

Objectius

En aquesta quinzena aprendràs a:

- Manejar el concepte de vector com element direccional del pla.
- Reconèixer els moviments principals en el pla: traslacions, girs i simetries.
- Aplicar un o més moviments a una figura geomètrica.
- Reconèixer moviments geomètrics a l'art, la natura, etc.

Abans de començar

1. Vectors	pág. 4
Concepte de vector. Coordenades	
Vectors equipolents	
Suma de vectors	
2. Traslacions	pág. 6
Traslació segons un vector	
Composició de traslacions	
3. Girs	pág. 8
Giro de centre O i angle α	
Simetria central	
Figures invariants d'ordre n	
4. Simetria axial	pág. 11
Simetria d'eix e	
Figures amb eix de simetria	
Composició de simetries axials	

Exercicis per practicar

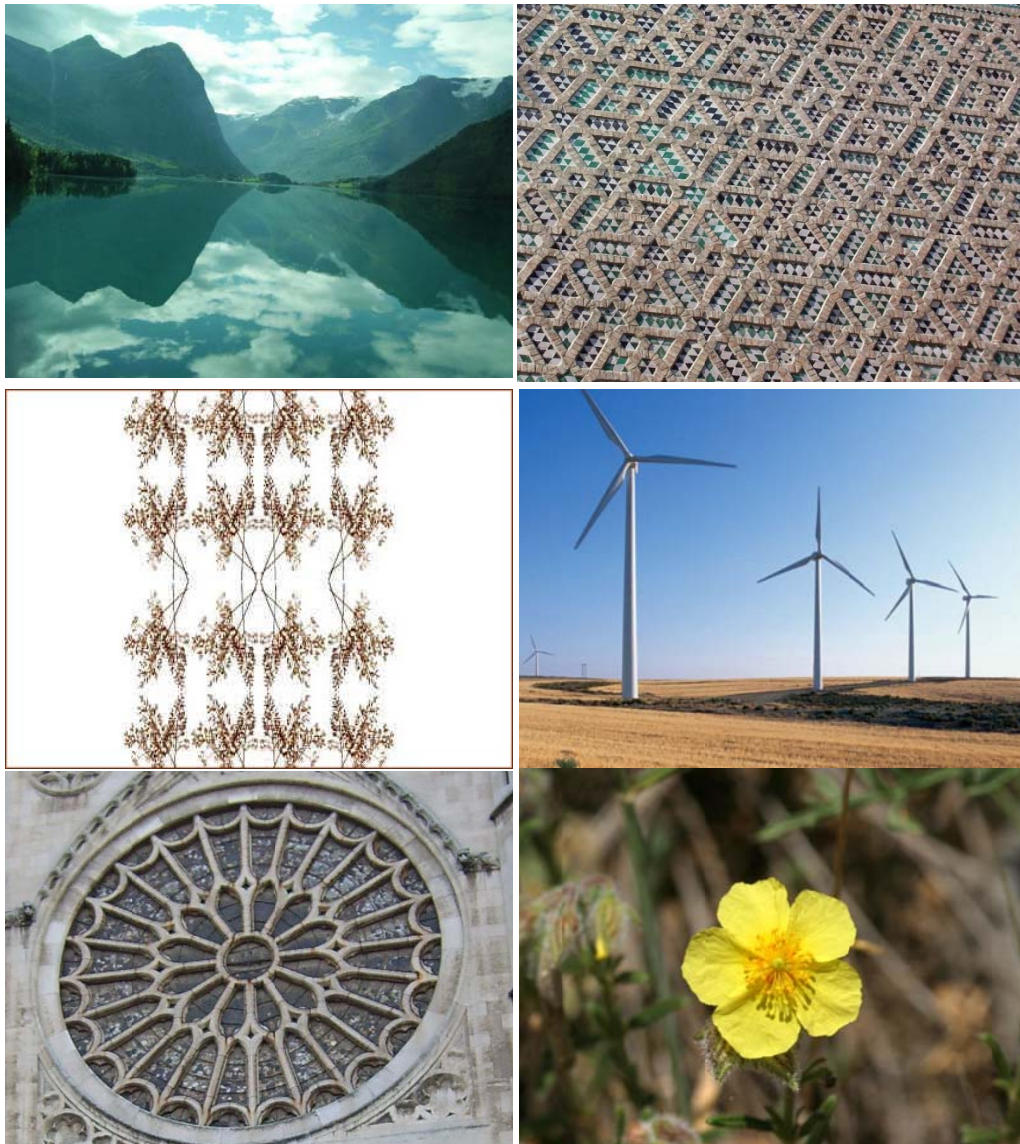
Per saber més

Resum

Autoavaluació

Activitats per enviar al tutor

Abans de començar

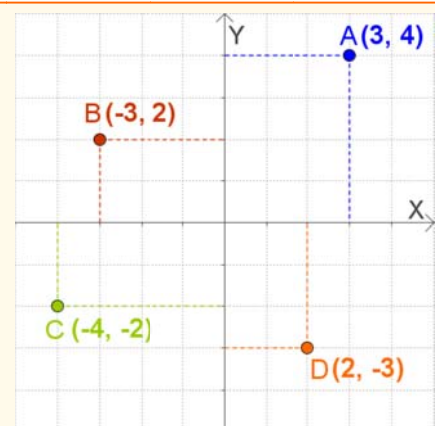


A la natural, l'art, i molts objectes quotidians, trobaràs mostres de les formes geomètriques que estudiaràs aquí. Mira al teu voltant i observa

Recorda

En un sistema d'eixos cartesianes cada punt s'expressa mitjançant dues coordenades (x,i) .

La primera o abscissa indica la posició sobre l'eix horitzontal, positiva a la dreta de l'origen, negativa a l'esquerra. La segona o ordenada indica la posició sobre l'eix vertical, positiva cap a d'alt, negativa cap a baix.



Moviments en el pla

1. Vectors

Concepte de vector. Coordenades

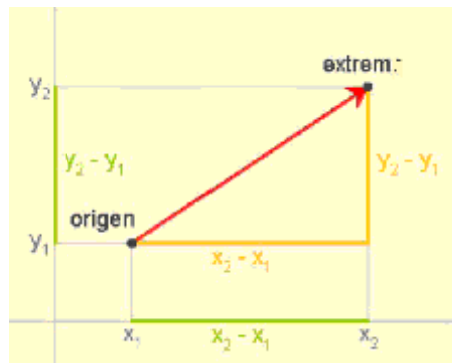
Un vector \vec{AB} està determinat per dos punts del pla, $A(x_1, y_1)$ que és el seu **origen** i $B(x_2, y_2)$ que és el seu **extrem**.

Les coordenades de \vec{AB} són les de B menys les de A:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Un vector té **mòdul**, **direcció** i **sentit**:

- **Mòdul**, és la distància entre l'origen i l'extrem,
- **Direcció**, és la recta que passa per l'origen i l'extrem o qualsevol recta paral·lela a ella i
- **Sentit** és el que va des de l'origen cap a l'extrem i el marca la fletxa.

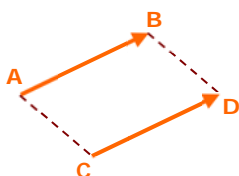


Per calcular el mòdul n'hi ha prou utilitzant el Teorema de Pitàgores:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vectors equipolents

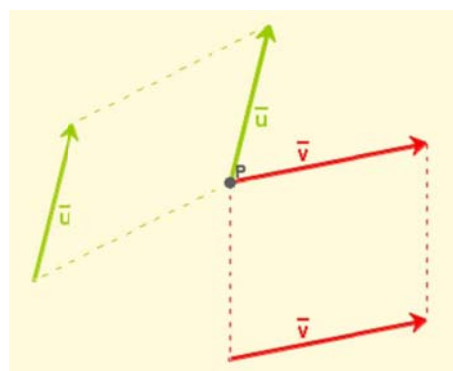
Dos vectors \vec{AB} i \vec{CD} s'anomenen **equipolents** si tenen el **mateix mòdul**, la **mateixa direcció** i el **mateix sentit**.



Observa que sembla que el vector \vec{AB} se hagi traslladat paral·lelament a si mateix fins ocupar la posició del vector \vec{CD} .

ABCD és un paral·lelogram.

- Dos vectors equipolents són representants del mateix vector lliure.



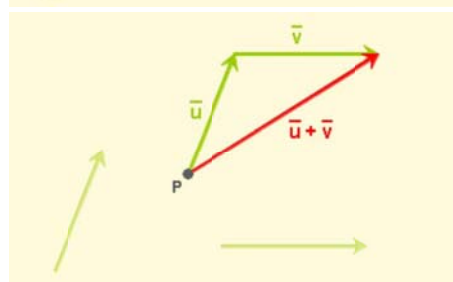
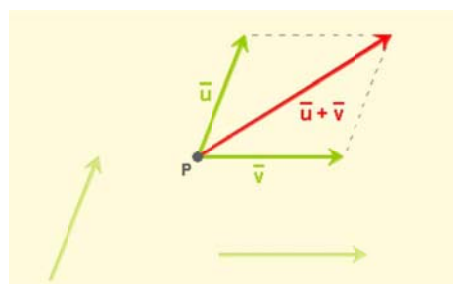
La importància dels vectors equipolents resideix en què se poden traslladar a qualsevol punt.

Suma de vectors

La suma de dos vectors, \vec{u} i \vec{v} , és un altre vector, $\vec{u} + \vec{v}$, que podem construir de dues formes:

- Situant els vectors \vec{u} i \vec{v} amb origen en el mateix punt. El vector $\vec{u} + \vec{v}$ queda sobre la diagonal major del paral·lelogram construït sobre els vectors sumands.
- Fent coincidir l'origen del vector \vec{v} amb l'extrem de \vec{u} . El vector $\vec{u} + \vec{v}$ té com origen l'origen de \vec{u} i com extrem el de \vec{v} .

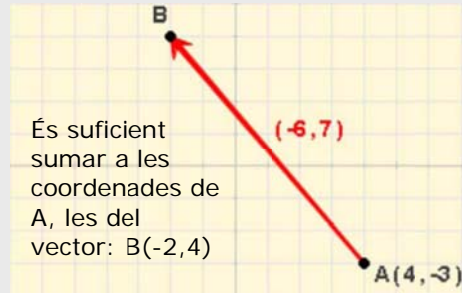
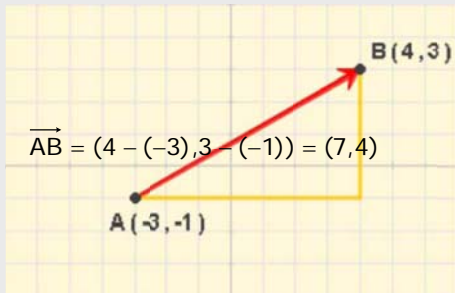
En coordenades, la suma de $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$ és: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$



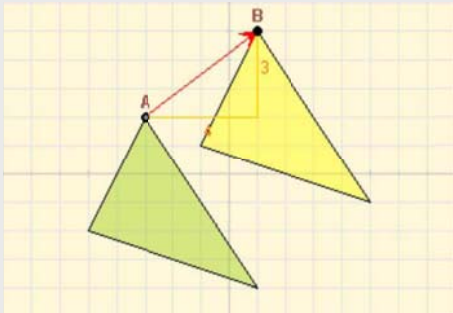
EXERCICIS resolts

1. Les coordenades del vector \vec{AB} són les de B menys les de A. Calcula:

- a) Les coordenades del vector \vec{AB}
 b) Les coordenades del punt B.



2. Els triangles groc i verd són iguals, quina distància hi ha entre els punts homòlegs, A(-3, 2) i B(1, 5)?

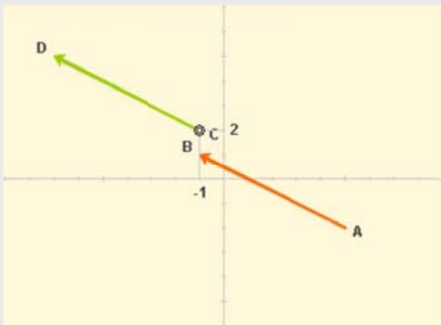


La distància entre A i B és el mòdul del vector $\vec{AB} = (4, 3)$

Aplicant el Teorema de Pitàgores:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

3. Els vectors equipolents tenen les mateixes coordenades, donats el punt A(5, -2) i el B(-1, 1), quines són les coordenades del punt D?



El vector $\vec{AB} = (-1 - 5, 1 + 2) = (-6, 3)$

El vector \vec{CD} té les mateixes coordenades.

Les del punt D són: (-1-6, 2+3)
 D(-7, 5)

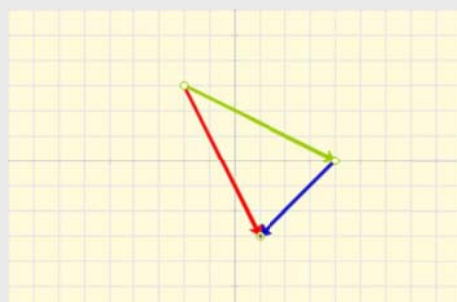
4. Suma en cada cas gràficament i analíticament, els vectors verd \vec{u} , i blau \vec{v} .

a) $\vec{u} = (-4, -3)$ $\vec{v} = (6, -3)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (-4 + 6, -3 - 3) = (2, -6)$$

b) $\vec{u} = (6, -3)$ $\vec{v} = (-3, -3)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (6 - 3, -3 - 3) = (3, -6)$$

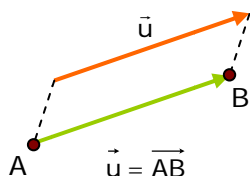


Moviments en el pla

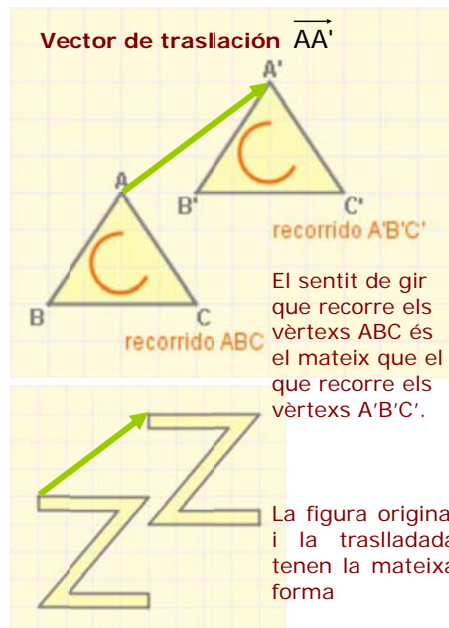
2. Translacions

Translació segons un vector

Una translació de vector \vec{u} és un moviment que transforma cada punt **A** del pla, en un altre punt **B** de manera que el vector \overrightarrow{AB} és igual al vector \vec{u}

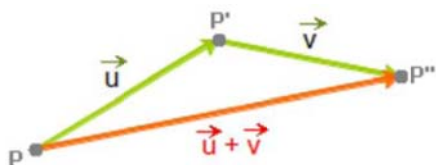


- Una translació és un **moviment directe**, és a dir que conserva l'orientació, i **isomorfo**, no canvia la forma de les figures.

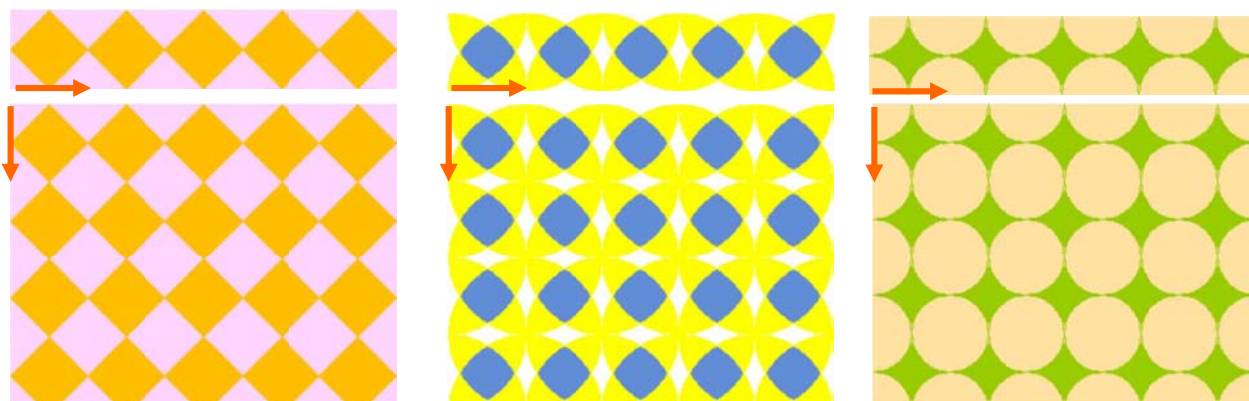
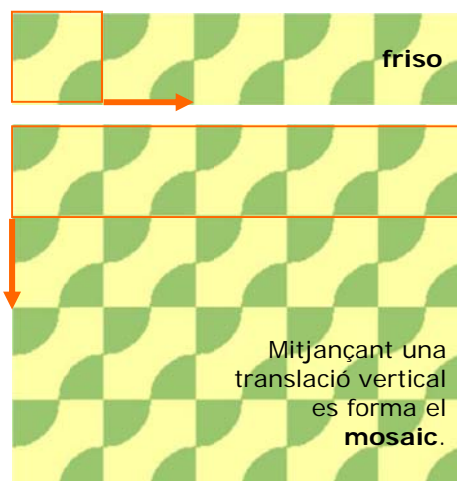


Composició de translacions

Dues translacions, de vectors \vec{u} i \vec{v} , es poden compondre per formar una translació de vector $\vec{u} + \vec{v}$

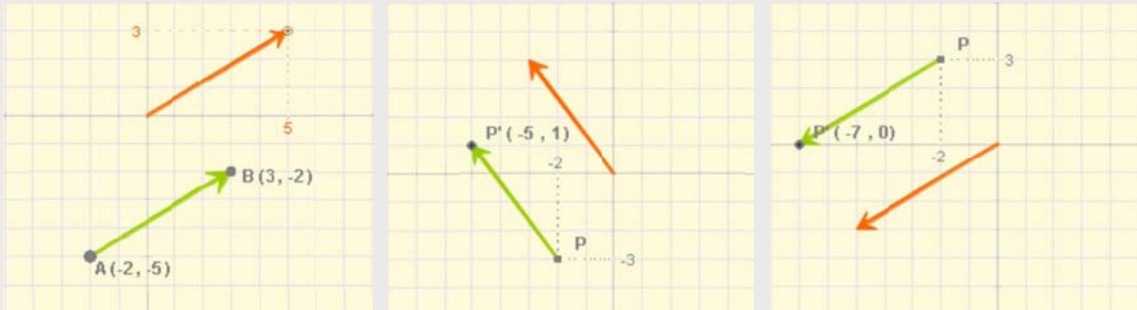


Mitjançant la composició de translacions es possible compondre interessants **frisos** o **senefes**, que es puguin ampliar a **mosaics**, com pots apreciar a les imatges.



EXERCICIS resolts

1. Si es traslladen les coordenades d'un punt, aquestes es veuen incrementades per les del vector de translació. Comprova-ho en els següents casos:

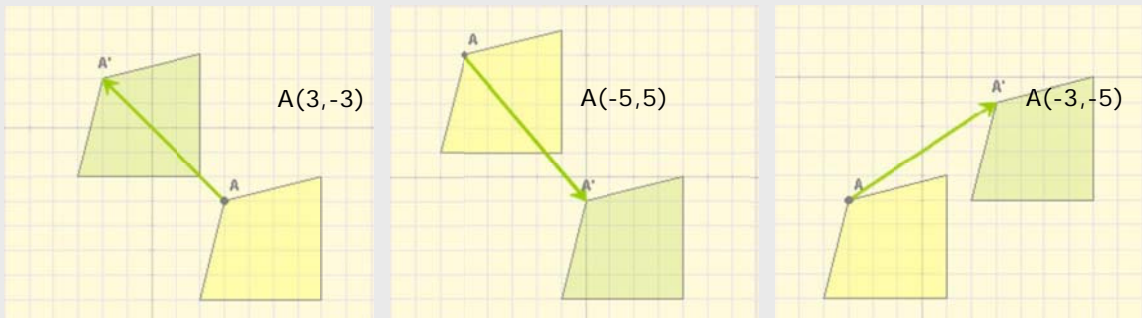


2. El quadrilàter verd és el traslladat de groc en cada cas. Calcula les coordenades del punt A.

a) $\vec{v} = (-5, 5)$ $A'(-2, 2)$

b) $\vec{v} = (5, -6)$ $A'(0, -1)$

c) $\vec{v} = (6, 4)$ $A'(3, -1)$



3. A l'art hi ha translacions com pots apreciar en els exemples següents:

Motiu que pot apreciar-se a moltes esglésies romàniques, aquest és de la iglésia de San Juan Bautista de Leon.



Figura present en l'ornamentació mudéjar, Catedral de la Seo de Zaragoza



Mosaïc romà

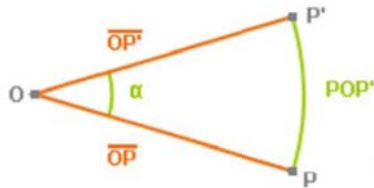


Moviments en el pla

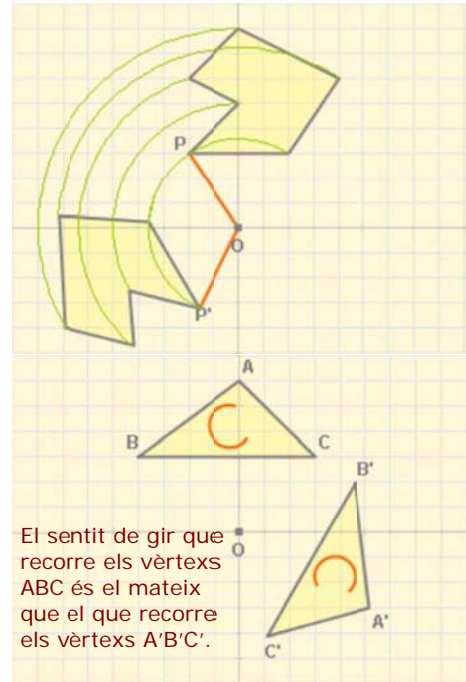
3. Girs

Gir de centre O i angle α

Un gir, de centre un punt O i amplitud un angle α , transforma cada punt P del pla en un altre punt P' de manera que l'angle POP' és igual a α i les distàncies OP i OP' són iguals.



Has de tenir en compte que un gir pot tenir **orientació positiva** (contrària a les agulles del rellotge) o **negativa**.

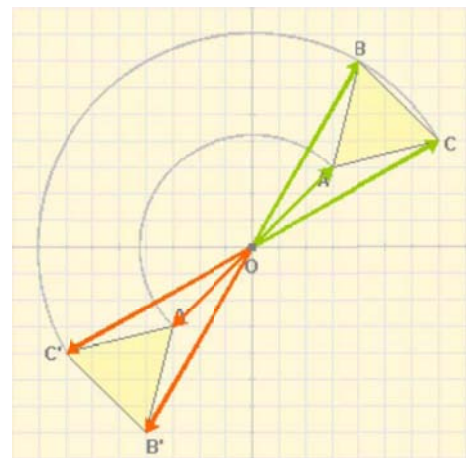


Simetria respecte a un punt

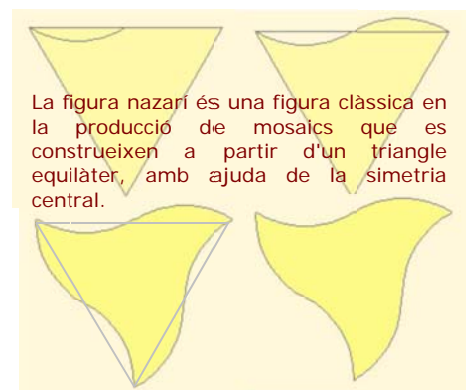
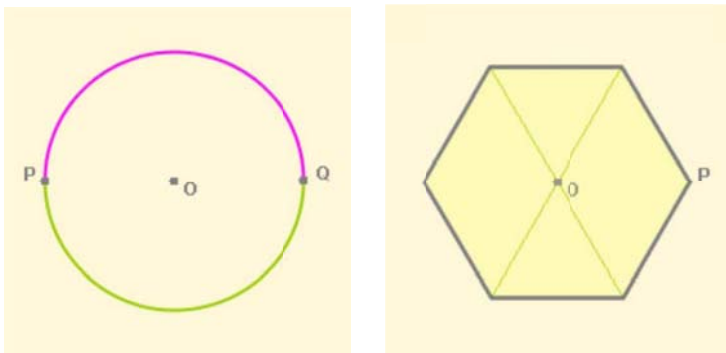
Una **simetria central**, o simetria respecte a un punt O , és un **gir** de centre O i amplitud 180° . Transforma cada punt P en un altre punt P' de manera que l'angle POP' és igual a 180° i les distàncies OP i OP' són iguals.



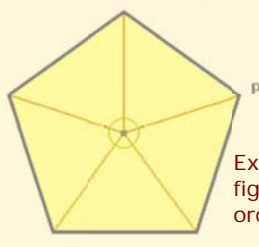
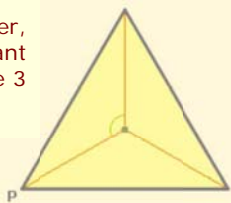
Si quan apliquem a una figura una simetria de centre O la figura no varia, O es diu que és el seu **centre de simetria**.



Exemples de figures amb centre de simetria:



Tríngle equilàter,
figura invariant
d'ordre 3



Exàgono regular,
figura invariante de
orden 6

Figures invariants d'ordre n

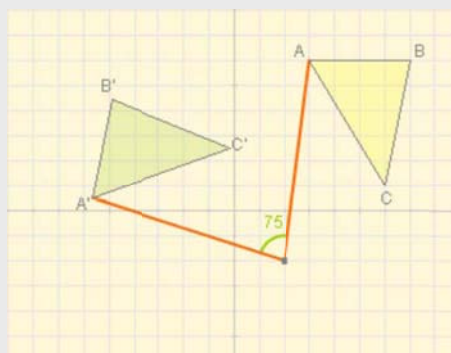
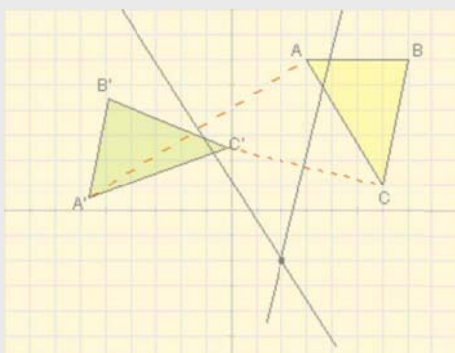
Si quan girem una figura amb centre en un punt O i segons un àngle menor que 360° , coincideix amb ella mateixa, el punt O es dice que és **centro de gir** de la figura.



Si quan apliquem a una figura un gir de 360° al voltant del seu centre de gir es produeixen n coincidències, l'esmentat centre es diu d'**ordre n** i la figura **invariant d'ordre n**.

EXERCICIS resoltos

5. Quin és el centre del gir que transforma el triangle groc en el verd?



Es traça el segment que uneix dos punts homòlegs, per exemple A i A' , i dibuixem la mediatriu. Fem el mateix amb els altres dos punts, C i C' de la figura. El punt en el que es tallen les mediatrius és el centre de gir.

Amb el transportador podem mesurar l'angle, en aquest exemple 75° .

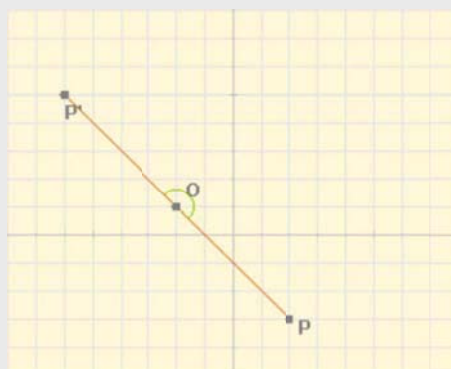
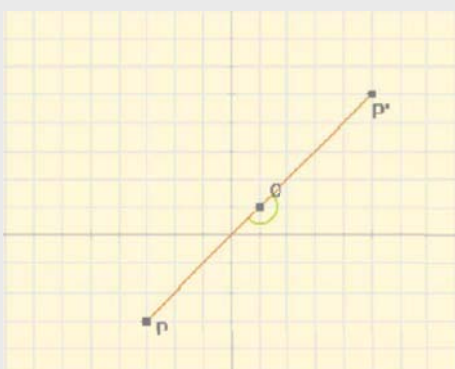
6. Quines són les coordenades del punt P' , simètric del P en la simetria de centre el punt O ?

a) $O(1,1)$

$P(-3,-3) \rightarrow P'(5,5)$

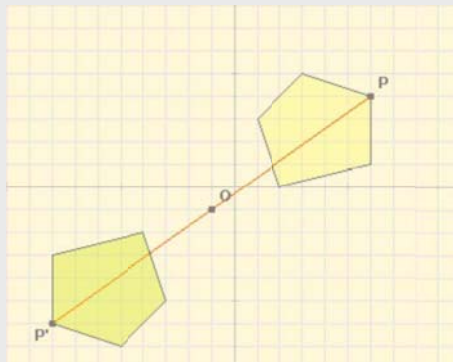
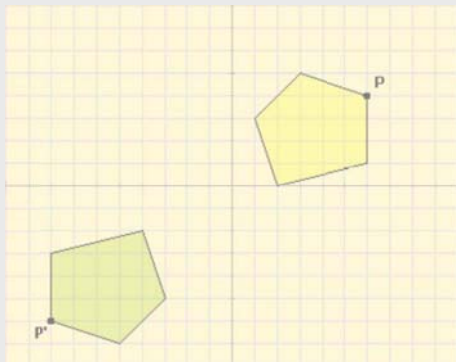
b) $O(-2,1)$

$P(2,-3) \rightarrow P'(6,5)$



EXERCICIS resoltos

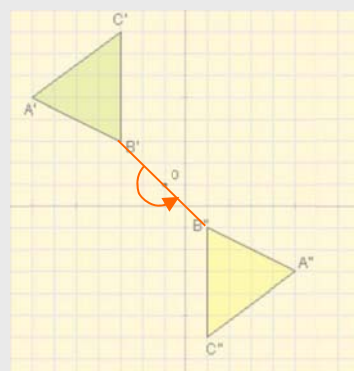
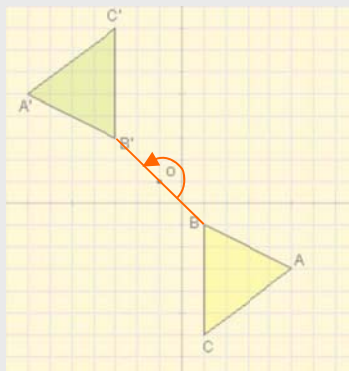
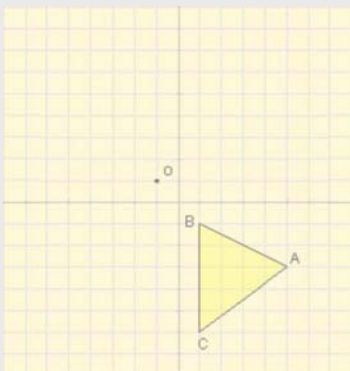
4. En la imatge es mostra un polígon (color groc) i el seu simètric (color verd) respecte al punt O, quines són les coordenades de O?



El centre de simetria és el punt mig del segment que uneix $P(6,4)$ i $P'(-8,-6)$, $O(-1,-1)$, per calcular-les n'hi ha prou en fer la semisuma corresponent $(6-8)/2=-1$, $(4-6)/2=-1$

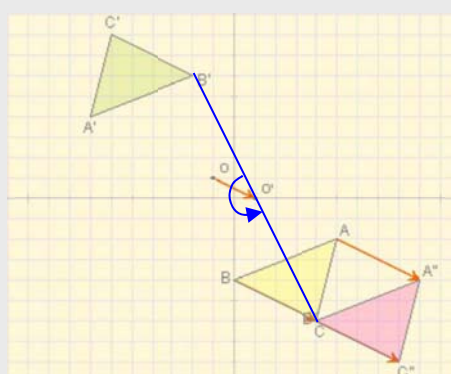
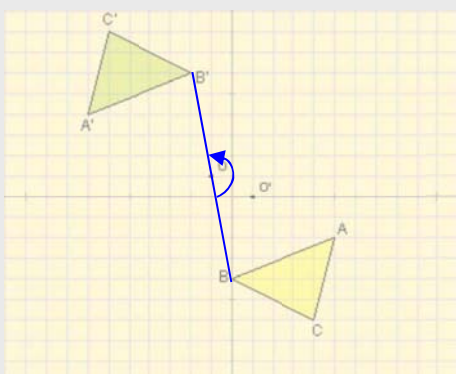
5. Al triangle groc li apliquem successivament dues simetries centrals respecte al mateix punt, O, quin és el resultat?

Quan li apliquem la simetria de centre O resulta el triangle verd, quan a aquest se li aplica de nou una simetria de mateix centre torna a la posició inicial.



6. S'aplica al triangle groc una simetria de centre O, i després una altra de centre O', quin és el resultat?

Si apliquem la simetria de centre O resulta el triangle de color verd, a aquest se li aplica la simetria de centre O' resultant el de color rosa, el queix que si el triangle inicial (groc) es trasllada pel vector $2 \cdot \overline{OO'}$



4. Simetries

Simetria d'eix e

Una simetria respecte a un eix e és un moviment que transforma cada punt P del pla en un altre P' de manera que la recta e és mediatriu del segment d'extremes P i P' .

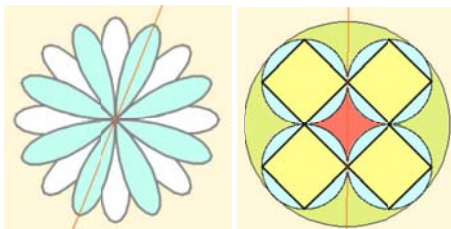
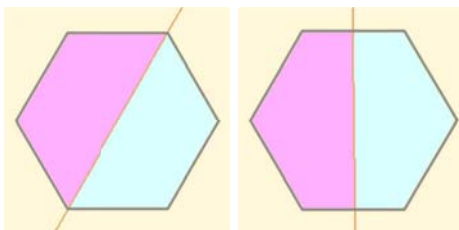
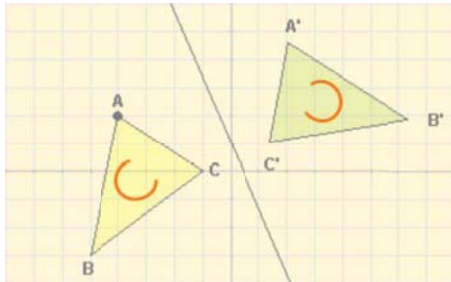
Segons aquesta definició, s'ha de complir que:

- La recta e ha de ser perpendicular al segment PP'
- La distància de P a la recta e serà igual que la distància de P' a l'esmentada recta

Una simetria axial és un **moviment invers**. Observa en la figura com es modifica el sentit de gir dels vèrtexs del triangle.



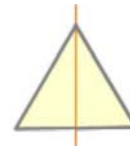
L'eix de simetria és la mediatriu del segment PP'



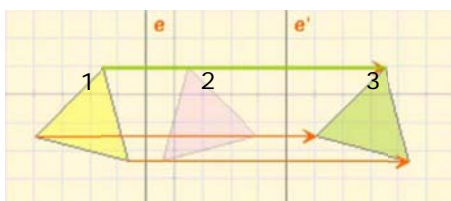
Quants eixos de simetria tenen?

Figures amb eix de simetria

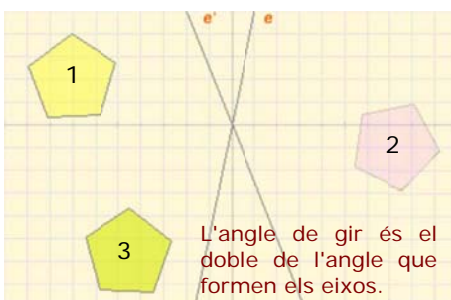
Hi ha figures que són **invariants** (no es modifiquen) quan se'ls aplica una simetria axial. En aquest cas, l'eix s'anomena **eix de simetria** de la figura.



Una figura pot tenir varis eixos de simetria. Observa l'hexàgon de l'esquerra i dos dels seus sis eixos de simetria.



El mòdul del vector de translació és el doble de la distància entre els eixos.



L'angle de gir és el doble de l'angle que formen els eixos.

Composició de simetries axials

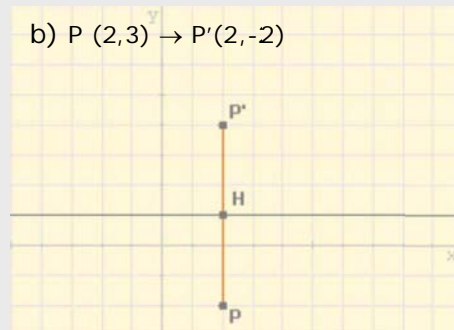
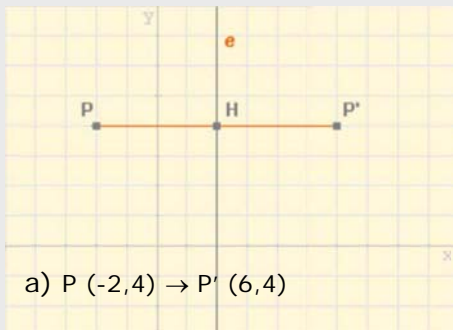
L'aplicació consecutiva de dues simetries axials, d'eixos e i e' , dóna lloc a un nou moviment que depèn de la situació relativa dels eixos e i e' :

- Si els eixos e i e' són paral·lels, el resultat és una translació.
- Si els eixos e i e' se tallen en un punt, la composició dóna lloc a un gir al voltant del punt.

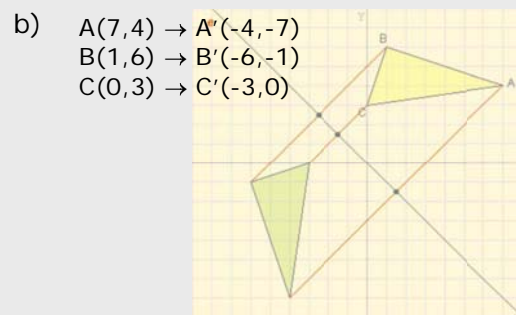
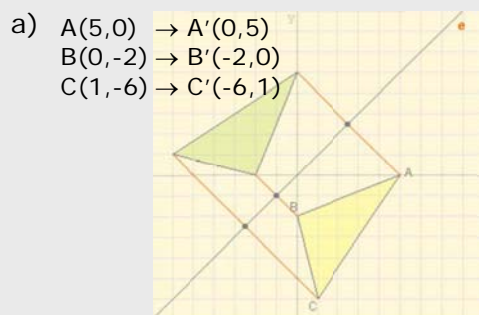
Com una translació i un gir són moviments directes, el resultat de **compondre dues simetries axials** és un **moviment directe**.

EXERCICIS resolts

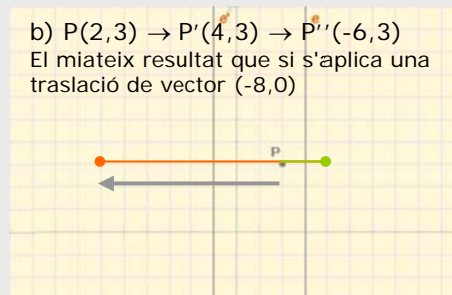
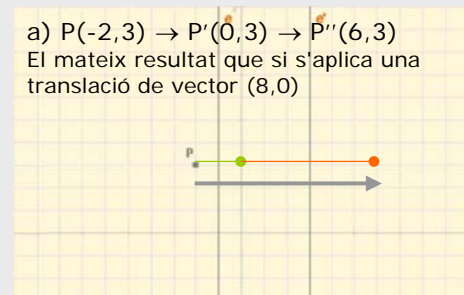
7. Calcula les coordenades del punt P' , simètric del P respecte l'eix de la figura.



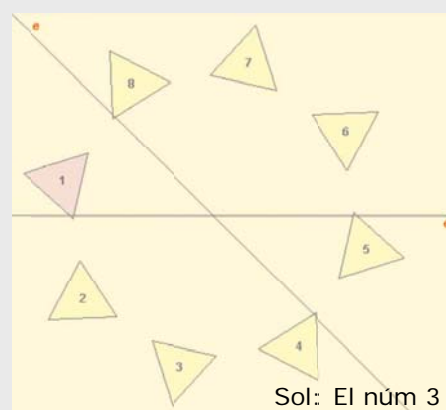
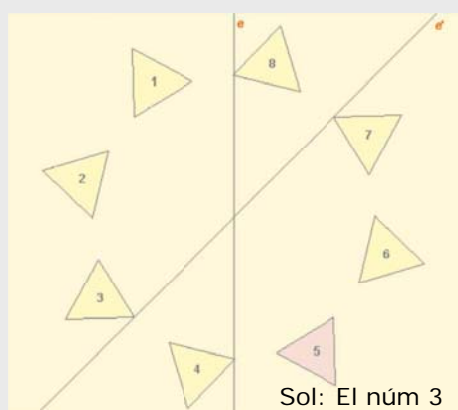
8. En cada cas dibuixa el triangle simètric respecte de l'eix e , del de color groc i indica les coordenades dels vèrtexs del transformat.



9. Calcula les coordenades del punt que resulta d'aplicar-li a P primer una simetria d'eix e i després una altra d'eix e' .



10. Quin és el transformat del triangle de color morat respecte a la composició de simetries d'eixos e i e' ?



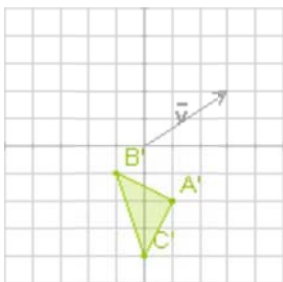
Per practicar



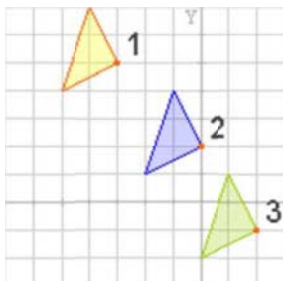
1. Determina les coordenades i el mòdul del vector de la translació que transforma el punt A en el punt B



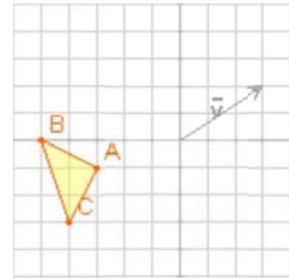
2. Troba el triangle que ha donat lloc al de la figura, després d'aplicar-li una translació de vector $(3,2)$.



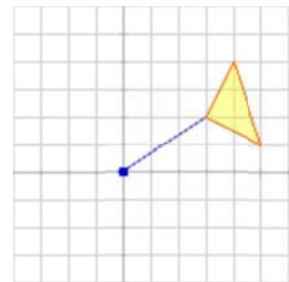
3. El triangle de la figura s'ha traslladat primer de la posició 1 a la 2, mitjançant una translació de vector $(3,-3)$, i després a la 3 per una translació de vector $(2,-3)$. Quin és el vector de la translació que passa directament de 1 a 3?



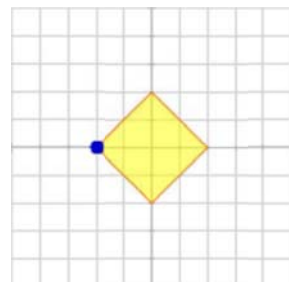
4. Calcula els vèrtexs del triangle que resulta al aplicar-li al de la figura una translació de vector $\vec{v} = (3,2)$.



5. El triangle ABC de la figura gira 90° al voltant de l'origen de coordenades, en quin triangle es transforma?

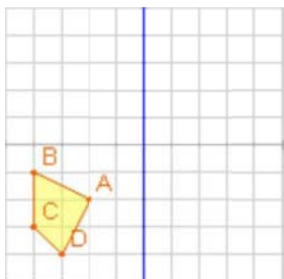


6. El quadrat de la figura gira 45° en sentit contrari a les agulles del rellotge, al del al vèrtex assenyalat, quins són els vèrtexs del quadrat transformat?

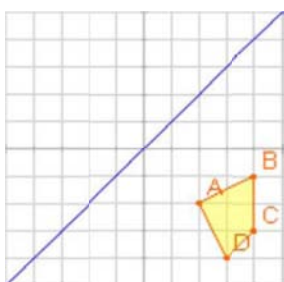


Moviments en el pla

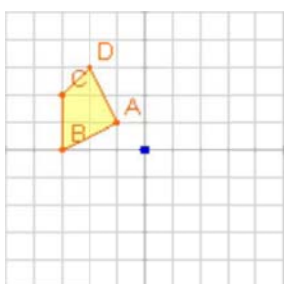
7. Troba la figura transformada del quadrilàter ABCD per una simetria:
a) d'eix el d'ordenades
b) d'eix el d'abscisses.



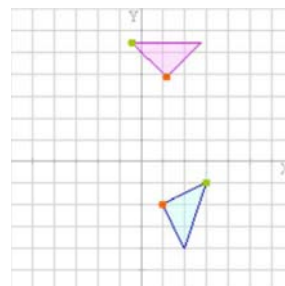
8. Troba la figura transformada del quadrilàter ABCD per una simetria d'eix el de la figura.



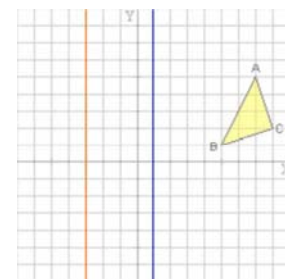
9. Troba la figura transformada del quadrilàter ABCD per una simetria central, de centre l'origen de coordenades.



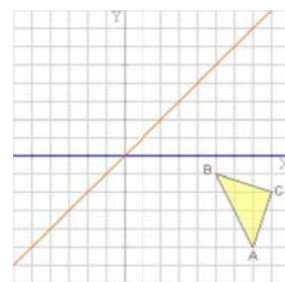
10. El triangle blau es transforma en el morat després d'un gir de centre O, dibuixa'l i calcula el centre de gir.



11. Troba la figura transformada del triangle ABC per una composició de simetries, primer la de eix blau i després la d'eix vermell.



12. Troba la figura transformada del triangle ABC per una composició de simetries, primer la d'eix blau i després la d'eix vermell.



Per saber més



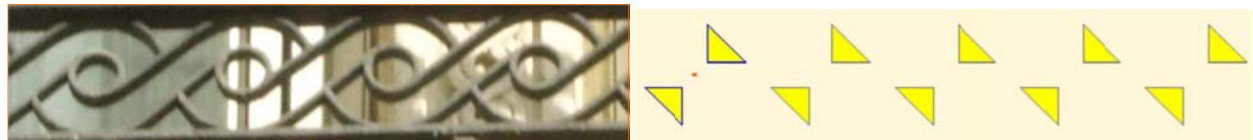
Els set tipus diferents de frisos

Encara que poden construir-se infinits tipus de frisos mitjançant translacions, en realitat tots ells es poden classificar en només **set tipus diferents** segons quins moviments existeixin en el motiu que es trasllada infinitament.

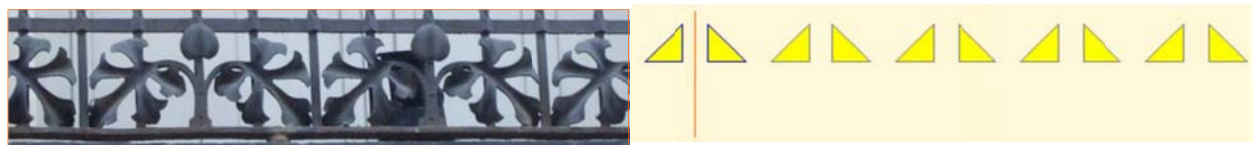
- ✓ **Tipus 1** El motiu que es trasllada no presenta cap moviment.



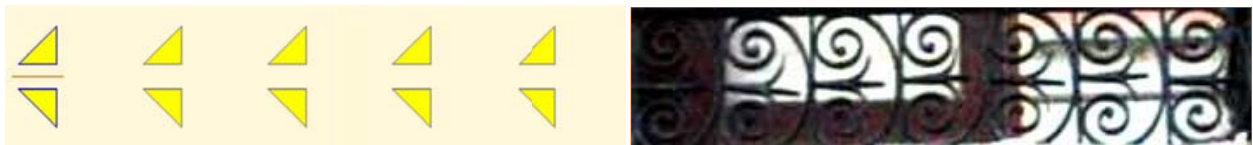
- ✓ **Tipus 2** El motiu que es trasllada presenta una simetria central.



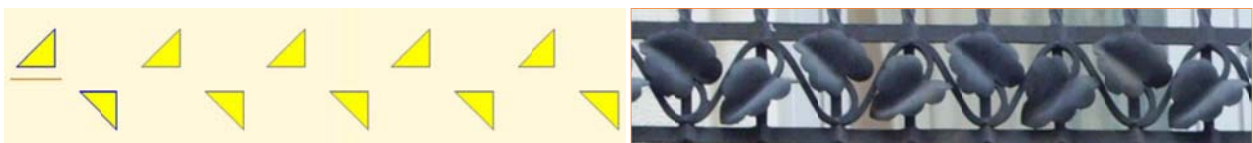
- ✓ **Tipus 3** El motiu que es trasllada presenta una simetria axial.



- ✓ **Tipus 4** El motiu que es trasllada presenta una simetria axial horitzontal.



- ✓ **Tipus 5** El motiu que es trasllada presenta una simetria axial i una translació.



- ✓ **Tipus 6** El motiu que se trasllada presenta una simetria axial vertical i una altra horitzontal.



- ✓ **Tipus 7** El motiu que es trasllada presenta una translació seguida d'una simetria horitzontal quedant com a resultat una simetria axial vertical.



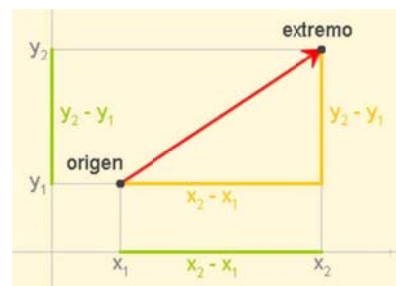
Fotografías de reixes de balcons al C/Manifestación de Saragossa, on es poden trobar exemples d'aquests set Tipuss.

Moviments en el pla

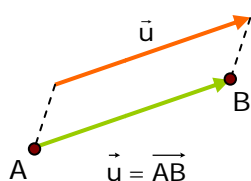


Recorda el més important

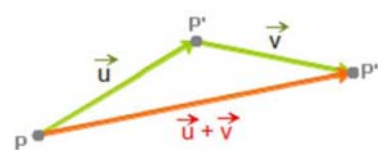
Un vector té **MÒDUL** que és la distància entre l'origen i l'extrem, **DIRECCIÓ** que és la recta que passa per l'origen i l'extrem o qualsevol recta paral·lela a ella, i **SENTIT** que és el que va des de l'origen cap a l'extrem i el marca la fletxa.



Translacions

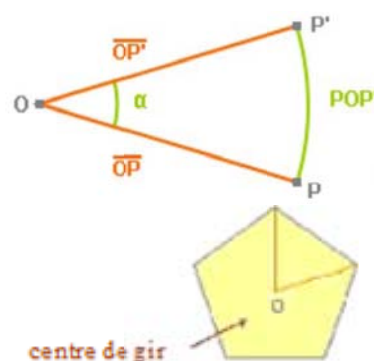


✓ Una translació de vector \vec{u} és un moviment que transforma cada punt **A** del pla, en un altre punt **B** de manera que el vector \overrightarrow{AB} és igual al vector \vec{u}



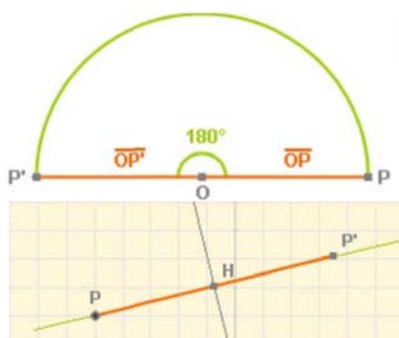
Girs

✓ Un **gir**, de centre un punt **O** i amplitud un angle α , transforma cada punt **P** del pla en un altre punt **P'** de manera que l'angle **POP'** és igual a α i les distàncies **OP** i **OP'** són iguals.



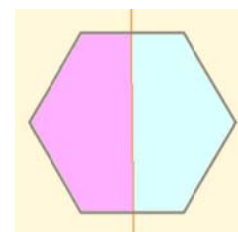
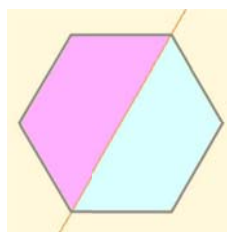
✓ Si quan girem una figura amb centre en un punt **O** i segons un angle menor que 360° , coincideix amb ella mateixa, el punt **O** es diu que és el **centre de gir** de la figura.

Simetries



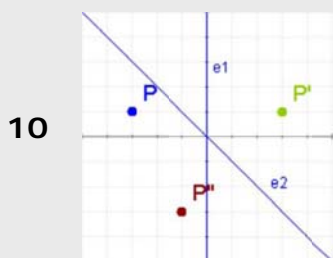
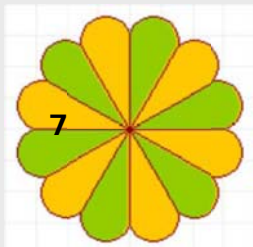
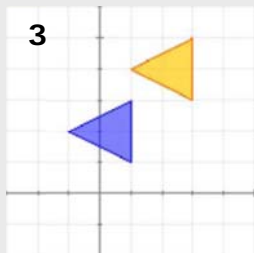
✓ Una **simetria central**, o simetria respecte a un punt **O**, és un **gir** de centre **O** i amplitud 180° . Així, transforma cada punt **P** en un altre punt **P'** de manera que l'angle **POP'** és igual a 180° i les distàncies **OP** i **OP'** són iguals.

✓ Una **simetria axial** respecte a un eix **e** és un moviment que transforma cada punt **P** del pla en un altre **P'** de manera que la recta **e** és mediatriu del segment d'extremes **P** i **P'**.



Figures amb eix de simetria

Autoavaluació

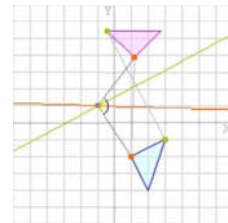


- Donats els punts $A(-2,2)$ i $B(3,-4)$, escriu les coordenades del vector \overrightarrow{AB}
- Quin punt s'obté al traslladar el punt $P(-1,4)$ mitjançant el vector $\vec{v} = (4,-1)$
- Troba les coordenades del vector de la translació que transforma el triangle blau en el taronja.
- El punt $B(4,2)$ és el resultat de traslladar el punt $A(-4,6)$ mitjançant una translació de vector \vec{v} . Quina distància hi ha entre A i B?
- Quin punt resulta al girar $P(4,1)$ al voltant de l'origen de coordenades, un angle de 90° en sentit contrari a les agulles del rellotge?
- Quin és el centre de la simetria que transforma el punt $P(4,-2)$ en el $P'(-2,0)$?
- La figura de l'esquerra té centre de simetria, Quin és el menor angle que ha de girar per quedar invariànt?
- Quants eixos de simetria té la figura 8 de l'esquerra?
- Quines són les coordenades del punt simètric del $P(4,-2)$ en la simetria d'eix la bisectriu del primer quadrant?
- Si al punt P primer li apliquem una simetria d'eix $e1$ i després una simetria d'eix $e2$, resulta el punt P'' . Quin és l'angle del giro que transforma directament P en P'' ?

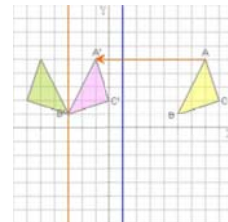
Solucions dels exercicis per practicar

1. $(6, -4)$, mòdul = $\sqrt{52} = 7,4$
2. $A(-2, -4)$ $B(-4, -3)$ $C(-3, -6)$
3. $\vec{v} = (5, -6)$
4. $A'(0, 1)$ $B'(-2, 2)$ $C'(-1, -1)$
5. $A'(-2, 3)$ $B'(-4, 4)$ $C'(-1, 5)$
6. Pel T. de Pitàgores el costat del quadrat mesura $\sqrt{8} = 2,82$
Vèrtexs: $(0, 82)$ $(2, 82)$ $(-2, 2, 82)$ $(-2, 0)$ $(0, 82, 0)$
7. a) $A'(2, -2)$ $B'(4, -1)$ $C'(4, -3)$ $D'(3, -4)$
b) $A'(-2, 2)$ $B'(-4, 1)$ $C'(-4, 3)$ $D'(-3, 4)$
8. $A'(-2, 2)$ $B'(-1, 4)$ $C'(-3, 4)$ $D'(-4, 3)$
9. $A'(1, -1)$ $B'(3, 0)$ $C'(3, -2)$ $D'(2, -3)$

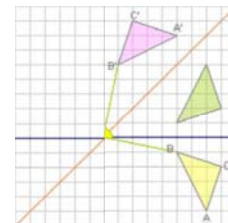
10. Centre $(-1, 0)$



11. $A'(-1, 5)$
 $B'(-3, 1)$
 $C'(0, 2)$



12. Equival a un gir de 90° en sentit positiu.



Solucions AUTOAVALUACIÓ

1. $(5, -6)$
2. $P'(3, 3)$
3. $(2, 2)$
4. $|\vec{v}| = 10$
5. $(-1, 4)$
6. $(1, -1)$
7. 60°
8. $(-2, 4)$
9. 5
10. 90°