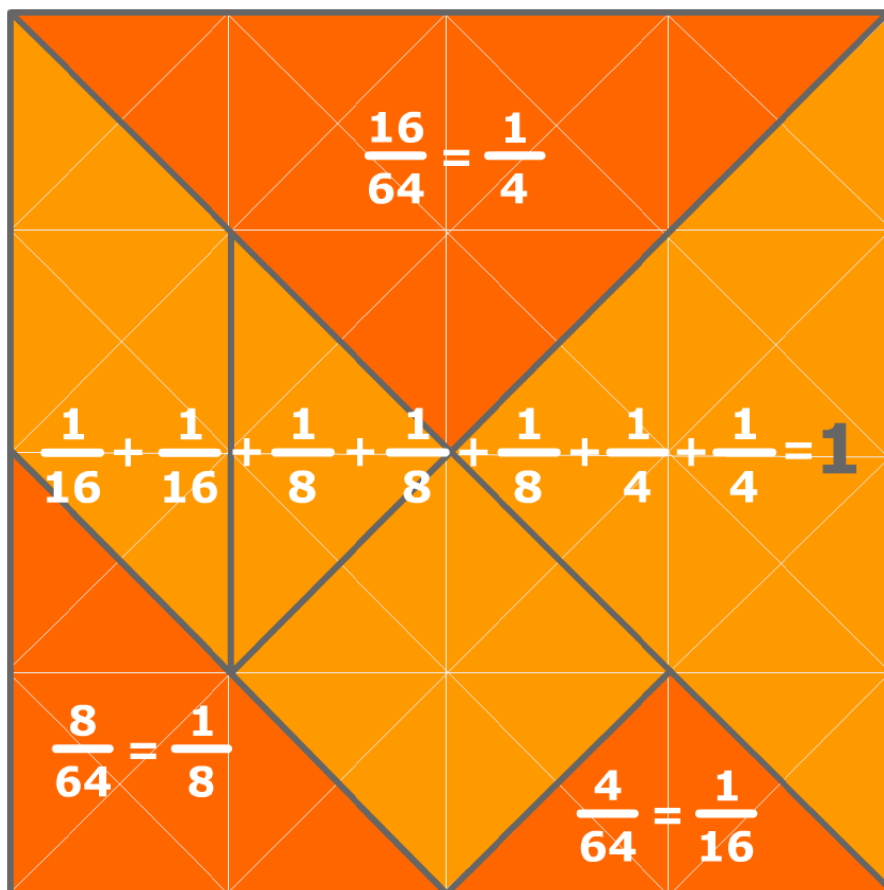
Per saber-ne més

Resum

Autoavaluació

Activitats per enviar al tutor

Abans de començar



Investiga

Amb els nombres enters és fàcil calcular el següent d'un nombre: El següent de -3 és -2, el següent és -1, el següent és 0, el següent és 1, el següent és 2, i així successivament.

La cosa no és tan clara si els nombres són fraccionaris o decimals. Intenta trobar el següent d'aquests nombres:

$\frac{2}{3}$ 1,6 1,675 1,67555... 1,6799....

Nombres racionals

1. Nombres racionals

Decimals periòdics

Una fracció és un quocient entre dos nombres enters. La divisió d'aquests dos nombres dona una **expressió decimal** amb un grup de xifres que es repeteixen periòdicament, l'anomenat **període**, i que pot ser:

- Decimal **periòdic pur**

$$12/11 = 1,090909... = 1,0\overline{09} ; \text{ El període és } 09$$

- Decimal **periòdic mixt**

$$31/15 = 2,06666... = 2,0\overline{6} ; \text{ El període és } 6$$

- Decimal **exacte o finit**

$$1/8 = 0,125000... = 0,125$$

Fracció generatriu

Tot decimal periòdic es pot expressar en forma de fracció, que anomenarem **fracció generatriu** d'aquest decimal.

En aquests casos no és necessari aplicar la fórmula, resulta més senzill procedir de la següent manera:

• Decimal exacte o finit

Es divideix el nombre sense coma, per la unitat seguida de tants zeros com xifres decimals hi ha.

• Decimal periòdic pur

En el numerador s'escriu la diferència entre la part entera seguida del període i la part entera, en el denominador tants nous com xifres té el període.

• Decimal periòdic mixt

En el numerador s'escriu la part entera seguida de les xifres fins que s'acabi el primer període menys la part entera seguida de les xifres no periòdiques, en el denominador tants nous com xifres té el període seguits de tants zeros com xifres decimals no periòdiques.

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 11} \\ 40 \\ \underline{70} \\ 40 \\ \underline{70} \\ 40 \\ \underline{70} \\ 40 \\ \underline{70} \\ 40 \\ \underline{70} \\ 4 \end{array}$$

El residu sempre és menor que el divisor, per tant com a màxim en un nombre de passos igual al divisor, el residu es repetirà i les xifres decimals del quocient també.

• Decimal exacte $x=71,52$

2 xifres decimals:

es multiplica per 10^2

$$100x=7152$$

$$x = \frac{7152}{100}$$

• Periòdic pur $x=853,11...$

Període amb 1 xifra:

es multiplica per 10

$$10x=8531,11..$$

$$\text{Restant: } 9x=8531-853$$

$$x = \frac{7678}{9}$$

• Periòdic mixt $x=4,9368368..$

1 xifra entre la coma i el període:
es multiplica per 10

$$10x=49,368368...$$

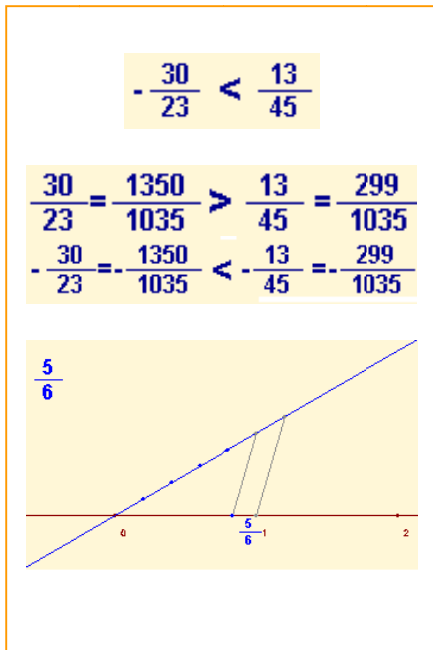
Període amb 3 xifres:

es multiplica per 10^3

$$1000x=49368,368...$$

$$\text{Restant: } 9990x=49368-49$$

$$x = \frac{49319}{9990}$$



Ordenació i representació gràfica

Els nombres racionals estan ordenats, de manera que sempre podem comparar dos nombres qualssevol i els podem representar com punts d'una recta.

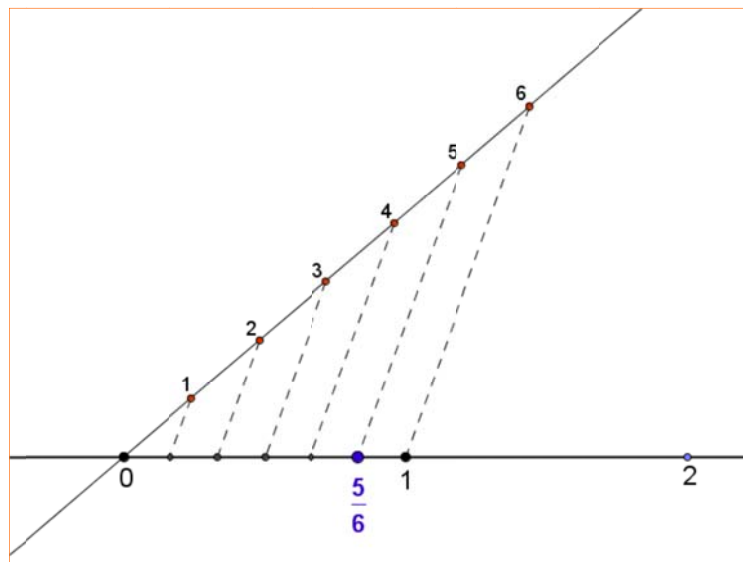
Per **comparar** dos nombres racionals els escrivim en forma de fracció, els reduïm a comú denominador i comparem els numeradors, tenint en compte que:

- Qualsevol fracció negativa és menor que qualsevol fracció positiva.
- De dues fraccions positives amb igual denominador és menor la que tingui el menor numerador.
- De dues fraccions negatives amb el mateix denominador és menor la que tingui el numerador amb major valor absolut.

Per **representar-los** gràficament utilitzarem la tècnica descrita en la imatge adjunta.

Per dividir un segment en parts iguals, es dibuixa una recta auxiliar des d'un extrem del segment, sobre ella es pren una mesura arbitrària i amb el compàs es trasllada tantes vegades cap a la dreta com parts es vulguin fer.

S'uneix l'últim punt així obtingut amb l'altre extrem del segment, i es tracen paral·leles a aquest últim segment. Aquestes paral·leles divideixen el segment inicial en les parts desitjades.



EXERCICIS resoltos

1. Determina de quin tipus són els decimals que resulten de les fraccions següents:

a) $\frac{92}{73}$ b) $\frac{57}{22}$ c) $\frac{27}{36}$

Solució: a) 1,260273972602739726027397260274... Periòdic pur
 b) 2,590909090... Periòdic mixt
 c) 0,75 Decimal exacte

2. Calcula les fraccions generatrius dels següents decimals:

a) $x = 2,375 \Rightarrow 1000x = 2375 \Rightarrow x = \frac{2375}{1000}$
 b) $x = 43,666... \Rightarrow 10x = 436,666... \Rightarrow 9x = 436 - 43 = 393 \Rightarrow x = \frac{393}{9} = \frac{131}{3}$
 c) $x = 4,3666... \Rightarrow 10x = 43,666... \Rightarrow 100x = 436,666... \Rightarrow 90x = 436 - 43 \Rightarrow x = \frac{393}{90} = \frac{131}{30}$

3. Ordena de menor a major les següents fraccions: $\frac{-5}{10}, \frac{3}{12}, \frac{-9}{9}, \frac{9}{5}, \frac{-9}{2}$

El mínim comú múltiple dels denominadors és 180. Reduïm les fraccions a denominador comú:

$$\frac{-5}{10} = \frac{-90}{180}, \frac{3}{12} = \frac{45}{180}, \frac{-9}{9} = \frac{-180}{180}, \frac{9}{5} = \frac{324}{180}, \frac{-9}{2} = \frac{-810}{180}$$

Ara ordenem: primer els negatius de major a menor numerador en valor absolut i després els positius de menor a major numerador:

$$\frac{-9}{2} < \frac{-9}{9} < \frac{-5}{10} < \frac{3}{12} < \frac{9}{5}$$

4. Representa a la recta les següents fraccions:

a) $\frac{2}{3}$



Dividim el segment (0,1) en 3 parts iguals i n'agafem 2.

b) $\frac{19}{4} = 4 + \frac{3}{4}$



Com que $\frac{19}{4} = 4 + \frac{3}{4}$, dividim el segment (4,5) en 4 parts iguals i n'agafem 3.

c) $-\frac{23}{5} = -5 + \frac{2}{5}$



Com que $-\frac{23}{5} = -5 + \frac{2}{5}$, dividim el segment (-5,-4) en 5 parts iguals i n'agafem 2.

2. Operacions amb fraccions

Propietats de la suma

Commutativa: L'ordre dels sumands no canvia el resultat:

$$\frac{-12}{11} + \frac{-9}{4} = \frac{-48}{44} - \frac{99}{44} = \frac{-147}{44}$$

$$\frac{-9}{4} + \frac{-12}{11} = \frac{-99}{44} - \frac{48}{44} = \frac{-147}{44}$$

Associativa: Quan hi ha diversos sumands es poden agrupar en qualsevol ordre:

$$\frac{-12}{11} + \left(\frac{-9}{4} + \frac{6}{13} \right) = \frac{-12}{11} + \frac{-93}{52} = \frac{-1647}{572}$$

$$\left(\frac{-12}{11} + \frac{-9}{4} \right) + \frac{6}{13} = \frac{-147}{44} + \frac{6}{13} = \frac{-1647}{572}$$

Element neutre: Qualsevol fracció sumada amb zero dóna la mateixa fracció. (Tingues en compte que $0 = 0/1 = 0/2 = 0/3 = \dots$)

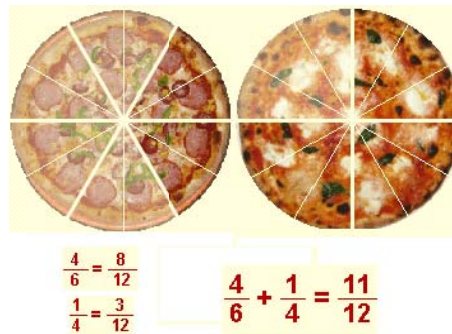
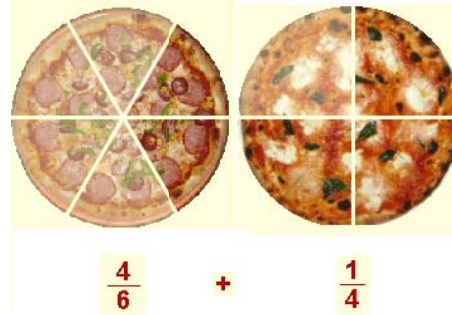
$$\frac{-12}{11} + \frac{0}{11} = \frac{-12+0}{11} = \frac{-12}{11}$$

Element oposat: Donada una fracció qualsevol existeix una altra (la seva oposada) que sumada amb ella dóna zero:

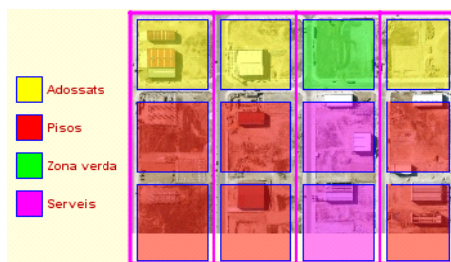
$$\frac{-12}{11} + \frac{12}{11} = \frac{-12+12}{11} = \frac{0}{11} = 0$$

Suma i diferència

Per **sumar** fraccions es redueixen a denominador comú, es deixa el mateix denominador i se sumen els numeradors.



El producte de fraccions es pot entendre com el resultat de calcular una fracció d'una altra fracció. A l'exemple tenim una parcel·la dividida en quatre fases:



Les zones dels adossats representen $3/12$ del total de la parcel·la, però aquesta fracció es pot interpretar així: hi ha adossats en 3 fases de les 4 ($3/4$) i en cada fase ocupen 1 part de cada 3 ($1/3$). Total

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{12}$$

Per **restar** fraccions se suma la primera amb l'oposada de la segona.

Producte i quocient

Per **multiplicar** dos o més fraccions es multipliquen els numeradors i es multipliquen els denominadors.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Per multiplicar una fracció per un nombre enter, es multiplica el numerador pel nombre i es deixa el mateix denominador.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

Si el nombre pel qual es multiplica és -1 el resultat es pot posar de diferents maneres.

$$\frac{a}{b} \cdot (-1) = \frac{a \cdot (-1)}{b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Nombres racionals

La **inversa** d'una fracció s'obté intercanviant el numerador amb el denominador, per exemple, la inversa de $\frac{2}{3}$ és $\frac{3}{2}$. **Si el numerador és zero, la fracció no té inversa.**

$$\text{La inversa de } \frac{a}{b} \text{ és } \frac{b}{a} \text{ i es representa } \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

Per **dividir** fraccions es multiplica la primera per la inversa de la segona.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Operacions combinades

Quan hem d'efectuar operacions combinades (amb fraccions o altre tipus de nombres) s'han de tenir en compte les següents **normes de prioritats**:

- **Si no hi ha parèntesis:**
 - En primer lloc s'efectuen tots els productes i quocients d'esquerra a dreta.
 - Amb els resultats obtinguts es fan les sumes i les restes, també d'esquerra a dreta.
- **Si hi ha parèntesis:**
 - S'efectuen primer les operacions dels parèntesis d'acord amb les normes anteriors. Si hi ha parèntesis dins d'altres parèntesis es van fent les operacions de dins cap a fora.
 - S'ha de tenir en compte que els parèntesis poden estar implícits, per exemple, si en el numerador o en el denominador d'una fracció hi ha operacions, s'ha de considerar que estan dins d'un parèntesi encara que aquest no s'hagi escrit.

Propietats del producte

Commutativa: L'ordre dels factors no canvia el resultat:

$$\frac{-5}{2} \cdot \frac{-13}{7} = \frac{-5 \cdot (-13)}{2 \cdot 7} = \frac{65}{14}$$
$$\frac{-13}{7} \cdot \frac{-5}{2} = \frac{-13 \cdot (-5)}{7 \cdot 2} = \frac{65}{14}$$

Associativa: Quan hi ha diversos factors es poden agrupar en qualsevol ordre:

$$\frac{-5}{2} \cdot \left(\frac{-13}{7} \cdot \frac{-10}{5}\right) = \frac{-5}{2} \cdot \frac{130}{35} = \frac{-650}{70}$$
$$\left(\frac{-5}{2} \cdot \frac{-13}{7}\right) \cdot \frac{-10}{5} = \frac{65}{14} \cdot \frac{-10}{5} = \frac{-650}{70}$$

Element neutre: Qualsevol fracció multiplicada per u dona la mateixa fracció.

$$\frac{-5}{2} \cdot 1 = \frac{-5}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{-5 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{-5}{2}$$

Element invers: Donada una fracció qualsevol (excepte *les de numerador igual a zero*) existeix una altra (la seva inversa) que multiplicada per ella dona u:

$$\frac{13}{9} \cdot \frac{9}{13} = \frac{13 \cdot 9}{9 \cdot 13} = \frac{117}{117} = 1$$

$\frac{9}{13}$ és la **fracció inversa** de $\frac{13}{9}$

Distributiva: quan es multiplica una fracció per una suma de fraccions es pot multiplicar la fracció per cada sumand i realitzar la suma després:

$$\frac{10}{3} \cdot \left(\frac{14}{9} + \frac{-14}{8}\right) = \frac{10}{3} \cdot \frac{-14}{72} = \frac{-140}{216}$$
$$\frac{10}{3} \cdot \frac{14}{9} + \frac{10}{3} \cdot \frac{-14}{8} = \frac{140}{27} + \frac{-140}{24} = \frac{-140}{216}$$

La propietat recíproca de la propietat distributiva és **treure factor comú**. Apliquem aquesta propietat quan hi ha diversos sumands i tots ells estan multiplicats per un mateix factor, en aquest cas es pot fer primer la suma d'aquests sumands i després multiplicar el resultat pel factor.

EXERCICIS resoltos

5. Calcula $\frac{-1}{11} + \frac{9}{8}$ Mcm(11,8) = 88, llavors $\frac{-1}{11} + \frac{9}{8} = \frac{-8}{88} + \frac{99}{88} = \frac{91}{88}$

6. Calcula $\frac{-9}{5} - \frac{-7}{12}$ Mcm(5,12) = 60, llavors $\frac{-9}{5} - \frac{-7}{12} = \frac{-108}{60} - \frac{-35}{60} = \frac{-108+35}{60} = \frac{-73}{60}$

7. Calcula $\frac{-9}{5} - 7$ $\frac{-9}{5} - 7 = \frac{-9}{5} - \frac{35}{5} = \frac{-44}{5}$

8. Calcula $\frac{-9}{5} - \frac{-7}{12} + \frac{2}{10} + 9 - \frac{-8}{5}$ Mcm(5,12,10)=60 llavors

$$\frac{-9}{5} - \frac{-7}{12} + \frac{2}{10} + 9 - \frac{-8}{5} = \frac{-108}{60} + \frac{35}{60} + \frac{12}{60} + \frac{540}{60} + \frac{96}{60} = \frac{575}{60} = \frac{115}{12}$$

9. Calcula $\frac{-1}{7} \cdot \frac{-6}{-5}$ $\frac{-1}{7} \cdot \frac{-6}{-5} = \frac{6}{-35} = -\frac{6}{35}$

10. Calcula $\frac{-1}{7} : \frac{-6}{-5}$ $\frac{-1}{7} : \frac{-6}{-5} = \frac{(-1) \cdot (-5)}{7 \cdot (-6)} = \frac{5}{-42} = -\frac{5}{42}$

11. Calcula $\frac{-1}{7} \cdot (-6)$ $\frac{-1}{7} \cdot (-6) = \frac{6}{7}$

12. Calcula $(-6) \cdot \frac{-1}{7}$ $(-6) \cdot \frac{-1}{7} = \frac{6}{7}$

13. Calcula $\frac{-1}{7} : (-6)$ $\frac{-1}{7} : (-6) = \frac{-1}{7 \cdot (-6)} = \frac{-1}{-42} = \frac{1}{42}$

14. Calcula $(-6) \cdot \frac{-1}{7}$ $(-6) \cdot \frac{-1}{7} = \frac{(-6) \cdot 7}{-1} = \frac{-42}{-1} = 42$

15. Calcula $\frac{4}{6} : 4 + \frac{1}{7} - \frac{6}{4} \cdot 3 - \frac{2}{6} - 2$

Abans de fer cap operació simplifiquem. Llavors fem primer els productes i quocients d'esquerra a dreta i llavors les sumes i restes. Recorda simplificar sempre abans d'operar.

$$\frac{2}{3} : 4 + \frac{1}{7} - \frac{3}{2} \cdot 3 - \frac{1}{3} - 2 = \frac{2}{12} + \frac{1}{7} - \frac{9}{2} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{9}{2} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{7+6-189-14-84}{42} = \frac{-274}{42} = -\frac{137}{21}$$

16. Calcula $\frac{4}{6} + \left(\frac{1}{7} \cdot 7\right) \cdot 7 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} : \frac{7}{6}\right)$

Igual que abans, però ara els parèntesis alteren les prioritats.

$$\frac{2}{3} + 1 \cdot 7 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) = \frac{2}{3} + 7 - \frac{9}{14} = \frac{28 + 294 - 27}{42} = \frac{295}{42}$$

17. Calcula $\frac{\frac{5}{7} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{7} + \frac{1}{2}} : \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{2} + \frac{1}{2}}$

$$\frac{\frac{5}{7} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{7} + \frac{1}{2}} : \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{10+21}{14}}{\frac{2+7}{14}} : \frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{2}} = \frac{31}{9} : \frac{5}{4} = \frac{31}{9} : \frac{5}{20} = \frac{31}{9} : \frac{1}{10} = \frac{310}{9}$$

3. Potències d'exponent enter

Definició

Sigui **a** un nombre racional diferent de zero i **n** un nombre enter. S'anomena **potència** de **base a** i **exponent n** al nombre:

$$a^n = \begin{cases} a & \text{si } n=1 \\ a \cdot a \cdot \dots \cdot a & \text{si } n>1 \\ \text{\small n vegades} \\ 1 & \text{si } n=0 \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^{-n}} & \text{si } n<0 \end{cases}$$

Operacions amb potències

Quan hem d'efectuar operacions combinades i entre aquestes operacions hi ha potències, a les **normes de prioritats** que coneixíem n'hem d'afegir una de nova i en primer lloc:

- S'efectuen en primer lloc totes les potències d'esquerra a dreta.
- Tot seguit, tots els productes i quocients d'esquerra a dreta.
- Amb els resultats obtinguts es fan les sumes i restes, també d'esquerra a dreta.

Les prioritats anteriors es poden alterar amb parèntesis, o també si es poden aplicar algunes de les propietats que hem vist a la pàgina anterior (productes o quocients de potències amb la mateixa base)

Propietats de les potències

Per multiplicar potències amb la mateixa base es deixa la mateixa base i se sumen els exponents:

$$\left(\frac{-6}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{-6}{9}\right)^2 = \left(\frac{-6}{9}\right)^5$$

Per dividir potències amb la mateixa base es deixa la mateixa base i es resten els exponents:

$$\frac{\left(\frac{2}{6}\right)^5}{\left(\frac{2}{6}\right)^3} = \left(\frac{2}{6}\right)^2$$

Per elevar una potència a una altra potència, es deixa la base i es multipliquen els exponents:

$$\left(\left(\frac{-5}{6}\right)^5\right)^3 = \left(\frac{-5}{6}\right)^{15}$$

Per elevar un producte a una potència es pot elevar cada factor a aquesta potència i multiplicar després:

$$(5 \cdot 9)^4 = 5^4 \cdot 9^4$$

Per elevar una fracció a una potència s'eleva a la mateixa el numerador i el denominador:

$$\left(\frac{-1}{9}\right)^4 = \frac{(-1)^4}{9^4}$$

ATENCIÓ!

$$(-5)^4 = 625$$

$$-5^4 = -625$$

EXERCICIS resolts

18. Calcula $\left(\frac{5}{9}\right)^4$ $\left(\frac{5}{9}\right)^4 = \frac{5^4}{9^4} = \frac{625}{6561}$

19. Calcula $-\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}$ $-\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2} = -\left(\frac{5}{-2}\right)^2 = -\frac{25}{4}$

20. Calcula 3^{-4} $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

21. Calcula $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

22. Calcula $-\frac{5}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 : \frac{6}{7} : \frac{3}{4} : (-1)^0$

Fem primer les potències i després apliquem les prioritats anteriors:

$$-\frac{5}{3} - \frac{1}{8} : \frac{6}{7} : \frac{3}{4} : 1 = -\frac{5}{3} - \frac{3}{28} : \frac{3}{4} : 1 = -\frac{5}{3} - \frac{1}{7} : 1 = -\frac{5}{3} - \frac{1}{7} = -\frac{38}{21}$$

23. Transforma 1000 en potència de 10 $1000 = 2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$

24. Transforma 0,00001 en potència de 10 $0,00001 = \frac{1}{100000} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$

25. Transforma 16 en potència de 2 $16 = 2^4$

26. Transforma 0,0016 en potència de 5 $0,0016 = \frac{16}{10000} = \frac{16}{625 \cdot 16} = \frac{1}{625} = \frac{1}{5^4} = 5^{-4}$

27. Expressa cada terme com una potència de 10 i simplifica

$$\frac{(-0,1)^{-2} : (-1000)^2 \cdot (0,01)^2}{0,01^{-2} \cdot 10^{-2}} = \frac{\left(-\frac{1}{10}\right)^{-2} : (-10^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{10^2}\right)^{-2} \cdot 10^{-2}} = \frac{10^{-2} : 10^6 \cdot 10^{-4}}{10^4 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^{-8} \cdot 10^{-4}}{10^2} = \frac{10^{-12}}{10^2} = 10^{-14}$$

28. Expressa cada terme com una potència de 4 i simplifica

$$\frac{16 \cdot \frac{1}{(-64)^{-2}} \cdot \frac{1}{64^{-2}}}{(-64) : 4} = \frac{4^2 \cdot \frac{1}{(-4^3)^{-2}} \cdot \frac{1}{(4^3)^{-2}}}{(-4^3) : 4} = \frac{4^2 \cdot 4^6 \cdot 4^6}{-4^3 : 4} = -\frac{4^{14}}{4^2} = -4^{12}$$

29. Simplifica tot el que puguis la fracció següent de manera que el resultat quedi en forma de productes i quocients de potències d'exponent positiu.

$$\left(\frac{(2^{-2} \cdot 3)^2 \cdot 5^3}{2^3 \cdot (3 \cdot 7^3)^{-2}}\right)^2 = \left(\frac{2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 7^{-6}}\right)^2 = \left(\frac{3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^6}{2^7}\right)^2 = \frac{3^8 \cdot 5^6 \cdot 7^{12}}{2^{14}}$$

Nombres racionals

4. Notació científica

Introducció: Productes i quocients per potències de 10

Sigui n un nombre enter positiu. Aquestes són les normes per multiplicar o dividir un nombre racional per 10^n :

- **Multiplicar per 10^n** (equivale a dividir per 10^{-n})
 - Si el nombre és enter s'afegeixen a la dreta tants zeros com indiqui l'exponent.
 - Si no és enter es fa córrer la coma cap a la dreta tant com indiqui l'exponent, completant amb zeros si cal.
- **Dividir per 10^n** (equivale a multiplicar per 10^{-n})
 - Es fa córrer la coma cap a l'esquerra tants llocs com indiqui l'exponent afegint zeros si fos necessari.

Nombres molt grans o molt petits

Es diu que un nombre està escrit en **notació científica** si té la següent aparença:

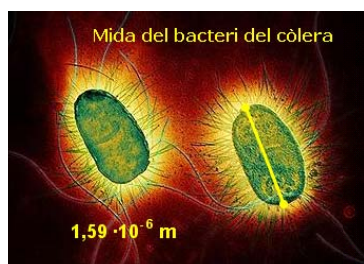
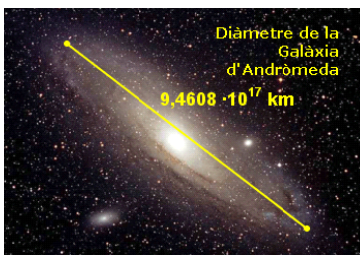
$$c_0, c_1 c_2 \dots c_p \cdot 10^n$$

on c_0 és una xifra diferent de zero, c_1, c_2, \dots, c_p són xifres decimals i n és un nombre enter (positiu, zero o negatiu). Es diu que n és l'**ordre de magnitud** del nombre.

Aquest tipus de notació és especialment adequada per al tractament de nombres molt grans o molt petits perquè, degut a la seva longitud, és fàcil equivocar-se amb les seves xifres i d'aquesta manera l'ordre de magnitud ens informa amb claredat de la seva mida. El nom es deu a que aquest tipus de nombres apareixen sovint en l'àmbit de la ciència.

Operacions en notació científica

Cal tenir en compte les operacions amb potències. Fixa't en els exemples següents:



La Galàxia d'Andròmeda té un diàmetre de 100.000 anys llum i està situada a uns 2 000 000 d'anys llum, quin és el seu diàmetre i a quina distància està en km?

Velocitat de la llum: 300 000 km/seg.

$$\begin{aligned} \text{En un any:} \\ 300\,000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 &= \\ = 9\,460\,800\,000\,000 \text{ km} &= \\ 9,4608 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

$$\text{Diàmetre de la galàxia (km):} \\ 10^5 \cdot 9,4608 \cdot 10^{12} = 9,4608 \cdot 10^{17}$$

$$\text{Distància (km):} \\ 2 \cdot 10^6 \cdot 9,4608 \cdot 10^{12} = 1,8922 \cdot 10^{19}$$

Quants àtoms d'oxigen caben al llarg d'un bacteri?

$$\frac{1,59 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-7}} = 1,325 \cdot 10^4$$

Quants nuclis d'oxigen caben al llarg d'un àtom?

$$\frac{1,2 \cdot 10^{-7}}{6,55 \cdot 10^{-12}} = 0,1832 \cdot 10^5$$

en notació científica:

$$= 1,832 \cdot 10^4$$

$$72639 \cdot 10^7 = 726390000000$$

$$\frac{72639}{10^7} = 72639 \cdot 10^{-7} = 0,0072639$$

$$12,88003 \cdot 10^7 = 128800300$$

$$\frac{50,83}{10^7} = 50,83 \cdot 10^{-7} = 0,000005083$$

Amb la calculadora

Per introduir a la calculadora nombres en notació científica com:

$$\triangleright 9,0043 \cdot 10^{13}$$

Tecleja: 9, 0043 EXP 13

Apareixerà: 9.0043 ¹³

$$\triangleright 6,0743 \cdot 10^{-18}$$

Tecleja: 6, 0743 EXP +/- 18

Apareixerà: 6.0743 ⁻¹⁸

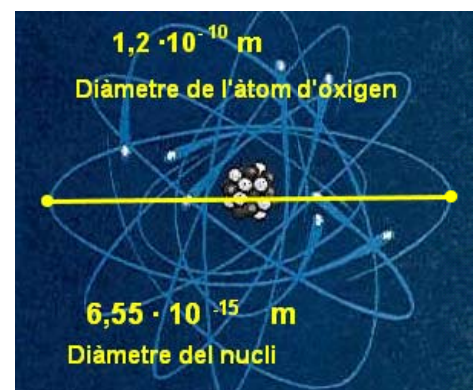
Si introdueixes:

$$\triangleright 900,43 \cdot 10^{13}$$

Tecleja: 900, 43 EXP 13

Apareixerà: 900.43 ¹³

l prement = surt el nre. en notació científica: 9.0043 ¹⁵



EXERCICIS resolts

30. Calcula $63,785 \cdot 10^8$ $6\ 378\ 500\ 000\ 000$
31. Calcula $133,75078 \cdot 10^{10}$ $1\ 337\ 507\ 800\ 000$
32. Calcula $30189 \cdot 10^{-2}$ $\frac{30189}{100} = 301,89$
33. Calcula $626,2 \cdot 10^{-5}$ $\frac{626,2}{100000} = 0,006262$
34. Passa a forma científica el nombre 94 494 000 $9,4494 \cdot 10^7$
35. Passa a forma científica el nombre 0,0000007308 $7,308 \cdot 10^{-7}$
36. Efectua les següents operacions deixant el resultat en notació científica:
 $(5,6733 \cdot 10^2) \cdot (1,6258 \cdot 10^{-6})$ $9,22365114 \cdot 10^{-4}$
37. Efectua les següents operacions deixant el resultat en notació científica:
 $(1,2319 \cdot 10^{-9}) \cdot (8,4798 \cdot 10^{-1})$
 $10,44626562 \cdot 10^{-10} = 1,044626562 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 1,044626562 \cdot 10^{-8}$
38. Efectua les següents operacions deixant el resultat en notació científica:
 $\frac{9,9989 \cdot 10^{11}}{1,6422 \cdot 10^{-10}}$ $6,0887224455 \cdot 10^{21}$
39. Efectua les següents operacions deixant el resultat en notació científica:
 $\frac{1,3472 \cdot 10^{-10}}{3,217 \cdot 10^4}$
 $0,4187752564501 \cdot 10^{-14} = 4,187752564501 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-14} = 4,187752564501 \cdot 10^{-15}$

Nombres racionals

5. Radicals

Arrels

L'**arrel enèsima** d'un **nombre a** és un altre nombre **r** que quan l'elevem a n dona a.

$$\sqrt[n]{a} = r \text{ quan } r^n = a$$

Segons el valor de l'índex **n** parlarem d'arrels *quadrades* (n=2), *cúbiques* (n=3), *quartes* (n=4), *quintes* (n=5), ... , o *enèsimes* en general. Recorda que en el cas de les arrels quadrades l'índex, 2, no s'escriu.

Quantes arrels té un nombre? Depèn de l'índex i del signe del radicand:

n	a<0	a=0	a>0
PARELL	2 arrels oposats	Arrel = 0	Cap arrel
SENAR	1 arrel negativa		1 arrel positiu

Algunes arrels són exactes però d'altres no, el seu resultat és un nombre de decimals infinit, però a diferència de les fraccions els decimals no es repeteixen periòdicament, no són nombres **racionals**, es diuen **irracionals**.

En aquests casos s'acostuma a deixar l'arrel sense operar, és el que anomenem **radical**.

Propietats

Igual que les potències, les arrels de qualsevol índex compleixen aquestes propietats, encara que aquí només les aplicarem a radicals quadràtics.

La primera aplicació d'aquestes propietats la trobem en **introduir** i **extreure** factors d'un radical.

Introduir factors: S'eleva el factor a la potència que indica l'índex i s'escriu a dins.

$$x^8 \cdot \sqrt{x} = \sqrt{(x^8)^2 \cdot x} = \sqrt{x^{16} \cdot x} = \sqrt{x^{17}}$$

Extreure factors: Si algun factor del radicand té per exponent un nombre més gran que l'índex, es pot **extreure** fora del radical.

$$\sqrt{6^5} = 6^2 \cdot \sqrt{6}$$

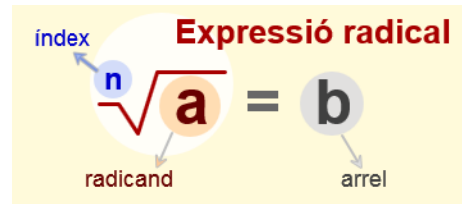
Es divideix l'exponent del radicand 5 entre l'índex 2, el quocient 2 és l'exponent de fora i el residu 1 és l'exponent de dins.

5		2
1		2

Calcular arrels

Per calcular l'arrel d'un nombre, primer es factoritza i s'escriu el nombre en forma de producte de potències i després s'extreuen tots els factors que sigui possible.

Si tots els exponents del radicand són múltiples de l'índex, l'arrel és exacta. Quan l'arrel no és exacta aquesta tècnica transforma el radical en una expressió *més manejable*, més comprensible.



$$\sqrt[5]{-32} = -2 \text{ perquè } (-2)^5 = -32$$

L'índex és 5
El radicand és -32
L'arrel és -2

$$\sqrt[6]{64} = 2 \text{ perquè } 2^6 = 64 \text{ i també}$$

$$\sqrt[6]{64} = -2 \text{ perquè } (-2)^6 = 64$$

L'índex és 6
El radicand és 64
Les arrels són 2 i -2

$$\sqrt{2} = 1,414213562373 \dots$$

L'arrel té infinits decimals que no es repeteixen periòdicament, és un nombre **irracional**.

Encara que sabem que en aquest cas hi ha dues arrels oposades, considerarem només la positiva, la negativa la indicarem amb un signe menys davant del radical.

Arrel d'un producte

L'arrel d'un producte és igual al producte de les arrels dels factors.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Arrel d'un quocient

L'arrel d'un quocient és igual al quocient de les arrels del dividend i del divisor.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Arrel d'una potència

L'arrel d'una potència és igual a l'arrel de la base elevada a la mateixa potència.

$$\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$$

Arrel d'una arrel

L'arrel d'una arrel és una altra arrel d'índex el producte dels índexs i el mateix radicand.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt{x^{16} y^{14}} = x^8 \cdot y^7$$

$$\sqrt{\frac{4}{729}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{729}} = \frac{2}{27}$$

UN EXEMPLE MÉS

$\sqrt{972} = \sqrt{2^2 \cdot 3^5} = 2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3} = 18\sqrt{3}$

Pas 1: Factoritzar

$$972 = 2^2 \cdot 3^5$$

972		2
486		2
243		3
81		3
27		3
9		3
3		3
1		

Pas 2: Extreure

2		5
0		1 2

$$\sqrt{48} + \sqrt{27} + \sqrt{48} =$$

Es factoritzen els radicands $= \sqrt{3 \cdot 2^4} + \sqrt{3^3} + \sqrt{3 \cdot 2^4} =$

S'extreuen factors $= 2^2 \sqrt{3} + 3 \sqrt{3} + 2^2 \sqrt{3} =$

Els radicals són semblants, podem sumar $= 4 \sqrt{3} + 3 \sqrt{3} + 4 \sqrt{3} =$

Es treu factor comú el radical i es fa l'operació $= (4 + 3 + 4) \sqrt{3} = 11 \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \sqrt{60} \cdot \sqrt{45} &= \\ &= \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \sqrt{3^2 \cdot 5} = \\ &= \sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{3} = 30\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{6}} &= \\ = \sqrt{\frac{126}{6}} &= \sqrt{\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 7}{2 \cdot 3}} = \sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{21} \end{aligned}$$

Operacions amb radicals: Sumar i restar

Dues expressions radicals són **semblants** si tenen el mateix índex i el mateix radicand. Per exemple:

$$3\sqrt{2} \text{ i } -5\sqrt{2} \text{ o } 2\sqrt[3]{5} \text{ i } 9\sqrt[3]{5}$$

Només es poden *sumar* o *restar* radicals semblants. Per això es treu factor comú el radical corresponent i es sumen o resten els coeficients.

En ocasions, podem sumar radicals que no són semblants, extraient algun factor per convertir-los en semblants.

Operacions amb radicals: Producte i quocient

Basant-nos en les propietats dels radicals observem que dues expressions radicals es poden **multiplicar** o **dividir** només si tenen el **mateix índex**.

Quan passa això el resultat és un radical del mateix índex i de radicand el producte o el quocient, respectivament, dels radicands.

Després comprovarem si es pot extreure algun factor del radical per simplificar l'expressió.

EXERCICIS resoltos

40. Calcula a) $\sqrt{72900}$

$$\sqrt{72900} = \sqrt{2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^2} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$$

b) $\sqrt{1296}$

$$\sqrt{1296} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

c) $\sqrt{7056}$

$$\sqrt{7056} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

41. Calcula a) $\sqrt{32} + \sqrt{8} - \sqrt{128}$

$$\sqrt{2^5} + \sqrt{2^3} - \sqrt{2^7} = 2^3 \sqrt{2} + 2 \sqrt{2} - 2^3 \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

b) $9\sqrt{63} + \sqrt{448}$

$$9\sqrt{3^2 \cdot 7} + \sqrt{2^6 \cdot 7} = 9 \cdot 3 \sqrt{7} + 2^3 \sqrt{7} = 35\sqrt{7}$$

c) $\sqrt{5} + 2\sqrt{45} - \sqrt{20}$

$$\sqrt{5} + 2\sqrt{3^2 \cdot 5} - \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 17\sqrt{5}$$

42. Calcula a) $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x^5}$

$$\sqrt{x^3 \cdot x^5} = \sqrt{x^8} = x^4$$

b) $\sqrt{128} \cdot \sqrt{32}$

$$\sqrt{128 \cdot 32} = \sqrt{2^7 \cdot 2^5} = \sqrt{2^{12}} = 2^6 = 64$$

c) $\sqrt{192} \cdot \sqrt{8}$

$$\sqrt{192 \cdot 8} = \sqrt{2^6 \cdot 3 \cdot 2^3} = \sqrt{2^9 \cdot 3} = 2^4 \sqrt{6} = 16\sqrt{6}$$

43. Calcula a) $\frac{\sqrt{x^{10}}}{\sqrt{x^7}}$

$$\frac{\sqrt{x^{10}}}{\sqrt{x^7}} = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$$

b) $\frac{\sqrt{1024}}{\sqrt{64}}$

$$\frac{\sqrt{1024}}{\sqrt{64}} = \sqrt{\frac{2^{10}}{2^6}} = \sqrt{2^4} = 2^2 = 4$$

c) $\frac{\sqrt{5832}}{\sqrt{81}}$

$$\frac{\sqrt{5832}}{\sqrt{81}} = \sqrt{\frac{3^6 \cdot 2^3}{3^4}} = \sqrt{3^2 \cdot 2^3} = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Nombres racionals

6. Mesura d'errors

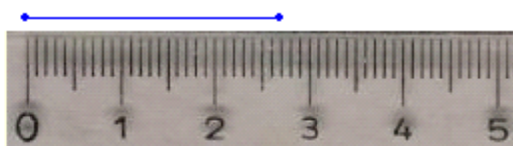
Aproximacions

A la vida real se solen presentar situacions en les quals no es pot, o no interessa realitzar càlculs amb valors exactes, ja sigui perquè aquests no es coneixen, o bé perquè la informació que ofereix el resultat exacte és irrellevant. En aquestes situacions es recorre al càlcul amb aproximacions. A l'escena de la dreta se't mostren algunes d'aquestes situacions en la vida real.

La manera més habitual d'efectuar una aproximació és l'anomenada **arrodoniment**. Aquesta operació es pot aplicar a nombres enters o a decimals. El concepte d'arrodoniment es bastant intuïtiu i ho entendràs perfectament a partir dels exemples i dels exercicis resolts.

Hi ha altres formes d'aproximació, però les veurem amb més detall el proper curs.

Aprox. per defecte: 2,6 Aprox. per excés: 2,7
 Valor més probable: 2,65



Error absolut i error relatiu

Presentem aquí un seguit de mesures que s'utilitzen per controlar els errors en els càlculs aproximats.

- **Error absolut:** És la diferència (en valor absolut) entre el valor exacte i l'aproximat. Té les mateixes unitats que els valors que s'utilitzen.
- **Cota d'error:** És la longitud de l'interval, a l'entorn del valor aproximat, en el qual es pot trobar el valor exacte. Aquesta mesura s'utilitza quan no es coneix el valor exacte.
- **Error relatiu:** És el quocient entre l'error absolut i el valor exacte. No té unitats i es pot expressar també en forma de percentatge. Quan el valor exacte no es coneix, es pot calcular l'error relatiu dividint la cota d'error pel valor aproximat.

Hem realitzat una consulta a Internet utilitzant diversos cercadors i hem obtingut els resultats que veus a sota. Observa que engabem tots els fa servir la paraula **aproximadament**.

Google: 120.000.000. Arrodoniment a les desenes de mil·lió. El valor exacte es trobarà entre 115.000.000 i 125.000.000.
 Ask: 26.900.000. Arrodoniment a les centenes de mil·lió. El valor exacte es trobarà entre 26.000.000 i 26.900.000.
 Yahoo!: 269.000.000. Arrodoniment a les unitats de mil·lió. El valor exacte es trobarà entre 268.500.000 i 269.500.000.

El valor exacte no és important aquí. El valor aproximat és suficient i ens permet comparar uns cercadors amb d'altres.

A sota tens una factura d'una editorial per la venda d'un llibre. En ella s'indica que el preu de l'exemplar sense IVA és de 34'62€ al qual s'hi ha de sumar un 4% d'IVA.

34'62 · 0'04 = 1'3848, però com que la menor unitat monetària és el cèntim, a la factura s'arrodonex la quantitat a les centèsimes, o sigui a 1'38€.

EDITORIAL AVD				FACTURA	
C.I.F.: Tel.: Fax: Web:			CLIENTE: nombre y apellidos Dirección: N.I.F.:		
Número factura	Fecha	Referencia			
000000	dó/mes/año	0000000			
Cantidad	Código	Artículo	Precio por unidad	% IVA	Subtotal sin IVA
1	84-609-1019-9	CÓDIGO CIVIL. (Leyes con márgenes)	34'62	4	34'62
Total sin IVA					34'62
Descuento	%	Dto P. Pago	IVA %	Base imponible	Importe IVA
			4 %	34'62	1'38
TOTAL FACTURA					36'00 €
Forma de Pago: ingreso previo en cuenta					
PAGADO					

Tornem als exemples de l'apartat anterior.

EXEMPLE 1 (Clica sobre la imatge per veure l'escena)

A l'exemple de la factura l'IVA era el 4% de 34'62 €, o sigui,

$$0'04 \cdot 34'62 = 1'3848 \text{ €} \approx 1'38 \text{ €}$$

Valor exacte de l'IVA: 1'3848
 Valor aproximat: 1'38

ERROR ABSOLUT = |1'3848 - 1'38| = 0'0048 €
ERROR RELATIU = $\frac{0'0048}{1'3848} \approx 0'003466 \approx 0'35 \%$

L'error relatiu és més significatiu:
 si el valor exacte hagués estat 0'0148 i l'aproximat 0'01, l'error absolut seria el mateix: 0'0048, però el relatiu seria $\frac{0'0048}{0'01} = 0'48 = 48 \%$!!!!!

EXEMPLE 2

Resultats Google:
 Valor exacte: DESCONEGUT
 Valor aproximat: 120000000

Resultats Ask:
 Valor exacte: DESCONEGUT
 Valor aproximat: 26.900.000

Sense conèixer el valor exacte no podem trobar l'error absolut, però les cues de zeros suggereixen un arrodoniment a les desenes de mil·lió a Google i a les centenes de mil·lió a Ask. Els valors exactes es trobaran entre 115.000.000 i 125.000.000 per a Google i entre 26.850.000 i 26.950.000 per a Ask.

Google
COTA D'ERROR = |125000000 - 120000000| = 5000000
ERROR RELATIU = $\frac{5000000}{120000000} \approx 0'0417 \approx 4'17 \%$

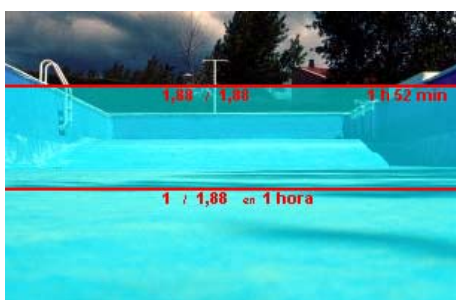
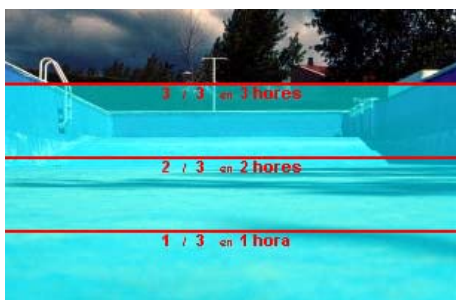
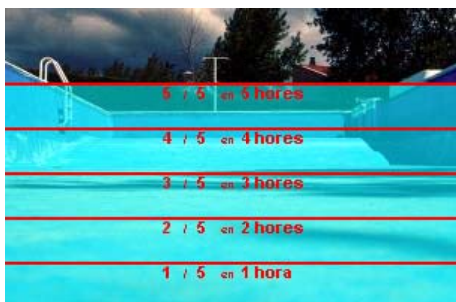
Ask
COTA D'ERROR = |26950000 - 26900000| = 50000
ERROR RELATIU = $\frac{50000}{26900000} \approx 0'001859 \approx 0'19 \%$

EXERCICIS resolts

44. Arrodoneix a les centèsimes 171,39664703 171,40
45. Arrodoneix a les deumilionèsimes i passa a notació científica 0,0065439
 $0,0065 = 6,5 \cdot 10^{-3}$
46. Arrodoneix a les desenes de miler i passa a notació científica 859 417 590
 $859.420.000 = 8,5942 \cdot 10^8$
47. 460 000 000 és un arrodoniment a les desenes de milió de 456 099 072. Calcula l'error absolut i el relatiu.

$$\text{Error absolut} = |460\ 000\ 000 - 456\ 099\ 072| = 3\ 900\ 928$$

$$\text{Error relatiu} = 3\ 900\ 928 / 456\ 099\ 072 \approx 0,0085528085 \approx 0,86\%$$



7. Aplicacions

Problemes d'aplicació

PROBLEMA 1

La piscina d'un xalet disposa de dues entrades d'aigua per omplir-la. Si només s'utilitza la primera, la piscina triga 5 hores en omplir-se. Si només s'utilitza la segona, triga 3 hores. Quant trigarà en omplir-se amb les dues aixetes a la vegada?

SOLUCIÓ:

Si triga 5 hores en omplir-se amb la primera aixeta, cada hora omplirà $1/5$ del total de la piscina.

Si amb la segona triga 3 hores, cada hora omplirà $1/3$ de la piscina.

Si estan obertes les dues, cada hora omplirà

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$$

de la piscina, per tant trigarà en omplir-la $15/8$ d'hora, és a dir, 1,87 hores = **1 hora 52 minuts**.

Nombres racionals

PROBLEMA 2.

El **triangle de Sierpinski** és una figura geomètrica d'un tipus especial anomenat **fractal**. Es construeix de forma recursiva a partir d'un triangle equilàter.

El triangle de Sierpinski de **nivell 1** s'obté traient-li al triangle anterior el triangle equilàter que s'obté unint els punts mitjans de cada costat.

El de **nivell 2** s'obté repetint el procediment sobre els tres triangles que formen el triangle de Sierpinski de nivell 1.

El de **nivell 3** és el mateix aplicat al nivell 2 i el procediment segueix de forma indefinida. *De fet, l'autèntic triangle de Sierpinski és la figura geomètrica que resulta d'aplicar aquest procediment infinites vegades.*

Si l'àrea del triangle inicial és d' 1 m^2 , quina és l'àrea del triangle de Sierpinski de nivell 4?

SOLUCIÓ:

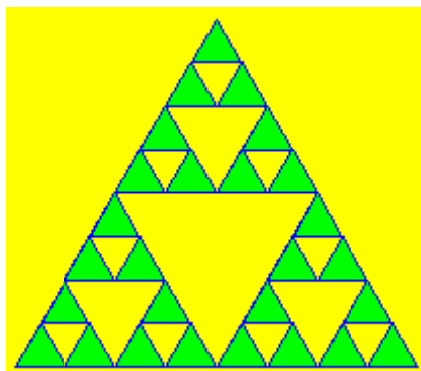
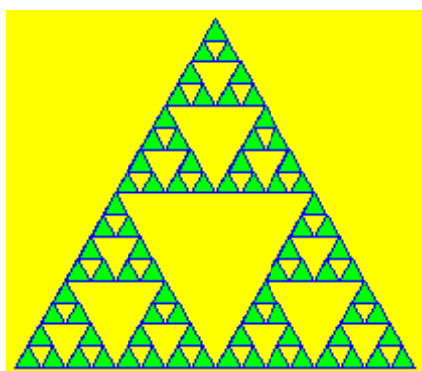
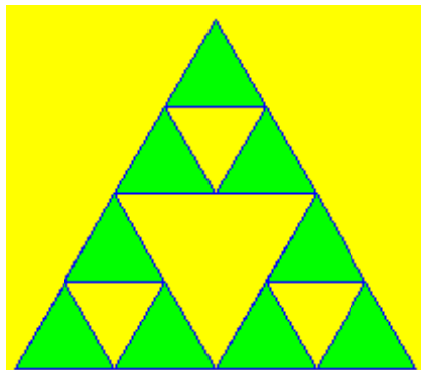
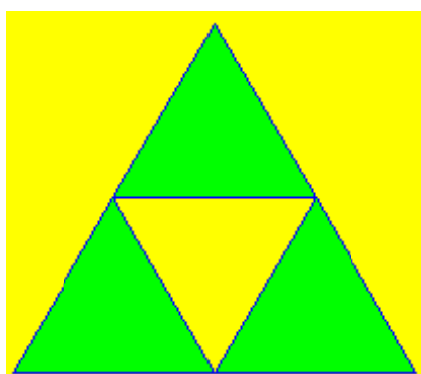
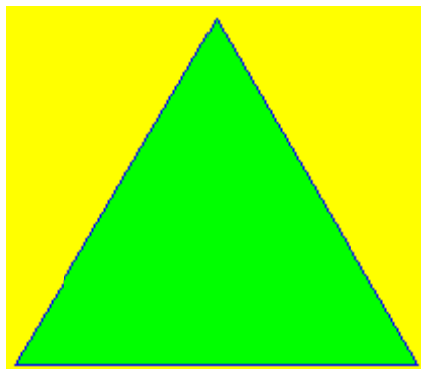
Com es pot veure fàcilment, l'àrea del triangle de cada nivell són les tres quartes parts de l'àrea del nivell anterior, així,

l'àrea del triangle de nivell 1 serà $\frac{3}{4} \text{ m}^2 = 0,75 \text{ m}^2$

l'àrea del triangle de nivell 2 serà: $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \text{ m}^2$

la de nivell 3 serà $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \text{ m}^2$ i la de nivell 4 serà

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256} \text{ m}^2 = 0,3164 \text{ m}^2$$



PROBLEMA 3

L'aire pressiona sobre cada cm^2 de la superfície terrestre amb la força d'1 kg. Si la superfície del planeta és d'uns 510 milions de km^2 , quant pesa l'atmosfera?



Si el planeta pesa unes $6 \cdot 10^{21}$ tm, quantes vegades és més pesat el planeta que l'atmosfera?

SOLUCIÓ:

$$1 \text{ km}^2 = 10^{10} \text{ cm}^2$$

$$510.000.000 \text{ km}^2 = 5,1 \cdot 10^8 \text{ km}^2 = 5,1 \cdot 10^8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 = 5,1 \cdot 10^{18} \text{ cm}^2.$$

Com que el pes sobre cada cm^2 és d'1 kg,

L'atmosfera pesa $5,1 \cdot 10^{18}$ kg

$$1 \text{ tm} = 1.000 \text{ kg} = 10^3 \text{ kg}$$

$$6 \cdot 10^{21} \text{ tm} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}. \quad 10^{24}/10^{18} = 10^6 = 1.000.000$$

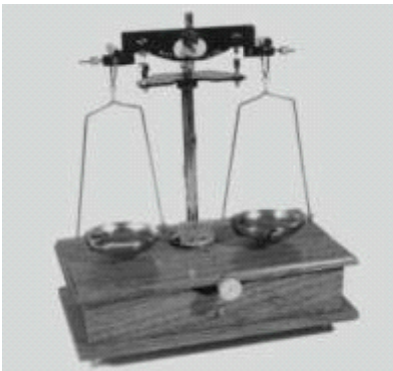
El planeta és, aproximadament, un milió de vegades més pesat que l'atmosfera.

Amb una mica més de precisió:

$$(6/5,1) \cdot 10^6 = 1,18 \cdot 10^6 \text{ veces.}$$

PROBLEMA 4.

En joieria s'utilitza l'**unça troy (oz)** com unitat de pes per l'or. Una unça troy pesa 31,1034768 g. Si el preu de l'or és de 273 €/oz, calcula el preu d'un gram d'or.



Un joier que treballa l'or disposa d'una balança que comet un error màxim de 5 centèsims de gram per gram. Amb el preu anterior, quant es pot guanyar o perdre per cada unça i per cada gram a causa de l'error?

SOLUCIÓ:

1 gram val $273/31,1034768 \approx 8,78$ €

(Arrodonim als centèsims)

Un error de 0,05 g per gram dóna un error relatiu de $0,05/1 = 0,05 = 5\%$, per tant, el joier pot guanyar el 5% de 273€ en una unça i el 5% de 8,78€ en un gram:

$$5\% \text{ de } 273\text{€} = 0,05 \cdot 273 \approx \mathbf{13,65 \text{ €/oz}}$$

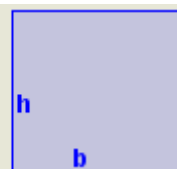
$$5\% \text{ de } 8,78\text{€} = 0,05 \cdot 8,78 \approx \mathbf{0,44\text{€/g}}$$

Nombres racionals



Per practicar

1. L'ajuntament d'una ciutat ven $\frac{1}{3}$ d'un solar a una empresa constructora i $\frac{3}{4}$ del que queda a una altra, queden sense vendre 5 ha. Quina superfície té el solar?
2. L'import de la reparació d'un cotxe en un taller és de 382€ sense IVA. Quant puja la factura amb IVA? (L'IVA és del 16%)
3. Per un vestit hem pagat 280€ i, a l'etiqueta ens indiquen que se li ha aplicat una rebaixa del 20%. Quin era el preu del vestit abans del descompte? (Arrodoneix el resultat a cèntims).
4. Quina quantitat de vi hi ha emmagatzemat en onze caixes i un terç si cada caixa té 24 ampolles de tres quarts de litre cada una?
5. Una font omple un dipòsit en 4 hores i una altra en 13 quarts d'hora. Quina fracció del dipòsit omple cada una per separat en una hora? I les dues juntes? Quant trigaran en omplir-lo les dues a la vegada?
6. En un magatzem venen cafè en paquets d' $\frac{1}{4}$ kg i descafeïnat en paquets d' $\frac{1}{3}$ kg. El preu per kg de les dues varietats és el mateix. Un bar ha comprat 23 paquets de cafè normal i 21 de descafeïnat, en total ha pagat 71,46€. Quin és el preu del kg de cafè?
7. Vull fer una còpia de seguretat dels arxius del meu PC que ocupen 188 GB Quants DVD's de 4,5 GB necessito com a mínim per fer-ho? I si utilitzo CD's de 700 MB? I amb disquets antics d'1,4 MB? I amb els antiquíssims de 360 KB? (Utilitza la taula adjunta).
8. Sabent que el radi del planeta Júpiter és de 71 492 km, calcula el seu volum. Si la seva massa és d' $1,9 \cdot 10^{27}$ kg, calcula la seva densitat en g/cm^3 .
9. En condicions normals, en un mol de nitrogen hi ha $6,022 \cdot 10^{23}$ molècules de nitrogen i pesen 28 grams. Calcula el pes en grams d'una molècula de nitrogen.
10. Mesurem una parcel·la rectangular amb una corda molt llarga amb senyals a cada metre (veure mesures en el quadre adjunt). Repetim la mesura amb un teodolit, millorant la precisió. Calcula les cotes d'error que es produeixen en calcular la superfície en cada cas. Amb el preu que s'indica, calcula les majors diferències de cost en cada cas segons la mesura que agafem.



Amb la corda:

b es troba entre 678 m i 679 m

h es troba entre 632 m i 633 m

Amb el teodolit:

b es troba entre 67842 cm i 67843 cm

h es troba entre 63254 cm i 63255 cm

Preu del $\text{m}^2 = 1021 \text{ €}$

La unitat mínima d'informació és el bit (1 b) (Amb b minúscula)

1 Byte = 1 B (Amb B majúscula) = 8 b

1 KiloByte = 1 KB = 2^{10} B = 1024 Bytes
(aproximadament mil)

1 MegaByte = 1 MB = 2^{10} KB = 2^{20} B
(aproximadament un milió)

1 GigaByte =
1GB = 2^{10} MB = 2^{20} KB = 2^{30} B
(aproximadament mil milions)

11. Una empresa de demoscòpia ha realitzat una enquesta d'intenció de vot, i ha obtingut els resultats que veus a sota. Amb aquestes dades, la cadena de televisió ABCD informa que el PBP* guanyarà les eleccions. Per altra banda, la cadena DCBA diu que hi ha un empat tècnic entre el PBP i el PTC* Qui creus que té raó?

^ PBP: Partit per Baixar l'Atur

^ PTC: Partit pel Treball a Casa

Intenció de vot:

PBP = 41,86 %

PTC = 39,38 %

Marge d'error de l'enquesta: **1,56 %**

Per saber-ne més



Quin és el nombre següent d'un nombre racional?

Recorda que aquesta era la pregunta que plantejàvem quan hem començat el tema. Per fixar idees podem començar pel zero. Quin és el següent del zero? Algú podria dir que l'u, però se li pot respondre que el $0,5 = 1/2$ és un nombre racional que està entre el zero i l'u. Llavors, podem dir que el 0,1 és el següent. Però, novament, podem argumentar que el $0,05 = 1/20$ és un nombre racional que està entre zero i 0,1. I així podríem seguir indefinidament.

De fet, es pot demostrar que donades dues fraccions

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

la fracció que s'obté sumant els numeradors i sumant els denominadors està entre les dues, és a dir:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Per tant, sembla clar que és impossible saber quin és el següent d'un nombre racional qualsevol.

O potser sí és possible per a alguns? No sembla evident que el següent del nombre $9,129999999999\dots$ és el nombre 9,13?

Analitzem això amb més detall. El primer és un decimal periòdic mixt i el segon és un decimal exacte.

La fracció generatriu de $9,129999\dots$ és $\frac{9129 - 912}{900} = \frac{8217}{900} = \frac{913}{100}$

Per altra banda, la fracció generatriu de 9,13 és $\frac{913}{100}$

Per tant, resulta que **no és el següent, és el mateix nombre.**

Nombres racionals



Recorda el més important

Els nombres racionals

Un **nombre racional** és una fracció i totes les seves equivalents.

Tot nombre racional es pot expressar com un **decimal periòdic** i a l'inrevés.

Els nombres racionals estan ordenats i es poden representar en una recta. Els nombres enters també són nombres racionals.

Operacions amb fraccions

Per **sumar i restar** es redueixen a denominador comú, es deixa aquest denominador i se sumen o es resten els numeradors.

Per **multiplicar i dividir**:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Per **eleva a potències**:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

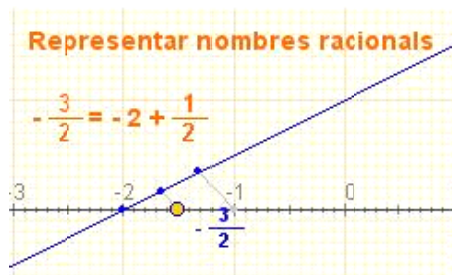
Prioritats en les operacions

- Primer s'efectuen les potències d'esquerra a dreta.
- Després els productes i quocients, també d'esquerra a dreta.
- Finalment, les sumes i restes d'esquerra a dreta.
- Les prioritats es poden alterar amb parèntesis.

Notació científica

Els nombres molt grans o molt petits s'expressen en notació científica **$x \cdot 10^n$**

Per operar amb nombres en notació científica apliquem les propietats de les potències.



Potències

Si $n > 0$, $a^n = a \cdot a \cdot \dots$ n vegades $\dots \cdot a$

Si $a \neq 0$, $a^0 = 1$ i $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

En particular:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Radicals

$$\sqrt[n]{a} = r \quad \text{si} \quad r^n = a$$

Propietats

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Mesura d'errors

L'**error absolut** és la diferència positiva entre el valor exacte i el valor aproximat.

L'**error relatiu** és el quocient entre el valor aproximat i l'exacte, se sol expressar en %.

La **cota d'error** d'una aproximació és l'error absolut màxim possible.

Autoavaluació



1. Escriu la fracció generatriu del nombre 6,292929....

2. Ordena de menor a major les següents fraccions:

$$\frac{-9}{4}, \frac{-1}{11}, \frac{3}{5}, -1, \frac{-9}{10}$$

3. Calcula el resultat de les següents operacions:

$$\frac{-9}{4} + \frac{3}{7} \cdot \frac{-1}{11}$$

4. Calcula el resultat:

$$\sqrt{507} - \sqrt{75}$$

5. Calcula el resultat de les següents operacions:

$$\frac{\frac{-9}{4}}{\frac{3}{7} + \frac{-1}{11}}$$

6. Calcula el resultat de $\left(\frac{-11}{12}\right)^{-2}$

7. Simplifica l'expressió següent deixant el resultat en forma de productes o de quocients de potències d'exponent positiu:

$$\left(\frac{11^{-9} \cdot 12^{-1}}{11^{-7} \cdot 12^3}\right)^{-9}$$

8. Calcula $(5,4 \cdot 10^{-9}) \cdot (7,2 \cdot 10^{-7})$

9. Arrodoneix el nombre $\sqrt{17}$ a les deu mil·èsimes.

10. Un obrer triga 4 dies en fer una tanca. Un altre triga 7 dies. Quant trigarien treballant junts?

Soluciones dels exercicis per practicar

1. 30 ha.
2. 443,12 €
3. 350,00 €
4. 206 litres de vi.
5. a) La primera omple $\frac{1}{4}$ del dipòsit en una hora i la segona $\frac{4}{13}$.
b) Les dues juntes omplen $\frac{29}{52}$ en una hora.
c) Triguen $\frac{52}{29}$ hores en omplir-lo (1 h 47 min aprox.)
6. 5,60 €/kg.
7. 42 DVD's, 276 CD's, 137.509 discos de 1,4 MB, 547590 discos de 360 KB.
8. $1,53 \cdot 10^{15}$ Km³. 1,24 g/cm³.
9. $4,65 \cdot 10^{-23}$ g
10. a) Amb la corda la fita d'error és 1 m, amb el teodolit 1 cm.
b) La diferència del preu és de 1 091 264 € amb la corda i de 10 912,83 € amb el teodolit.
11. Té raó la cadena DCBA, perquè el pitjor resultat possible del PBP (partit guanyador a priori) és 40,30% dels vots, pitjor que el millor resultat possible del PTC 40,94%.

Soluciones AUTOAVALUACIÓ

1. 623/99
2. $-9/4 < -1 < -9/10 < -1/11 < 3/5$
3. -705/308
4. $8\sqrt{3}$
5. -693/104
6. 144/121
7. $11^{18} \cdot 12^{36}$
8. $3,888 \cdot 10^{-15}$
9. 4,1231
10. 2 dies i 13 hores