

Objectius

En aquesta quinzena aprendràs a:

- Distingir els experiments aleatoris dels que no ho són.
- Trobar l'espai mostral i diferents esdeveniments d'un experiment aleatori.
- Realitzar operacions amb esdeveniments.
- Determinar si dos esdeveniments són compatibles o incompatibles.
- Calcular la probabilitat d'un esdeveniment mitjançant la regla de Laplace.
- Calcular algunes probabilitats mitjançant l'experimentació.
- Conèixer i aplicar les propietats de la probabilitat.

Abans de començar

1. Experiments aleatoris pàg. 4
Espai mostral i esdeveniments
Tècniques de recompte
Operacions amb esdeveniments
Propietats
2. Probabilitat pàg. 7
Probabilitat d'un esdeveniment
Regla de Laplace
Propietats de la probabilitat
Probabilitat experimental
Simulació

Exercicis per practicar

Per saber-ne més

Resum

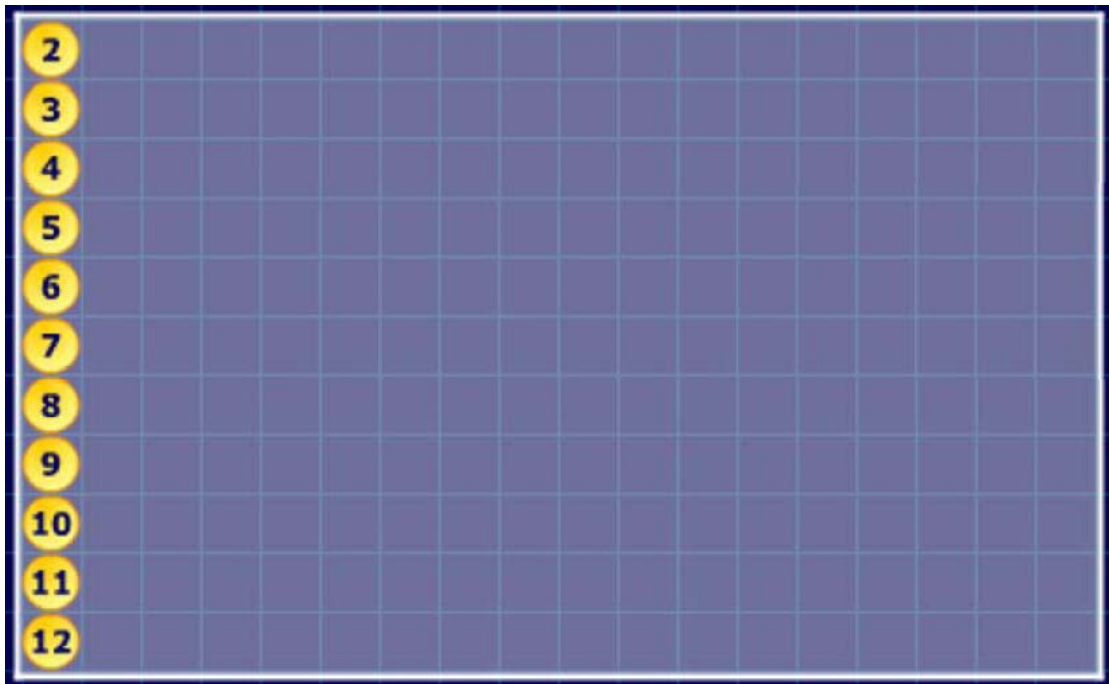
Autoavaluació

Activitats per enviar al tutor

Abans de començar

"En el fons la teoria de la probabilitat és només sentit comú expressat amb nombres".

Pierre Simón de Laplace



Investiga jugant

Tirem dos daus, la fitxa numerada amb la suma dels dos resultats avança una casella. Totes tenen la mateixa probabilitat d'arribar primer? Tu per quina apostaries? Tira els daus i comprova-ho.

Sabies que la paraula atzar prové de l'àrab "al zhar", nom amb el que es designaven els daus, per la flor de taronger que portaven a la cara?



Probabilitat

1. Experiments aleatoris

Espai mostral i esdeveniments

Un **experiment aleatori** és aquell que, abans de realitzar-lo, no es pot predir el resultat que s'obindrà. En cas contrari, es diu determinista.

Encara que en un experiment aleatori no sapiguem el que ocorrerà en realitzar una "prova" si que coneixem per endavant tots els seus possibles resultats.

- L'**espai mostral** és el conjunt de tots els resultats possibles d'un experiment aleatori. Se sol designar amb la lletra **E**. Cadascun dels possibles resultats s'anomena **esdeveniment elemental**.
- Anomenarem **esdeveniment** a qualsevol subconjunt de l'espai mostral. El mateix espai mostral és un esdeveniment anomenat **esdeveniment segur** i el conjunt buit, \emptyset , és l'**esdeveniment impossible**.

\emptyset : símbol amb el que es designa el conjunt buit o que no conté cap element.

Tècniques de recompte

En moltes ocasions un experiment aleatori està format per la successió d'altres més senzills, se'n diu compost; és el cas de "tirar dos daus", "llançar dues o més monedes", "treure diverses cartes d'una baralla",... En aquests casos per obtenir l'espai mostral es pot utilitzar alguna d'aquestes tècniques:

- Construir una **taula de doble entrada**, si es combinen dos experiments simples.
- Fer un **diagrama d'arbre**, més útil si es combinen dos o més experiments simples.

Observa que si el primer experiment té **m** resultats diferents i el segon **n**, el nombre de resultats per a la combinació d'ambdós experiments és **m·n**.

En l'experiment aleatori de "tirar un dau cúbic" hi ha 6 possibles resultats:

Espai mostral
 $E = \{ \text{1, 2, 3, 4, 5, 6} \}$

Alguns esdeveniments
 $A = \{ \text{2, 4, 6} \}$ "sortir senar"
 $B = \{ \text{3, 6} \}$ "sortir múltiple de 3"
 $C = \{ \text{6} \}$ "sortir un 6"

En l'experiment aleatori de "llançar dues monedes" hi ha 4 possibles resultats

Espai mostral
 $E = \{ \text{CC, CA, AC, CC} \}$

Alguns esdeveniments
 $A = \{ \text{CA, AC, CC} \}$ "al menys una cara"
 $B = \{ \text{CC, CA} \}$ "la 1a és cara"
 $C = \{ \text{CC} \}$ "cap és una cara"

TAULA de doble entrada

Experiment: Tirar dos daus

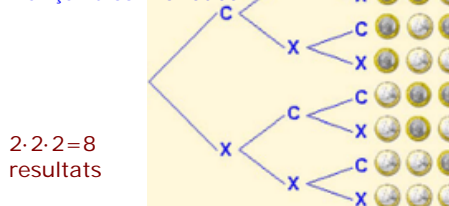
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

6·6=36 resultats

Diagrama d'ARBRE

Experiment:

Llançar tres monedes



Anomenem **permutacions** de **n** elements (P_n) a les diferents formes d'ordenar aquests n elements. Conèixer el seu nombre és útil per realitzar determinats problemes de recompte.

Vegem com es calcula amb un exemple en el qual volem ordenar n boles de diferents colors:

- 1 bola només es pot ordenar de 1 manera.
- 2 boles es poden ordenar de 2 maneres.
- 3 boles, hi ha 6 formes d'ordenar-les. La 1a posició es pot ocupar de 3 maneres, en cada cas la 2a de 2 i la 3a de 1.
- 4 boles es podran ordenar de 4·3·2·1 = 24 formes i seguint amb aquest raonament n boles es poden ordenar de

$$P_1 = 1$$

$$P_2 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

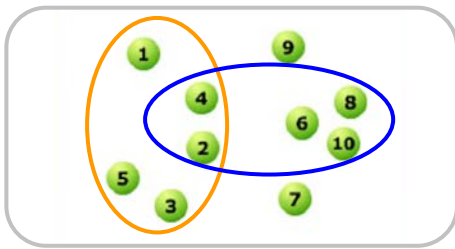
$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P_n = n!$$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
 es llegeix "factorial de n"

Aquest producte s'escriu de forma més simplificada **n!** i s'anomena **factorial de n**.

Experiment aleatori: *Extreure una bola i anotar el número.*



A = "sortir menor que 6"

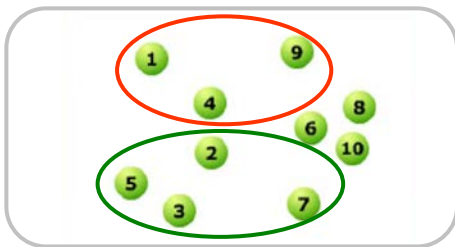
B = "sortir parell"

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \bar{A} = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad \bar{B} = \{1, 2, 3\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$$

$$A \cap B = \{2, 4\}$$



C = "sortir quadrat perfecte"

D = "sortir nombre primer"

A i B incompatibles

Operacions amb esdeveniments

Donats dos esdeveniments A i B d'un espai mostral E, anomenarem:

- Esdeveniment **contrari** de A al que ocorre quan no ocorre A, ho indicarem \bar{A} .

El formen els esdeveniments elementals que no estan en A.

- Esdeveniment **unió** de A i B, $A \cup B$, és el que ocorre quan ocorre A o B, almenys un dels dos.

Es forma ajuntant els esdeveniments elementals de A i B.

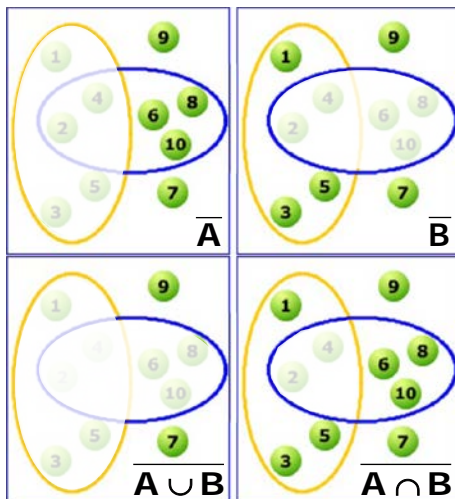
- Esdeveniment **intersecció** de A i B, $A \cap B$ a l'**esdeveniment** que ocorre quan ocorren **A i B** a la vegada.

Es forma amb els esdeveniments elementals comuns.

Quan la intersecció de dos esdeveniments és l'esdeveniment impossible, és a dir, que no pot succeir simultàniament mai, es diu que ambdós són **incompatibles**.

A i B incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

Atenció: No has de confondre esdeveniments contraris i esdeveniments incompatibles; un esdeveniment i el seu contrari són sempre incompatibles, no poden ocórrer a la vegada, però dos esdeveniments incompatibles no tenen perquè ser contraris.



$$\bar{A} = \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad \bar{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{7, 9\} = \overline{A \cup B}$$

$$\overline{A \cap B} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \overline{A \cap B}$$

Propietats de les operacions amb esdeveniments

La unió i intersecció d'esdeveniments, i l'esdeveniment contrari compleixen:

- La unió d'un esdeveniment i el seu contrari és l'esdeveniment segur; la intersecció és l'esdeveniment impossible.

$$A \cup \bar{A} = E \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

- El contrari de \bar{A} és A
- El contrari de la unió és la intersecció dels contraris.

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

- El contrari de la intersecció és la unió dels contraris.

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

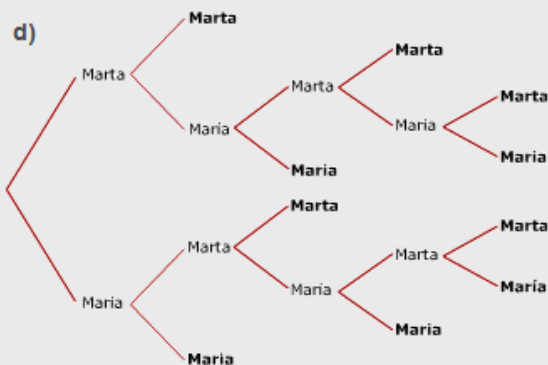
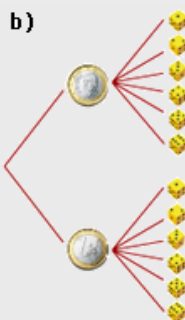
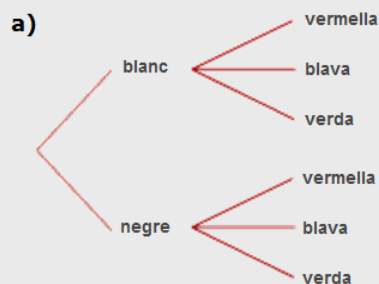
EXERCICIS resolts

- Indica si els següents experiments són aleatoris o no, en cas afirmatiu escriu l'espai mostral:
 - Treure una carta d'una baralla espanyola i anotar el coll.
 - Pesar un litre d'oli.
 - Mesurar la hipotenusa d'un triangle rectangle coneguts els catets.
 - Triar, sense mirar, una fitxa de dòmino.
 - Encertar el resultat d'un partit de futbol abans no es jugui.
 - Treure una bola d'una bossa amb 4 boles vermelles.
 - Treure una bola d'una bossa amb 1 bola vermella, 1 verda, 1 blava i 1 blanca.
 - Llançar a l'aire una moneda i observar el temps que tarda en arribar al terra.

SOLUCIÓ: Són aleatoris, ja que no podem conèixer per endavant el resultat, els següents:

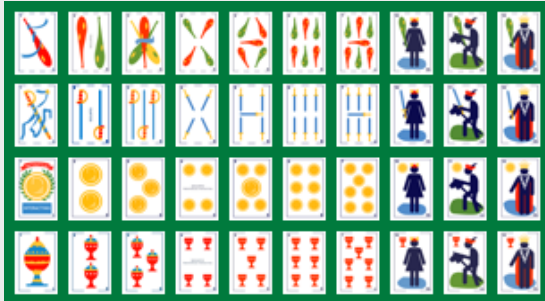
- Espai mostral: $E = \{OROS, COPAS, ESPASES, BASTOS\}$
- L'espai mostral està format per cada una de les 28 fitxes que componen el dòmino.
- Espai mostral: $E = \{1, X, 2\}$
- Espai mostral: $E = \{VERMELLA, VERDA, BLANCA, BLAVA\}$

- Calcula las possibilitats mitjançant un diagrama d'arbre:
 - En un equip de futbol-sala disposen per jugar de pantalons blancs o negres, i de camisetes vermelles, blaves o verdes. De quantes maneres es poden vestir per jugar?
 - Es tira una moneda i un dau, quins són els resultats possibles?
 - Es tira una moneda, si surt cara es treu una bola de l'urna A que conté una bola vermella, una blava i una verda; i si surt creu es treu de l'urna B en la que hi ha una bola vermella, una blava, una blanca i una negra. Escriu els possibles resultats.
 - La Marta i la Maria juguen un campionat de parxís, guanya la primera que guanyi dues partides seguides o tres d'alternes. De quantes maneres es pot desenvolupar el joc?



EXERCICIS resolts

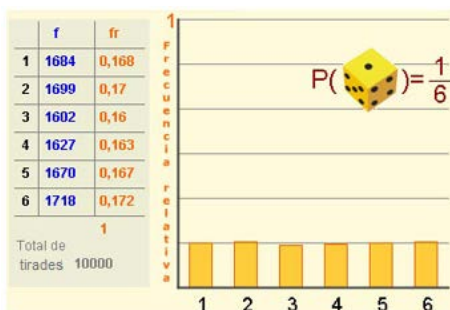
3. Considera l'experiment aleatori de treure una carta d'una baralla. Expressa amb unions i interseccions de A i de B, o amb el contrari, els següents esdeveniments:



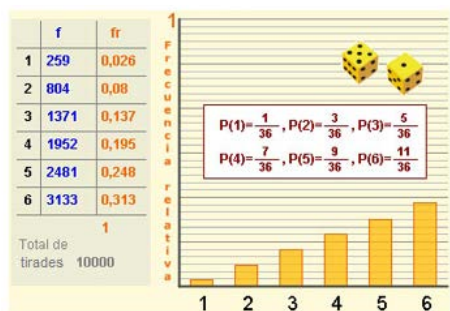
- a) A="sortir figura" B="sortir bastos"
"Que surti figura o sigui de bastos" = $A \cup B$
- b) A="sortir un rei" B="sortir copes"
"Sortir copes però que no sigui un rei" = $\bar{A} \cap B$
- c) A="sortir un as" B="sortir oros"
"Que no surti un as ni d'oros" = $\bar{A} \cap \bar{B}$
- d) A="sortir un rei" B="sortir espases"
"Sortir el rei d'espases" = $A \cap B$

4. Es treuen dues cartes de la baralla i es mira el coll. Indica quin, a, b o c, és l'esdeveniment contrari a S?

- | | | |
|---------------------------|---------------------------------|--|
| S = "Les dues són d'oros" | a) "Cap és d'oros" | En el primer cas la solució és l'opció c, el contrari que les dues siguin d'oros és que almenys una no ho sigui. |
| | b) "Almenys una és d'oros" | |
| | c) "Almenys una no és d'oros" | |
| S = "Cap és de copes" | a) "Les dues són de copes" | En el segon, b és l'opció correcta. |
| | b) "Almenys una és de copes" | |
| | c) "Almenys una no és de copes" | |



En tirar un dau moltes vegades, les freqüències relatives de cada cara s'estabilitzen al voltant de 1/6.



El gràfic mostra les freqüències relatives de cada resultat, obtingut al tirar dos daus i escollir el nre. major, al repetir l'experiment moltes vegades.

2. Probabilitat

Probabilitat d'un esdeveniment

La probabilitat d'un esdeveniment, S, indica el grau de possibilitat que ocorri aquest esdeveniment. S'expressa mitjançant un nombre comprès entre 0 i 1, i ho escrivim **P(S)**.

Si P(S) és proper a 0 l'esdeveniment és poc probable i serà més probable com més s'apropi a 1, que és la probabilitat de l'esdeveniment segur, P(E)=1.

Quan es repeteix un experiment aleatori moltes vegades, la **freqüència relativa** amb què apareix un esdeveniment tendeix a estabilitzar-se cap a un valor fix, a mesura que augmenta el nombre de proves realitzades.

Aquest resultat, conegut com **lleis dels grans nombres**, ens porta a definir la probabilitat d'un esdeveniment com el nombre cap al que tendeix la freqüència relativa en repetir l'experiment molts cops.

Probabilitat

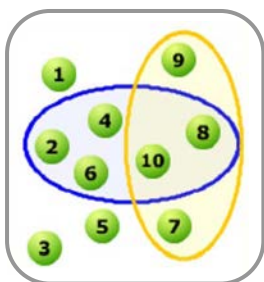
La regla de Laplace

Quan dos esdeveniments tenen la mateixa probabilitat de passar, en realitzar un experiment aleatori, es diuen **equiprobables**.

Si en un espai mostral tots els esdeveniments elementals són equiprobables, l'experiment es diu regular i la probabilitat d'un esdeveniment qualsevol A, es pot calcular amb la **Regla de Laplace**, segons la qual n'hi ha prou en comptar, i fer el quocient entre el nombre d'esdeveniments elementals que componen A i el nombre total d'esdeveniments elementals de l'espai mostral. Se sol enunciar així:

$$P(A) = \frac{\text{nre.casos favorables}}{\text{nre.casos possibles}}$$

EXEMPLE: En una urna hi ha 10 boles numerades de l'1 al 10, se'n treu una a l'atzar. Casos possibles: 10



✓ Quina és la probabilitat que sigui un nombre parell?

Casos favorables: 5

$$P(\text{nombre parell}) = \frac{5}{10} = 0,5$$

✓ Quina és la probabilitat que sigui un nombre major que 6?

Casos favorables: 4

$$P(\text{nre. major que 6}) = \frac{4}{10} = 0,4$$

Propietats de la probabilitat

En assignar probabilitats mitjançant la regla de Laplace o utilitzant la freqüència relativa pots comprovar que s'acompleix:

- $0 \leq P(A) \leq 1$. La probabilitat d'un esdeveniment és un nombre comprès entre 0 i 1.
- $P(E) = 1$, $P(\emptyset) = 0$. La probabilitat de l'esdeveniment segur és 1 i la de l'esdeveniment impossible és 0.
- La probabilitat de la unió de dos esdeveniments **incompatibles** és $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

A més d'aquestes propietats es dedueixen aquestes altres que resulten molt útils per calcular probabilitats:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En l'experiment de llançar tres monedes, hi ha 8 casos possibles:



A = "sortir tres cares"
Casos favorables: 1

$$P(A) = \frac{1}{8}$$

B = "sortir dues cares"
Casos favorables: 3

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

C = "almenys una cara"
Casos favorables: 7

$$P(C) = \frac{7}{8}$$

Es tiren dos daus i es tria el major dels nombres obtinguts.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	6
3	3	3	4	5	6	6
4	4	4	4	5	6	6
5	5	5	5	5	6	6
6	6	6	6	6	6	6

Hi ha 36 casos possibles.

$$P(1) = \frac{1}{36}$$

$$P(2) = \frac{3}{36}$$

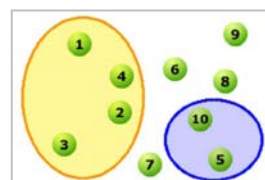
$$P(3) = \frac{5}{36}$$

$$P(4) = \frac{7}{36}$$

$$P(5) = \frac{9}{36}$$

$$P(6) = \frac{11}{36}$$

A = "Treure un nre. menor que 5"
B = "Treure un nre. múltiple de 5"
A i B incompatibles



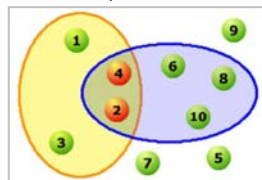
$$P(A) = 0,4$$

$$P(B) = 0,2$$

$$P(A \cup B) = 0,6$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

A = "Treure un nre. menor que 5"
B = "Treure un nre. parell"
A i B compatibles



$$P(A) = 0,4$$

$$P(B) = 0,5$$

$$P(A \cap B) = 0,2$$

$$P(A \cup B) = 0,7$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

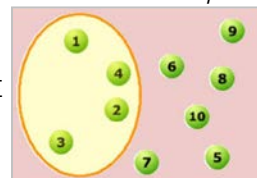
A = "Treure un nre. menor que 5"

$$P(A) = 0,4$$

$$P(\bar{A}) = 0,6$$

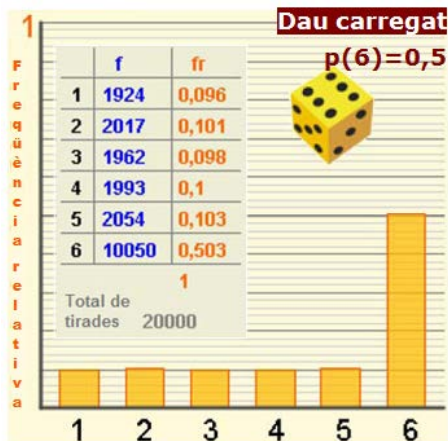
$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad A \cup \bar{A} = E$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



Probabilitat experimental

La llei de Laplace ens permet calcular la probabilitat d'esdeveniments regulars, però si l'experiència és irregular desconexim la probabilitat de cada un dels casos, llavors és precís recórrer a l'experimentació.



La probabilitat **experimental** és la probabilitat assignada a un esdeveniment mitjançant el càlcul de la freqüència relativa del mateix en repetir l'experiment moltes vegades.

Com més gran sigui el nombre de proves realitzades més s'aproximarà el valor obtingut al valor desconegut de la probabilitat teòrica. El nombre de proves a realitzar dependrà de l'experiment i del nombre dels seus possibles resultats.

Observa els exemples de l'esquerra.

- ✓ Una moneda està trucada de manera que la probabilitat de sortir cara no és la mateixa que la de sortir creu, per esbrinar aquestes probabilitats s'ha llançat moltes vegades obtenint els resultats de la taula. A la vista d'aquests, assignarem a "sortir cara" la probabilitat 0,6 i a "sortir creu" 0,4.
- ✓ Una cara d'un dau està carregada de forma que la probabilitat que surti és cinc vegades la de les restants. De quina cara es tracta? Quina és la seva probabilitat? En repetir el llançament moltes vegades s'observa que la cara carregada és la del nombre 6, la seva probabilitat és 0,5 i la de les cares restants 0,1.

Simulació de experiments

En moltes ocasions realitzar un experiment aleatori un nombre elevat de vegades no resulta fàcil, aleshores recorrem a la simulació.

Simular un experiment aleatori consisteix en substituir-lo per un altre més senzill i capaç de reproduir els mateixos resultats.

Las calculadores científiques disposen de la tecla **RAND**, RAN# o RANDOM que en activar-la, genera un nombre a l'atzar comprés entre 0 i 1, anomenat **nombre aleatori**. Aquests nombres resulten de gran utilitat en la simulació d'experiments.



Vegem com simular el llançament d'un dau amb la calculadora i aquests nombres.

En la teva calculadora prem sobre la tecla rand, ran# o random, multiplica per 6 (nre. de resultats) del nombre que apareix, pren la part entera i suma 1, ja que els resultats van de 1 a 6.

$$\text{ent}(0,2932063716784 \cdot 6) + 1 = 2$$

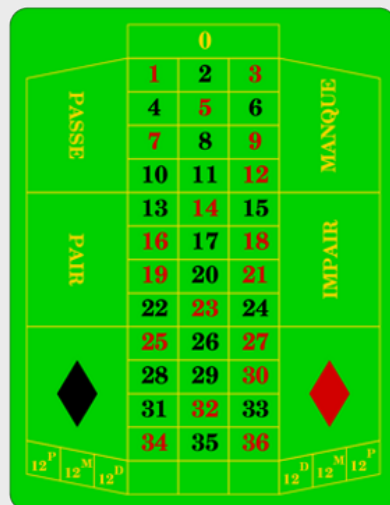
EXERCICIS resolts

5. La ruleta és un conegut joc dels casinos. Consisteix en una roda equilibrada, dividida en 37 caselles numerades del 0 al 36. El 0 és de color verd i si surt guanya la banca.

Hi ha diferents tipus d'apostes, a un nombre sol, a "parell" o a "senar", a "vermell" o a "negre", a "passa" (nre.>18) o a "falta" (nre.<18), a una columna, ...

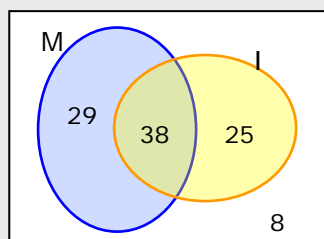
Calcula les següents probabilitats:

- a) $P(17) = \frac{1}{37}$ b) $P(\text{"senar"}) = \frac{18}{37}$
 c) $P(\text{"2a columna"}) = \frac{12}{37}$ d) $P(\text{"parell i vermell"}) = \frac{8}{37}$
 e) $P(\text{"senar i falta"}) = \frac{9}{37}$ f) $P(\text{"vermell"}) = \frac{18}{37}$



6. En l'última avaluació, en la meua classe van aprovar les Matemàtiques el 67% i l'Anglès el 63%, el 38% van aprovar les dues assignatures. Escollit un estudiant de la classe a l'atzar, calcula la probabilitat que:

- a) Hagi aprovat alguna de les dues b) No hagi aprovat cap de les dues
 c) Hagi aprovat només les Matemàtiques d) Hagi aprovat només una de les dues



Fer un diagrama facilita molt la resolució del problema.

- $P(M) = 0,67$ $P(A) = 0,63$ $P(M \cap A) = 0,38$
 a) "Alguna de les dues" és l'esdeveniment unió,
 $P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = 0,67 + 0,63 - 0,38 = 0,92$
 b) No aprovar cap és l'esdeveniment contrari a aprovar alguna de les dues (almenys una).
 $P(\text{alguna de les dues}) = 1 - 0,92 = 0,08$
 c) $P(\text{"només M"}) = P(M \cap \bar{A}) = 0,67 - 0,38 = 0,29$
 d) $P(\text{"només M o només A"}) = 0,29 + 0,25 = 0,54$ (ó $0,92 - 0,38$)

7. En tirar una xinxeta pot caure amb la punta cap amunt o cap avall. Per esbrinar la probabilitat de cada un d'aquests esdeveniments, s'ha fet l' experiment moltes vegades obtenint els resultats donats a la taula. A la vista d'aquests, quina probabilitat assignaries a l'esdeveniment "caure amb la punta cap avall"?



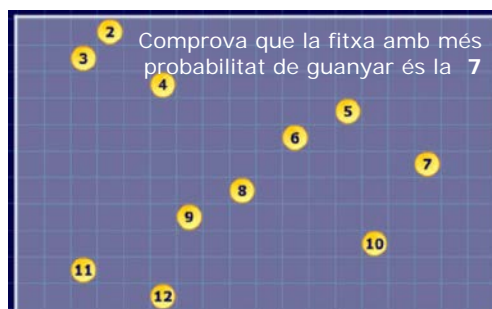
Nre. de tirades	10	50	100	500	1000
Punta cap amunt	7	29	65	337	668

En la taula s'observa que la freqüència relativa de l'esdeveniment "caure amb la punta cap amunt" tendeix a 0,67. Caure amb la "punta cap avall" és l'esdeveniment contrari, es pot considerar $P(\text{"punta cap avall"}) = 1 - 0,67 = 0,33$

Carrera amb daus



- $P(2) = 1/36$
 $P(3) = 2/36$
 $P(4) = 3/36$
 $P(5) = 4/36$
 $P(6) = 5/36$
 $P(7) = 6/36$
 $P(8) = 5/36$
 $P(9) = 4/36$
 $P(10) = 3/36$
 $P(11) = 2/36$
 $P(12) = 1/36$





Per practicar

- Escollim una fitxa de dòmino a l'atzar,
 - Descriu els esdeveniments:
 $A = \text{"Treure una fitxa doble"}$
 $B = \text{"Treure una fitxa els nombres de la qual sumin 5 ó múltiple de 5"}$
 - Escriu $A \cup B$ i $A \cap B$

- Escriu l'espai mostral de l'experiment resultant de tirar 3 monedes. Considera els esdeveniments:

$A = \text{"Sortir una cara"}$
 $B = \text{"Sortir almenys una cara"}$

Escriu $A \cup B$, $A \cap B$ i l'esdeveniment contrari de B.

- En una urna hi ha 15 boles numerades de l'1 al 15, se'n treu una d'elles; considera els esdeveniments:

$A = \text{"Treure un nre. parell"}$
 $B = \text{"Treure un múltiple de 4"}$

Escriu $A \cup B$ i $A \cap B$.

- Tirem un dau dodecaèdric i anotem el nombre de la cara superior. Descriu els esdeveniments:

$A = \text{"Treure un nombre parell"}$
 $B = \text{"Treure un nombre major que 5"}$

Escriu $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$ i $\bar{A} \cap \bar{B}$

- En una caixa hi ha 5 boles vermelles, 4 verdes i 3 blaves. Es treu una bola i s'anota el color, calcula la probabilitat que sigui de color verd.

- Es tria a l'atzar un nombre entre els 50 primers nombres natural (a partir de l'1). Calcula la probabilitat dels esdeveniments:

$A = \text{"Sortir un nombre major que 4 i menor que 17"}$.

$B = \text{"Sortir un quadrat perfecte"}$

- D'una baralla espanyola es treu una carta, calcula la probabilitat dels esdeveniments:

$A = \text{"Sortir bastos"}$

$B = \text{"No sortir ni bastos ni as"}$

- Tirem dos daus i ens fixem en la menor de les puntuacions. Calcula la probabilitat que sigui un 3.

- Damunt la taula tenim les dues cartes que apareixen a sota, traiem una altra carta i ens fixem en el seu nombre, calcula la probabilitat que la suma dels nombres de les tres cartes sigui 15.



- Traiem una fitxa de dòmino, calcula la probabilitat que la suma dels punts sigui menor que 7.

- Amb un 1, un 2 i un 3, formem tots els nombres possibles de 3 xifres, si escollim un d'aquests a l'atzar, calcula la probabilitat que acabi en 3.

- En girar la ruleta de la figura, calcula la probabilitat que surti vermell i major que 3.



- La probabilitat d'un esdeveniment és 0,21, calcula la de l'esdeveniment contrari.

- La probabilitat d'un esdeveniment A és $P(A)=0,55$, la d'un altre esdeveniment B és $P(B)=0,45$ i la de la seva intersecció és $P(A \cap B)=0,20$. Calcula la probabilitat de $A \cup B$.

Probabilitat

15. Considera dos esdeveniments A i B d'un experiment aleatori. Si $P(A)=0,37$; $P(A \cup B)=0,79$ i $P(A \cap B)=0,06$, calcula la $P(\bar{B})$.

16. Un dau està trucat de manera que la probabilitat de treure un nombre parell és 0,67; a més $P(1)=P(3)=P(5)$.
Calcula la probabilitat de "treure un 5".

17. En una urna hi ha boles blanques i negres.

La Maria diu: "La probabilitat de treure una bola blanca és $5/26$ "

En Sergi diu: "La probabilitat de treure una bola negra és $11/13$ "

- Poden ser correctes ambdós afirmacions?
- Si la Maria té raó, quina és la probabilitat de treure una bola negra?

18. En un restaurant ofereixen un menú que consta de primer plat a triar entre amanida, pasta o llegums; un segon plat a triar entre carn o peix; i postres a escollir entre fruita o gelat. L'Anna escull el seu menú a l'atzar, calcula la probabilitat que mengi:

- Amanida, carn i fruita.
- Pasta i peix.

Suggeriment: Fes un diagrama d'arbre

19. Porto a la butxaca 2 monedes de 50 cèntims, dues de 20 cèntims i dues de 10 cèntims. També porto un forat pel qual em cauen dues monedes i les perdo. Calcula la probabilitat d'haver perdut:

- 1 euro
- Menys de 40 cèntims.
- Més de 50 cèntims.

Suggeriment: Fes una taula de doble entrada

20. En un institut el 66% dels estudiants són afeccionats al futbol i el 42% ho són al bàsquet. Hi ha un 27% que són afeccionats als dos esports. Calcula la probabilitat que un estudiant triat a l'atzar no sigui afeccionat al futbol ni al bàsquet.

21. A una reunió assisteixen 32 homes i 48 dones. La meitat dels homes i la quarta part de les dones tenen 40 anys o més. Escollida una persona a l'atzar calcula la probabilitat que:

- sigui dona i menor de 40 anys
- sigui menor de 40 anys.

Suggeriment: Completa la taula

	40 o més	<40	
HOME			32
DONA			48

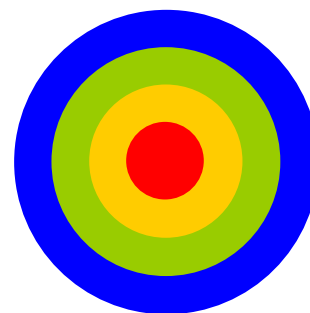
22. He perdut algunes cartes d'una baralla. Si d'entre les que em queden en trec una al atzar, la probabilitat que sigui de copes és 0,20, que sigui un rei és 0,13 i que sigui un rei o de copes és 0,30. Està el rei de copes entre las cartes que tinc?

Suggeriment: Calcula la probabilitat de la intersecció

23. A un aiguamoll totes les tardors arriben bandades de grues en el seu camí a zones càlides. Per observar quantes n'hi ha, s'ha capturat i anellat una mostra de 40 grues. Posteriorment 50, de les quals 3 porten anella, quantes grues estimarem que hi ha?

Suggeriment: La probabilitat que una grua estigui anellada serà la mateixa en totes les mostres, i la calculem a partir de la freqüència relativa.

24. Se suposa que en tirar un dard, la probabilitat d'encertar en qualsevol punt de la diana és la mateixa. Calcula la probabilitat d'encertar en la zona de color verd.



Per saber-ne més



Probabilitat i genètica Les lleis de Mendel

Gregor Mendel (1822-1884), fou un monjo i naturalista nascut a Heizendorf (actual Hyncice, República Txeca).

A través dels seus treballs, que va portar a terme amb diferents varietats de la planta del pèsol, va ser el primer en descriure les lleis que regeixen l'herència genètica.

Per fer-ho va aplicar la probabilitat, com descriu en la seva obra "La Matemàtica de l'herència"

Mendel va combinar pèsols de diferent color (groc i verd) i diferent textura (llisos i rugosos).

1a generació I
 $RRAA + rraa$

2a generació

	RA	RA
ra		
ra		

3a generació

	RA	Ra	rA	ra
RA				
Ra				
rA				
ra				

COLOR
A: groc ... **dominants**
a: verd ... **recessius**

TEXTURA
R: llis ... **dominants**
r: rugós ... **recessius**

En creuar dues línies pures, diferents per algun caràcter, el 100% dels descendents són iguals entre si i iguals a l'ascendent dominant.

(1a Llei de Mendel)

En la 3a generació:

$$P(\text{groc llis}) = \frac{9}{16}$$

$$P(\text{groc rugós}) = \frac{3}{16}$$

$$P(\text{verd llis}) = \frac{3}{16}$$

$$P(\text{verd rugós}) = \frac{1}{16}$$

Probabilitat condicionada Dependents o independents?



En ocasions la probabilitat d'un esdeveniment varia si es calcula amb la condició que n'ha ocorregut un altre anteriorment.

Imagina que jugant a la ruleta sabem que no ha sortit el 0, podem considerar llavors que $P(\text{parell}) = 1/2$.

- Si a més sabem que ha sortit "vermell"

$$P(\text{parell sabent que és vermell}) = \frac{\text{nre. resultats parells i vermells}}{\text{nre. resultats parells}} = \frac{8}{18}$$

Amb aquesta condició la probabilitat de "parell" ja no és $1/2$, els esdeveniments "parell" i "vermell" són DEPENDENTS.

- Però si sabem que ha sortit "passa"

$$P(\text{parell sabent que és passa}) = \frac{\text{nre. resultats parells i passa}}{\text{nre. resultats parells}} = \frac{9}{18}$$

La probabilitat de "parell" segueix essent $1/2$, no ha canviat, els esdeveniments "parell" i "passa" són INDEPENDENTS.



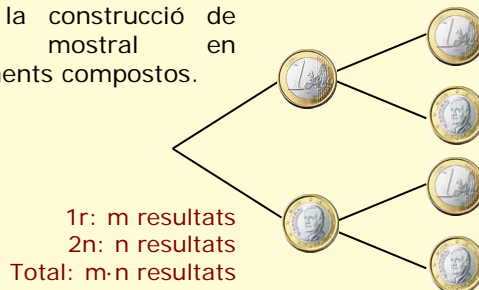


Recorda el més important

Espai mostral i esdeveniments

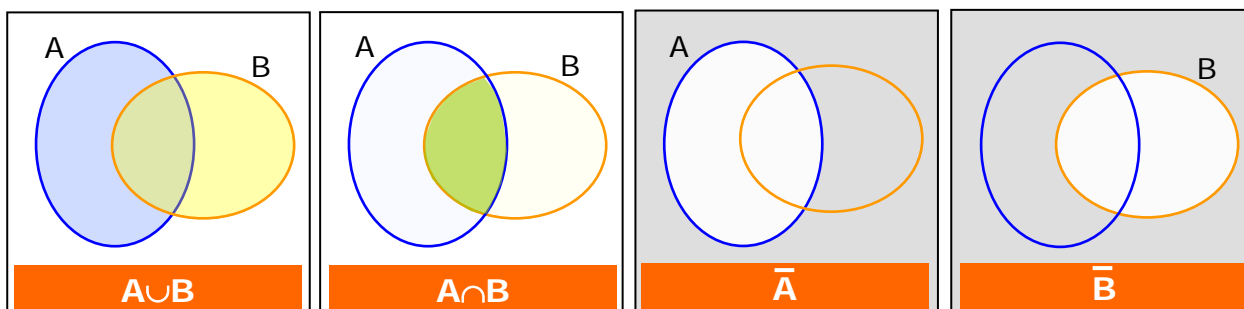
- **Experiment aleatori**, el que no es pot predir el resultat
- **Espai mostral** conjunt de tots els resultats possibles.
- Anomenarem **esdeveniment** a qualsevol subconjunt de l'espai mostral..
- Esdeveniments **incompatibles** si no es poden realitzar a la vegada.

Un diagrama d'arbre facilita la construcció de l'espai mostral en experiments compostos.



Operacions amb esdeveniments

- Esdeveniment **unió** de A i B, $A \cup B$, és el que ocorre quan ocorre A o B, algun dels dos.
- Esdeveniment **intersecció** de A i B, $A \cap B$, esdeveniment que ocorre quan ocorren A i B a la vegada.
- Esdeveniment **contrari** de A al que ocorre quan no ocorre A, l'escriurem \bar{A} .



Calcular probabilitats

- En experiments regulars, quan els esdeveniments elementals són equiprobables, amb la **Regla de Laplace**

$$P(A) = \frac{\text{nre.casosfavorables}}{\text{nre.casospossibles}}$$

- Si l'experiment no és regular es recorre a l'experimentació, prenent la probabilitat de A com la seva freqüència relativa en repetir l'experiment moltes vegades.



Propietats de la probabilitat

- $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(E) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Probabilitat de la unió

- A i B incompatibles:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A i B compatibles:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Autoavaluació



	aproven	suspenen
Grup A	15	6
Grup B	16	13

1. Escrivim cada una de les lletres de la paraula ALEATORI en un paper i en traiem una a l'atzar. Escriu l'esdeveniment "sortir vocal"
2. Escriu l'esdeveniment contrari del calculat a l'exercici anterior.
3. En una bossa hi ha 100 boles numerades del 0 al 99. Es treu una a l'atzar, calcula la probabilitat que en les seves xifres estigui el 7.
4. En una bossa hi ha 2 boles vermelles, 4 boles verdes i 4 blaves. Es treu una bola a l'atzar, calcula la probabilitat que NO sigui verda.
5. Calcula la probabilitat de vermell en la ruleta de la figura
6. Es treu una carta d'una baralla de 40, calcula la probabilitat que sigui d'OROS o un AS.
7. Si A i B són dos esdeveniments tals que $P(A)=0,64$, $P(B)=0,36$ i $P(A \cap B)=0,12$. Calcula $P(A \cup B)$.
8. Els resultats d'un examen realitzat per dos grups de 3r d'ESO es mostren a la taula adjunta. Seleccionat un estudiant a l'atzar calcula la probabilitat que sigui del grup B i aprovi.
9. Un dau cúbic està trucat de manera que la probabilitat de treure un quatre és quatre vegades la probabilitat de qualsevol de les altres cares. Calcula la probabilitat d'obtenir un quatre.
10. Es llança una moneda i un dau, calcula la probabilitat que surti CARA i nombre PARELL.

Solucions dels exercicis per practicar

- $A = \{00, 11, 22, 33, 44, 55, 66\}$
 $B = \{05, 14, 23, 55\}$
 $A \cup B = \{00, 05, 11, 14, 22, 23, 44, 55, 66\}$
 $A \cap B = \{55\}$
- $A = \{cxx, xc x, xxc\}$
 $B = \{ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xc x, xxc\}$
 $A \cup B = A$ $A \cap B = B$ $\bar{B} = \{xxx\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 $A \cap B = \{4, 8, 12\}$
- $A \cap B = \{8, 12\}$ $A \cap \bar{B} = \{4\}$ $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 2, 3, 5\}$
- $P(\text{verda}) = 4/12 = 1/3$
- $P(A) = 12/50 = 0,24$ $P(B) = 7/50$
- $P(A) = 1/4$ $P(B) = 27/40$
- $P(3) = 7/36$
- Ha de sortir un 6, com ja n'hi ha un:
 $P = 3/38$
- En 16 de les 28 fitxes,
 $P = 16/28 = 0,57$
- Hi ha 6 casos possibles, $P = 2/6 = 1/3$
- $P = 0,3$
- $P(\bar{A}) = 1 - 0,21 = 0,79$
- $P(A \cup B) = 0,55 + 0,45 - 0,20 = 0,80$
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,39 = 0,61$
- $P(\text{senar}) = 0,33$ $P(1) = P(3) = p(5) = 0,11$
- a) No poden ser certes les dues ja que són esdeveniments contraris i $5/26 + 11/13 \neq 1$
b) $P(\text{"negra"}) = 21/26$
- Hi ha 12 possibles menús
a) $P(A) = 1/12$ b) $P(B) = 1/6$
- a) $P(1) = 2/30 = 1/15$
b) $P(\text{menys de } 0,40) = 10/30 = 1/3$
c) $P(\text{"més de } 0,50") = 18/30 = 3/5$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,81 = 0,19$
- Assisteixen 80 persones
a) $P(\text{dona i menor de } 40) = 12/80 = 0,15$
b) $P(\text{menor de } 40) = 28/80 = 0,35$
- $P(R \cap C) = P(R) + P(C) - P(R \cup C) = 0,03$
La probabilitat de treure el "Rei de Copes" no és 0, per tant sí que hi és.
- $P(\text{grua amb anella}) = 4/50 = 0,08$
nombre estimat = $40/0,08 \cong 500$
- Superfície de la diana = $\pi \cdot (4r)^2 = 16\pi r^2$
Superfície verda = $\pi \cdot (3r)^2 - \pi \cdot (2r)^2 = 5\pi r^2$
 $P = 5/16$

Solucions AUTOAVALUCIÓ

- $\{A, E, I, O\}$
- $\{L, T, R\}$
- 19/99
- $6/10 = 0,6$
- $4/12 = 1/3$
- 13/40
- 0,88
- $15/50 = 0,3$
- 4/9
- $3/12 = 0,25$