10 Funcions lineals i quadràtiques

Objectius

En aquesta unitat aprendràs a:

- Identificar problemes en què intervenen magnituds directament proporcionals.
- Calcular la funció que relaciona aquestes magnituds a partir de diferents dades i representar-la gràficament.
- Representar aquestes funcions de diferents maneres.
- Comparar funcions d'aquests tipus.
- Resoldre problemes reals en què intervenen aquestes funcions.
- Reconèixer i representar funcions quadràtiques.

Abans de començar

1.Funció de proporcionalitat directa ...... pàg. 4
Definició
Representació gràfica

2.Funció afí .... pàg. 6
Definició
Representació gràfica

3.Equació de la recta .... pàg. 8
Forma punt-pendent
Recta que passa per dos punts
Forma general

4.Posició relativa de dues rectes .... pàg. 12
Anàlisi en forma explícita
Anàlisi en forma general

5.Aplicacions .... pàg. 14
Problemes simples
Problemes combinats

6.Funcions quadràtiques .... pàg. 16
La funció $y=ax^2$
Trasllacions d'una paràbola
Aplicacions

Exercicis per practicar

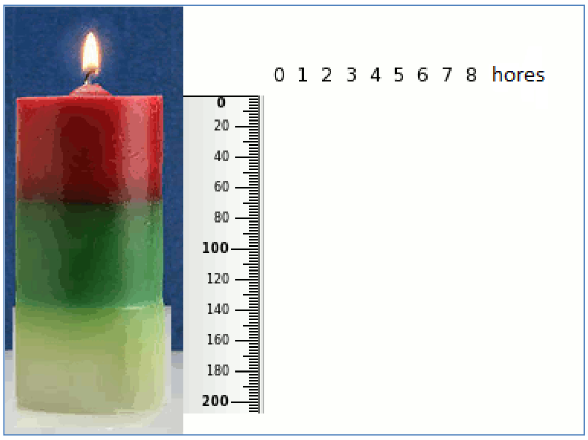
Per saber-ne més

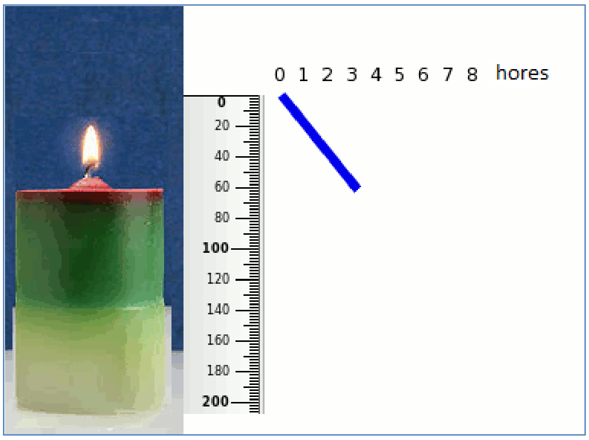
Resum

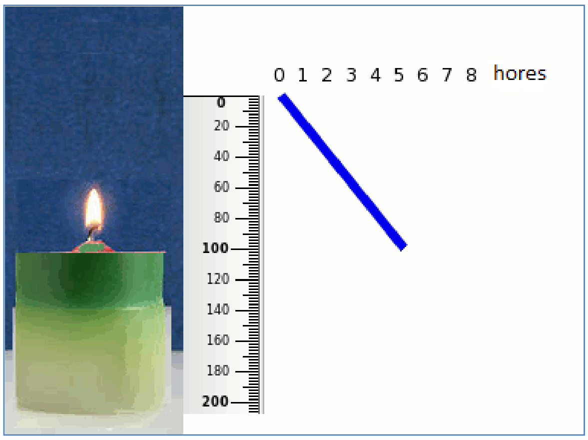
Autoavaluació

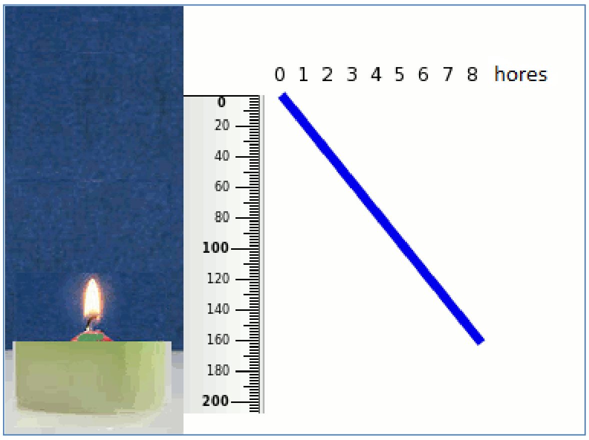
Activitats per enviar al tutor

Abans de començar









Investiga

Si una síndria pesa 3 kg i una altra pesa 6 kg ens cobraran el doble per la segona. Però, si la primera té un diàmetre de 15 cm i l'altra el té de 30 cm, el preu de la segona serà el doble que el de la primera?

Intenta trobar la resposta donant una explicació raonada.

1. Funció de proporcionalitat directa

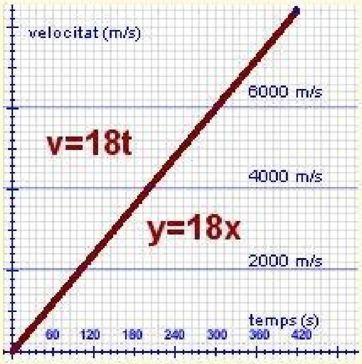
Definició

S'anomena **funció de proporcionalitat directa** o, senzillament, **funció lineal** a qualsevol funció que relacioni dues magnituds directament proporcionals (x,y). La seva equació té la forma:

$$y = mx \quad ó \quad f(x) = mx$$

El factor m és la constant de proporcionalitat i rep el nom de **pendent** de la funció perquè, com veurem a la següent secció, indica la inclinació de la recta que la representa gràficament.

Recorda: dues magnituds són directament proporcionals si el seu quocient és constant.



temps: 450 s
velocitat: 18 · 450 = 8100 m/s

Els coets propulsors de la llançadora espacial produeixen un impuls (o acceleració) d'uns 18 metres per segon cada segon. Funcionen durant 450 segons abans de deixar-se anar. Velocitat i temps són, en aquest cas, magnituds directament proporcionals i la constant de proporcionalitat és l'acceleració.

Representació gràfica

Com has vist, les funcions lineals es representen gràficament com a línies rectes. A més, donat y=mx, si x=0 llavors y=0; per tant la gràfica de totes les funcions lineals passa pel punt (0,0).

Per dibuixar la gràfica n'hi ha prou amb obtenir les coordenades d'un altre punt, donant un valor qualsevol a la x i unir-lo amb el (0,0).

Si x=1, llavors y=m, per tant m representa la variació de la y per cada unitat de x, és a dir, la inclinació o **pendent de la recta**. Si m és positiva, representa la quantitat que puja la y per cada unitat de x, i si m és negativa, la quantitat que baixa.

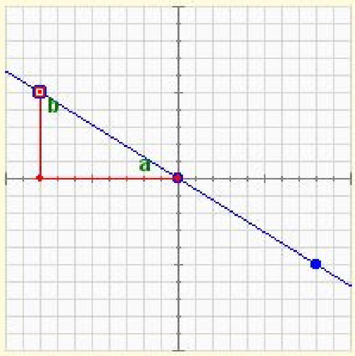
CONSTRUCCIÓ DE LA GRÀFICA DE LA FUNCIÓ $y = -\frac{5}{8}x$

1. Dibuixem el punt (0,0)

$m = -\frac{5}{8} = -0{,}625$

2. Donem un valor a x.
   Per simplificar donem el valor del denominador: $x=8 \Rightarrow y=-5$ i dibuixem el punt (8,-5).

3. Unim els dos punts.



Mou el control amb el ratolí i observa:

$\frac{b}{a} = \frac{5}{-8} = -0{,}625 = m$

El quocient entre les dues variables és constant.

EXERCICIS resolts

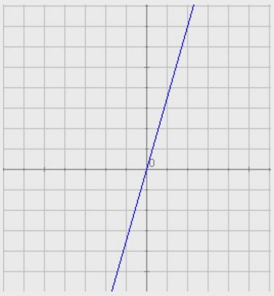
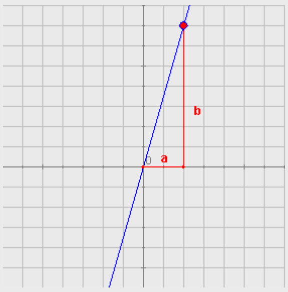
1. Determina si les relacions entre les parelles de magnituds següents són lineals o no, i per a això escriu l'equació que les relaciona.

a. Relació entre el preu inicial i el preu rebaixat amb un 10%.
b. Relació entre el pes i el volum d'un material en condicions constants de pressió i temperatura.
c. Un banc ofereix un dipòsit anual al 5% amb una comissió fixa de 20€. Relació entre la quantitat invertida i els interessos rebuts.
d. Relació entre l'àrea d'un quadrat i la longitud del seu costat.

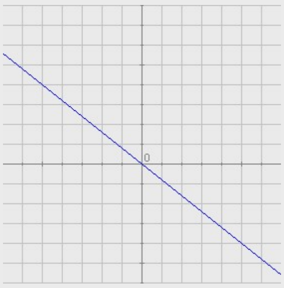
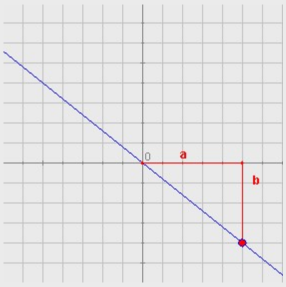
Solució:

a) Si el descompte és 10%, pago el 90%: PRebaixat = 0'9 · PInicial (Sí, és lineal)
b) La relació entre pes (P) i volum (V) és la densitat (d), que és constant si no canvien les condicions de pressió i temperatura: P = d·V (SÍ, és lineal)
c) Si C és la quantitat invertida i I són els interessos I = 0'05 · C – 20 (No és lineal, però quasi ho és. En realitat és una funció afí que veurem en el capítol següent)
d) A = long^2 (NO, és lineal)

2. Determina les equacions de les funcions lineals, les gràfiques de les quals són:

a.  

Busquem un punt de coordenades enteres (no és estrictament necessari però és més còmode si és possible). a = 2, b = 7. El pendent és m=7/2 i l'equació és $y = \frac{7}{2}x$

b.  

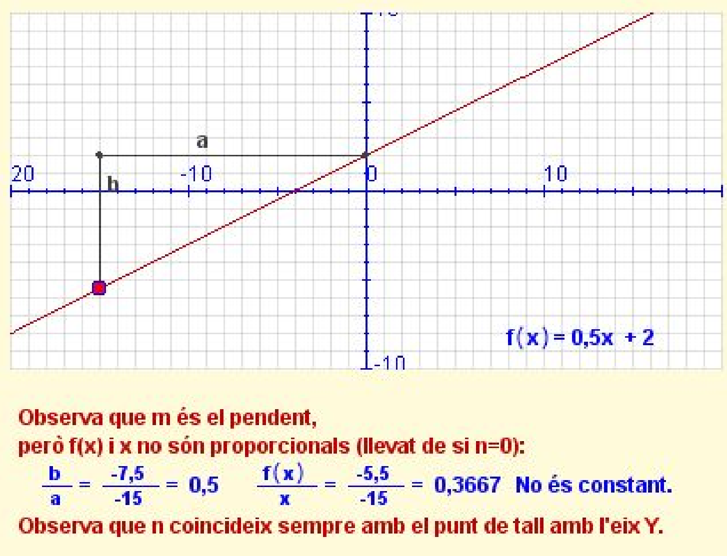
En aquest caso a = 5 i b = -4 (li assignem un valor negatiu perquè la recta és decreixent). El pendent és, doncs, m = -4/5 i l'equació $y = -\frac{4}{5}x$

2. Funció afí

Definició

Si a dues magnituds directament proporcionals se'ls aplica alguna condició inicial, la funció que les lliga ja no és totalment lineal (*les magnituds ja no són proporcionals*). Es diu que és una **funció afí** i la seva forma és:

$$\mathbf{y = mx + n \quad \text{ó} \quad f(x) = mx + n}$$



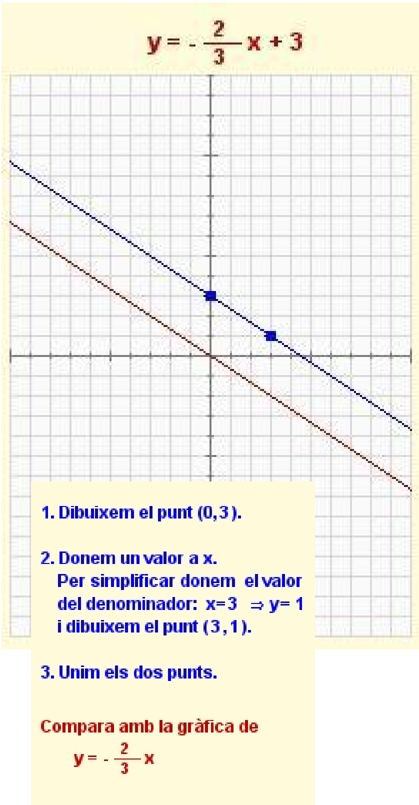
El **pendent**, m, continua essent la constant de proporcionalitat i el terme n s'anomena **ordenada en l'origen** perquè és el valor que pren y (ordenada) quan x val 0 (abscissa en l'origen).

Recorda: Ara el quocient entre f(x) i x no és constant.

Representació gràfica

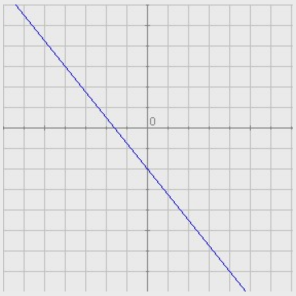
Les funcions afins es representen també mitjançant línies rectes, ja que el terme independent que les diferencia de les funcions de proporcionalitat (lineals) només produeix una translació cap amunt o cap avall de la gràfica corresponent.

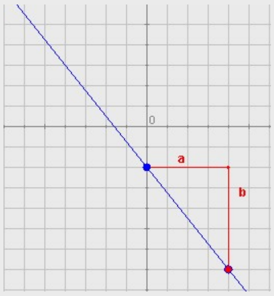
Per dibuixar la gràfica necessitem obtenir dos punts. Un ens el proporciona la pròpia equació, ja que, com hem vist, l'ordenada en l'origen, n, ens indica que la recta passa pel punt (0,n). L'altre punt s'obté donant un valor qualsevol a x i obtenint el corresponent valor de y. Unint els dos punts tenim la gràfica de la funció.



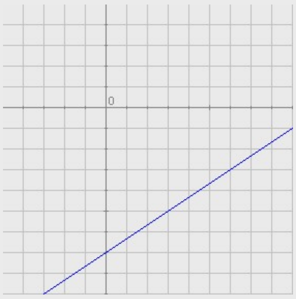
EXERCICIS resolts

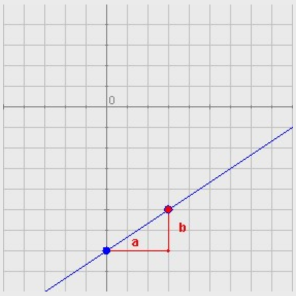
3. Determina les equacions de les funcions afins les gràfiques de les quals són:

a. 



Talla l'eix Y en el punt (0,-2), per tant, n=-2. Ara busquem un altre punt de coordenades enteres si és possible (4,-7) i calculem les seves distàncies horitzontal i vertical al punt (0,-2): a = 4, b = -5 (Recorda: negatiu per ser una recta decreixent). El pendent és m=-5/4 i l'equació és $y = -\frac{5}{4}x - 2$

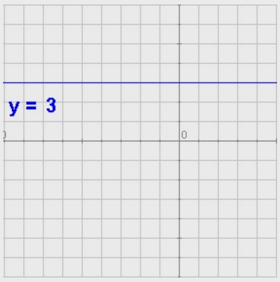
b. 

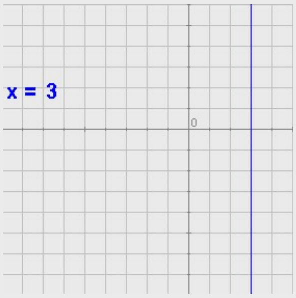


En aquest cas, n=-7, a=3 i b=2. El pendent és, doncs, m = 2/3 i l'equació $y = \frac{2}{3}x - 7$

4. Casos particulars:

a. Si el pendent és zero, l'equació és y = n i la funció n és constant.





b. Si la recta és vertical l'equació és **x = k** i **no és una funció**. Direm que en aquest cas, **el pendent és infinit**.

3. Equació de la recta

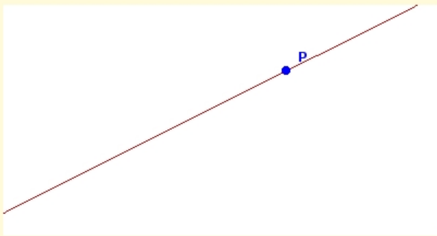
Forma punt-pendent

L'equació **y = mx + n** que hem vist s'anomena **forma explícita** de l'equació de la recta, i ens permet trobar aquesta equació quan coneixem el pendent i l'ordenada en l'origen.

Quan només coneixem el pendent, m, i les coordenades d'un altre dels punts de la recta, (x_o, y_o), la seva equació és

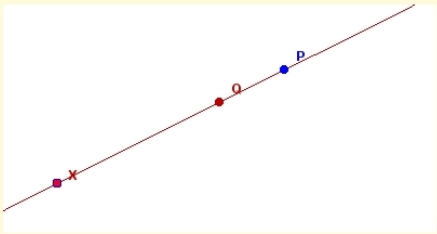
$$y - y_o = m\ (x - x_o)$$

Aquesta equació rep el nom de **forma punt-pendent** de l'equació de la recta. En les imatges de la dreta s'explica com s'obté.



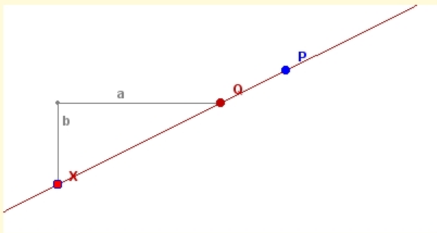
De la recta de la imatge es coneixen el seu pendent i les coordenades d'un dels seus punts. Volem determinar la seva equació:

$m = \frac{1}{2} \quad P = (6,5)$



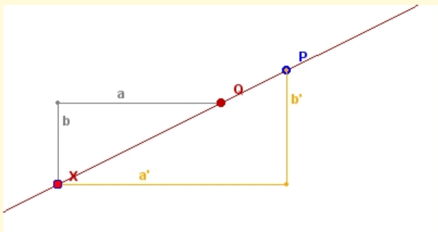
Considerem un punt arbitrari de la recta, X i suposem que coneixem l'ordenada en l'origen Q:

$m = \frac{1}{2} \quad P = (6,5) \quad X = (x,y) \quad Q = (0,n)$



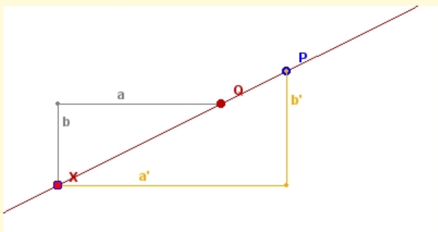
En els apartats anteriors hem vist que encara que moguem X, el quocient entre b i a és constant i igual al pendent:

$m = \frac{1}{2} \quad P = (6,5) \quad X = (x,y) \quad Q = (0,n) \quad \frac{b}{a} = m = \frac{1}{2}$



Observa els triangles de la figura: tenen els costats paral·lels, així són semblants, per tant:

$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} = m = \frac{1}{2}$



P = (6,5) X = (x,y)

b' és la distància vertical entre P i X: $b' = y - 5$

a' és la distància horitzontal entre P i X: $a' = x - 6$

per tant, $\frac{b'}{a'} = \frac{y-5}{x-6} = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2} \cdot (x - 6)$

EXERCICIS resolts

5. Troba l'equació de la recta que passa per P(-8,-6) i té pendent m = -5/9

L'equació en forma punt-pendent:

$$y + 6 = -\frac{5}{9}\ (x + 8)$$

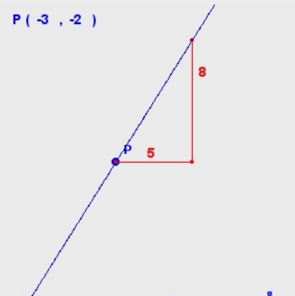
En forma explícita:

$$y + 6 = -\frac{5}{9}x - \frac{40}{9}$$

$$y = -\frac{5}{9}x - \frac{94}{9}$$

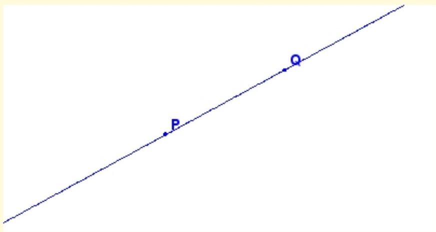
6. Determina l'equació d'aquesta recta:

P (-3 , -2)

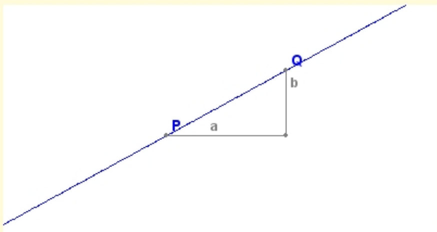


Si la recta creix, el pendent és positiu: $m = \frac{8}{5}$

L'equació és: $y + 2 = \frac{8}{5}\ (x + 3)$

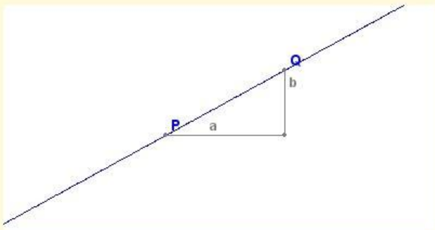


El punt P de la figura té coordenades conegudes (x_0, y_0) i, el punt Q, (x_1, y_1). Volem trobar l'equació de la recta que passa pels dos punts:



Ho fem igual que en casos anteriors:

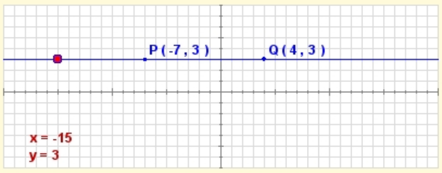
$a = x_1 - x_0$ $\quad b = y_1 - y_0$ $\quad m = \frac{b}{a} = \frac{y1 - y0}{x1 - x0}$



$m = \frac{b}{a} = \frac{y1 - y0}{x1 - x0}$ P = (x0,y0), forma punt-pendent:

$y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{y1 - y0}{x1 - x0}(x - x_0) \Leftrightarrow$

$$\frac{y - y0}{y1 - y0} = \frac{x - x0}{x1 - x0}$$

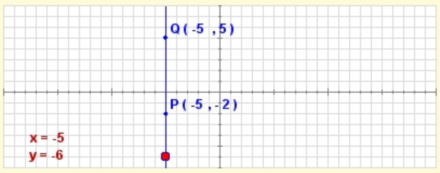


CASOS ESPECIALS: Ordenades iguals.
Amb la fórmula anterior l'equació de la recta que passa per P i Q és:

$$\frac{y - 3}{3 - 3} = \frac{x + 7}{4 + 7} \Leftrightarrow \frac{y - 3}{0} = \frac{x + 7}{11}$$

No és vàlida perquè hi ha una divisió per zero!
Movent el punt vermell, comprova que tots els punts de la recta tenen la mateixa ordenada, per tant, l'equació de la recta en aquest cas és:

$$y = 3$$



CASOS ESPECIALS: Abscisses iguals.
Amb la fórmula anterior l'equació de la recta que passa per P i Q és:

$$\frac{y + 2}{5 + 2} = \frac{x + 5}{-5 + 5} \Leftrightarrow \frac{y + 2}{7} = \frac{x + 5}{0}$$

No és vàlida perquè hi ha una divisió per zero!
Movent el punt vermell, comprova que tots els punts de la recta tenen la mateixa abscissa, per tant, l'equació de la recta en aquest cas és:

$$x = -5$$

Recta que passa per dos punts

Siguin $P(x_o,y_o)$ i $Q(x_1,y_1)$ dos punts del pla. L'equació de la recta que passa per aquests punts és:

$$\frac{y - y_o}{y_1 - y_o} = \frac{x - x_o}{x_1 - x_o}$$

Aquesta equació rep el nom de **forma contínua** de l'equació de la recta. En les imatges de l'esquerra s'explica com s'obté.

EXERCICIS resolts

7. Troba l'equació de la recta que passa per P(-6,-3) i Q(-9,-9). Passa a forma explícita i determina el pendent i l'ordenada en l'origen.

L'equació buscada és: $\frac{y - (-3)}{-9 - (-3)} = \frac{x - (-6)}{-9 - (-6)}$

$$\frac{y + 3}{-6} = \frac{x + 6}{-3}$$

La forma explícita s'obté aïllant y:

$$y = -6\,\frac{x + 6}{-3} - 3 = 2(x + 6) - 3 =$$

$$= 2x + 12 - 3 = 2x + 9$$

$$y = 2x + 9$$

El pendent és 2

l'ordenada en l'origen 9

8. Troba l'equació de la recta que passa per P(4,3) i Q(-2,-8). Passa a forma explícita i determina el pendent i l'ordenada en l'origen.

L'equació buscada és: $\frac{y - (-8)}{3 - (-8)} = \frac{x - (-2)}{4 - (-2)}$

$$\frac{y + 8}{11} = \frac{x + 2}{6}$$

La forma explícita s'obté aïllant y:

$$y = 11\,\frac{x + 2}{6} - 8 = \frac{11}{6}(x + 2) - 8 =$$

$$= \frac{11x + 22}{6} - 8 = \frac{11x + 22 - 48}{6} = \frac{11x - 26}{6}$$

$$y = \frac{11}{6}x - \frac{13}{3}$$

El pendent és $\frac{11}{6}$

l'ordenada en l'origen $-\frac{13}{3}$

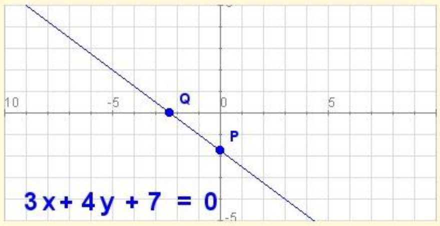
Forma general o implícita

La manera més habitual de representar rectes és la **forma general** o **implícita**:

$$Ax + By + C = 0$$

on A, B i C són nombres qualssevol (al menys A o B han de ser diferents de zero). Si B=0, es tracta d'una recta vertical d'equació x=-C/A. Si B no és zero el pendent és -A/B.

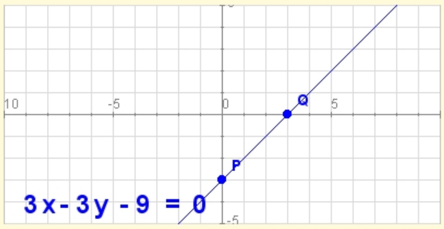
En les imatges es mostren representacions de rectes en forma general i el pas d'altres formes a la general.



REPRESENTACIÓ GRÀFICA EN FORMA GENERAL:
Obtenim dos punts donant valors a una de les variables.
El més senzill és donar a les variables el valor 0:

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{4}$ $\quad P = \left(0, -\frac{7}{4}\right)$

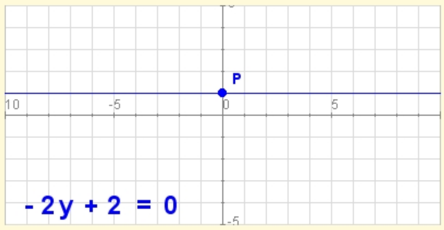
$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$ $\quad Q = \left(-\frac{7}{3}, 0\right)$



REPRESENTACIÓ GRÀFICA EN FORMA GENERAL:
Obtenim dos punts donant valors a una de les variables.
El més senzill és donar a les variables el valor 0:

$x = 0 \Rightarrow y = -3$ $\quad P = (0, -3)$

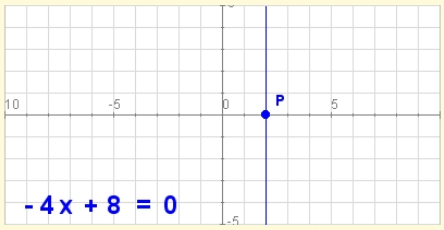
$y = 0 \Rightarrow x = 3$ $\quad Q = (3, 0)$



REPRESENTACIÓ GRÀFICA EN FORMA GENERAL:

Com ja sabem, en aquest cas és una recta horitzontal.
L'ordenada en l'origen ens diu a quina altura passa:

$y = 1$ $\quad P = (0, 1)$



REPRESENTACIÓ GRÀFICA EN FORMA GENERAL:

Com ja sabem, en aquest cas és una recta vertical.
El valor de x ens indica per on passa:

$x = 2$ $\quad P = (2, 0)$

PAS DE QUALSEVOL FORMA A FORMA GENERAL:

a) Funció lineal en forma explícita:

$y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0 \quad (A = m, B = -1, C = 0) \qquad m = -\frac{A}{B}$

b) Funció afí en forma explícita:

$y = mx + n \Leftrightarrow mx - y + n = 0 \quad (A = m, B = -1, C = n) \quad m = -\frac{A}{B}$

c) Funció constant (paral·lela a l'eix X):

$y = n \Leftrightarrow y - n = 0 \; (A = 0, B = 1, C = -n) \qquad m = -\frac{A}{B} = 0$

d) Recta vertical:

$x = n \Leftrightarrow x - n = 0 \; (A = 1, B = 0, C = -n)$ No es pot trobar m.

e) Forma punt-pendent:

$y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow mx - y + y_0 - mx_0 = 0 \qquad m = -\frac{A}{B}$

$(A = m, B = -1, C = y_0 - mx_0)$

f) Forma contínua:

$\frac{y - y0}{y1 - y0} = \frac{x - x0}{x1 - x0} \Leftrightarrow (y1 - y0)(x - x0) = (x1 - x0)(y - y0) \Leftrightarrow$

$(y_1 - y_0)\,x - (x_1 - x_0)\,y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0) = 0$

$(A = y_1 - y_0,\ B = -(x_1 - x_0),\ C = y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)) \quad m = -\frac{A}{B}$

EXERCICIS resolts

9. Determina l'equació de la recta que passa pel punt (1,-7) i té pendent –2/3. Després passa a forma general.

Solució: En forma punt-pendent l'equació és $y + 7 = -\frac{2}{3}(x - 1)$.

Traient denominadors i parèntesis queda **3y + 21 = -2x + 2**. Passant-ho tot al primer membre queda **2x + 3y + 19 = 0**. També seria correcte el resultat amb tots els signes canviats: -**2x - 3y - 19 = 0**

10. Determina l'equació de la recta que passa pel punt (-4,-2) i té pendent 0. Després passa a forma general.

Solució: L'equació en la forma punt-pendent ja és l'equació general: **y + 2 = 0**

11. Determina l'equació de la recta que passa pels punts P(2,-2) i Q(-8,3). Després passa a forma general.

Solució: En forma contínua l'equació és $\frac{y + 2}{3 + 2} = \frac{x - 2}{-8 - 2}$.

Traient denominadors queda: **-10y – 20 = 5x – 10**.
Ho passem tot al primer membre: **-5x – 10y – 10 = 0**. Donat que tots els termes són múltiples de 5, podem simplificar: **-x – 2y – 2 = 0**. També podem canviar el signe de tots els termes: **x + 2y + 2 = 0**.

12. Determina l'equació de la recta que passa pels punts P(5,-2) i Q(3,-2). Després passa a forma general.

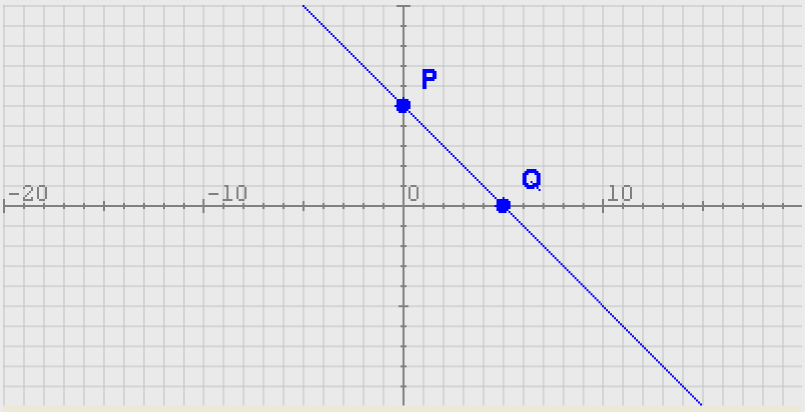
Solució: Si P i Q tenen la mateixa ordenada, es tracta de la recta horitzontal **y = -2**, o en forma general: **y + 2 = 0**.

13. Determina l'equació de la recta que passa pels punts P(6,5) i Q(6,-2). Després passa a forma general.

Solució: Si P i Q tenen la mateixa abscissa, es tracta de la recta vertical **x = 6**. En forma general queda **x – 6 = 0**.

14. Representa gràficament la recta d'equació **x + y – 5 = 0**.

Solució: Aïllem y (passem a la forma explícita): y = - x + 5. Per tant, el pendent és –1 i l'ordenada en l'origen és 5. És a dir, la recta passa pel punt (0,5). Calculem un altre punt donant, per exemple, el valor 5 a x. Aleshores, y = - 5 + 5 = 0. La recta passa també pel punt (5,0). Dibuixem els punts i tracem la recta amb el regle:



4. Posició relativa de dues rectes

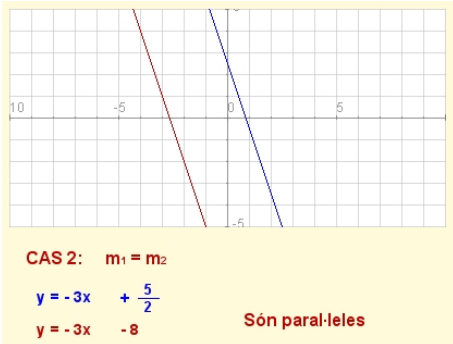
Anàlisi en forma explícita

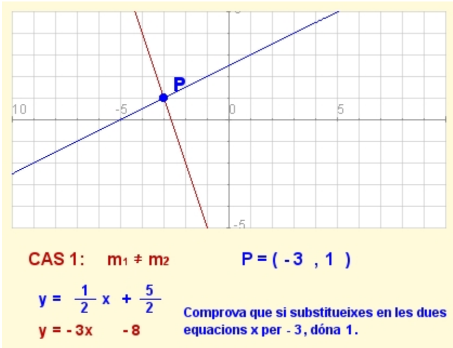
Donades dues rectes

$$y = m_1x + n_1 \qquad y = m_2x + n_2$$

Si $m_1 \neq m_2$ les rectes es tallen en un punt les coordenades del qual s'obtenen resolent el sistema. Es diu que les rectes són **secants**.

Si $m_1 = m_2$ les rectes són **paral·leles**. Si, a més a més, $n_1 = n_2$ les rectes són **coincidents**.





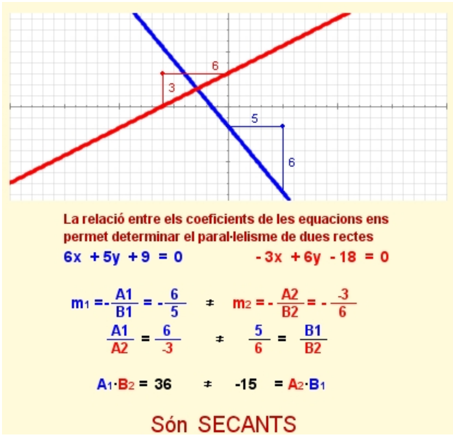
Anàlisi en forma general

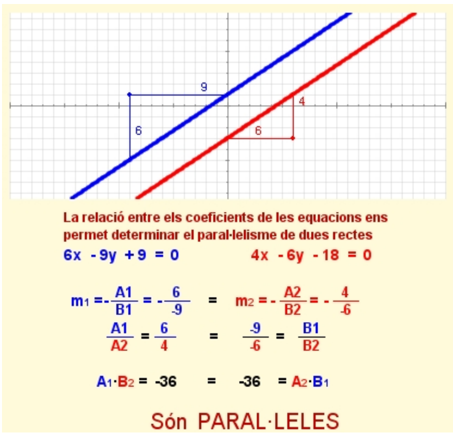
Donades dues rectes

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Si $A_1B_2 \neq A_2B_1$ són **secants**. Igualment, les coordenades del punt de tall s'obté resolent el sistema.

Si $A_1B_2 = A_2B_1$ les rectes són **paral·leles**.





EXERCICIS resolts

15. Determina la posició relativa de les rectes **y = - 4x + 1**, **y = 4x**. En cas que es tallin, determina les coordenades del punt de tall.

Solució: el pendent de la primera recta és $m_1 = -4$ i el de la segona és $m_2 = 4$. Donat que els pendents són diferents, les rectes són **secants**. Trobem ara el punt de tall resolent el sistema:

$$-4x + 1 = 4x; \quad 1 = 8x; \quad x=1/8; \quad y = 4\cdot(1/8) = 4/8 = ½; \quad P = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$$

16. Determina la posició relativa de les rectes **y = - 2x + 3**, **y = -2x - 2**. En cas que es tallin, determina les coordenades del punt de tall.

Solució: El pendent d'ambdues rectes és –2 i l'ordenada en l'origen és diferent, per tant, són dues rectes **paral·leles**.

17. Determina la posició relativa de les rectes **x – 3y – 1 = 0**, **4x + y + 1 = 0**. En cas que es tallin, determina les coordenades del punt de tall.

Solució: Ja que estan en forma general, haurem de comprovar si els coeficients respectius de x i de y són proporcionals: A1=1, B1=-3, A2=4, B2=1, aleshores, A1·B2 = 1 i A2·B1 = -12. Són diferents, per tant, les rectes són **secants**. Anem a trobar les coordenades del punt de tall. Hi ha diferents maneres de fer-ho. Una d'elles és aïllar y en ambdues equacions (passar a forma explícita) i repetir el que hem fet abans a l'exercici 15:

$$y = \frac{1-x}{-3}; \quad y = -1-4x; \quad \frac{1-x}{-3} = -1-4x; \quad 1-x = 3+12x; \quad -2 = 13x; \quad x = -\frac{2}{13}$$

Ara substituïm el valor trobat per x en qualsevol de les dues equacions:

$$y = -1-4\cdot\left(-\frac{2}{13}\right) = -1+\frac{8}{13} = -\frac{5}{13}$$

Així, les coordenades del punt de tall són $P = \left(-\frac{2}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

Comprovem que el resultat és correcte substituint els dos valors en ambdues equacions i verificant que en tot cas les igualtats es compleixen:

$$-\frac{2}{13} - 3\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) - 1 = -\frac{2}{13} + \frac{15}{13} - 1 = \frac{13}{13} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$4\cdot\left(-\frac{2}{13}\right) + \left(-\frac{5}{13}\right) + 1 = -\frac{8}{13} - \frac{5}{13} + 1 = -\frac{13}{13} + 1 = -1 + 1 = 0$$

18. Determina la posició relativa de les rectes **2x – 5y – 1 = 0**, **-4x + 10y + 1 = 0**. En cas que es tallin, determina les coordenades del punt de tall.

Solució: Ja que estan en forma general, haurem de comprovar si els coeficients respectius de x i de y són proporcionals: A1=2, B1=-5, A2=-4, B2=10, aleshores A1·B2 = 20 y A2·B1 = 20. Són iguals, per tant, les rectes són **paral·leles**.

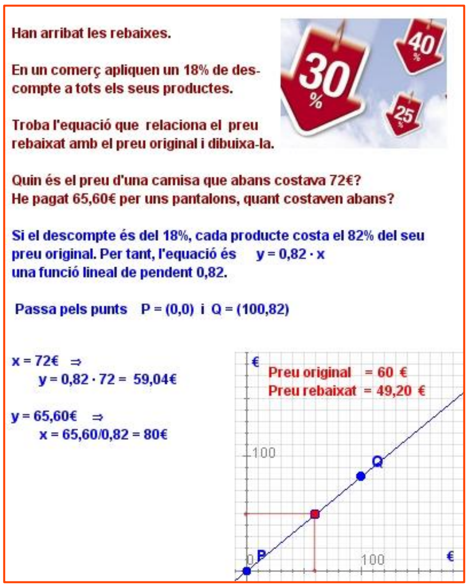
5. Aplicacions

Problemes simples

Les funcions lineals descriuen fenòmens en els quals intervenen dues magnituds directament proporcionals. La representació gràfica serà una recta, el pendent de la qual ens informa de la rapidesa de la variació d'una magnitud respecte a l'altra i l'ordenada en l'origen ens informa sobre les condicions inicials.

En les imatges de la dreta hi ha un parell d'exemples de com obtenir l'equació (d'una funció lineal o afí) a partir de dos punts coneguts o a partir d'un punt i el pendent i, a partir d'elles, fer prediccions i càlculs de situacions desconegudes.

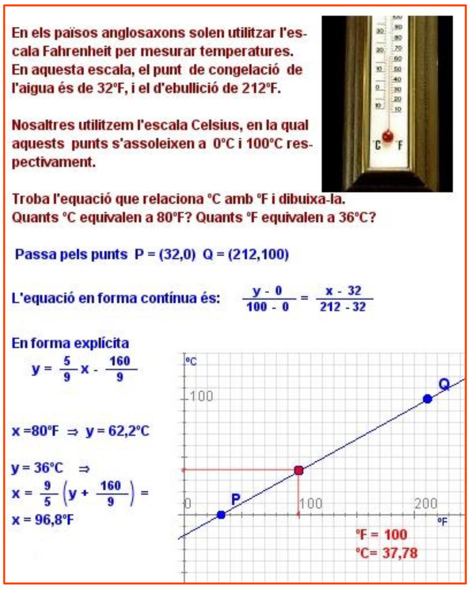
En la descripció de fenòmens reals és freqüent que les magnituds que es relacionen vinguin donades per nombres de mides molt diferents, per la qual cosa en representar-les gràficament, caldrà triar unes escales adequades en els eixos corresponents.

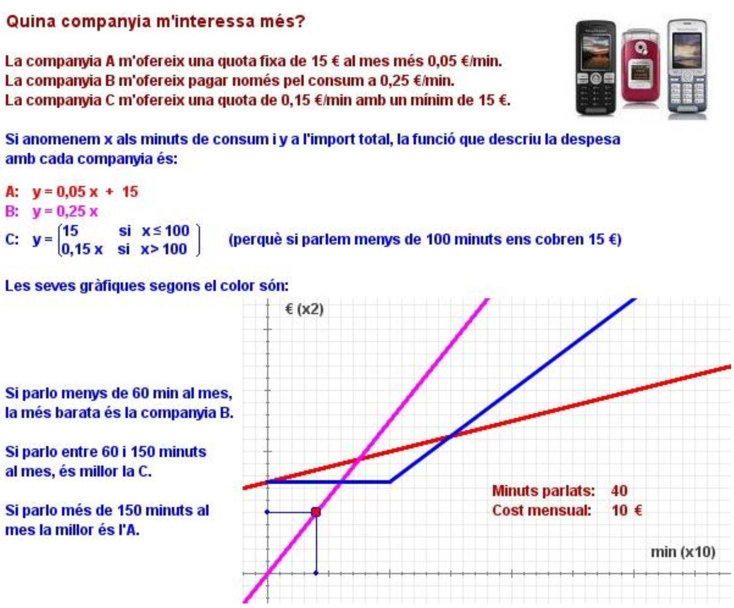


Problemes combinats

On realment resulta interessant l'aplicació de les funcions lineals és en l'estudi de diverses funcions de manera simultània, de forma que puguem comparar-les amb facilitat.

A sota tens un exemple il·lustratiu:





EXERCICIS resolts

19.

En una ciutat tenen implantada l'Ordenança de Regulació d'Aparcament (ORA). La norma indica que s'ha de pagar certa quantitat per cada minut i que no hi ha un mínim.

En Joan posa 1,35€ i el parquímetre indica que disposa de 45 minuts. La Sara amb 0,84€ té 28 minuts.

Troba l'equació que relaciona el preu amb el temps i dibuixa-la.
Quant s'ha de pagar per un aparcament de 55 minuts?
Si paguem 2,40€, de quant temps disposem?

Triem les escales de manera que el temps està en minuts i el preu en cèntims d'euro.

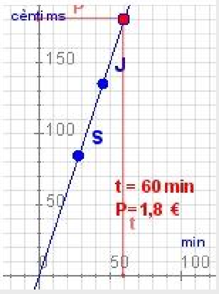
Passa pels punts
J = (45,135) S = (28, 84)

Donat que passa per l'origen és lineal i el pendent és m =135/45 = 3

L'equació és y = 3x

x = 55 min ⇒ y = 3 · 55 = 165 c = 1,65€

y = 2,40€ ⇒ x = 240/3 = 80 min



20.

En un banc ens ofereixen un termini fix al 5% anual amb una comissió de manteniment de 20€ anuals, sigui quina sigui la inversió realitzada.

Troba l'equació que relaciona l'interès produït amb el capital invertit.

Quant produiran 3000€ en un any?
Quant s'ha invertit si s'han rebut 117,50€ d'interessos?

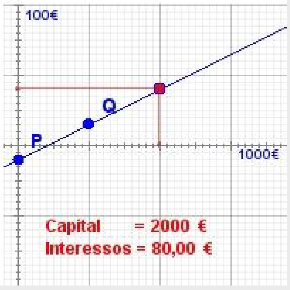
L'interés és proporcional al capital invertit. La constant de proporcionalitat és 5% = 0,05. Hi ha unes condicions inicials que resten 20€, llavors és una funció afí d'equació y = 0,05 · x - 20

Passa pels punts P = (0,-20) i Q = (1000,30)

x = 3000€ ⇒
y = 0,05 · 3000 - 20 = 130€

y = 117,50€ ⇒
$x = \frac{y+20}{0{,}05} = 2750€$

Observa les escales: cada unitat en horitzontal són 1000€ i cada unitat vertical són 100€.
Comprova que només hi ha benefici si la inversió és superior a 400€.



21.

Final d'etapa.

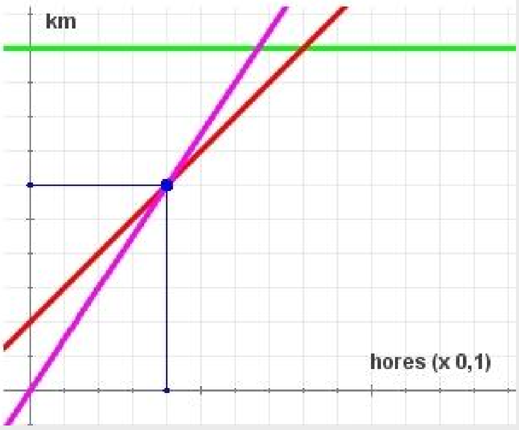
En una etapa amb final en alt, un escapat està a 8 km de la meta i circula a 10 km/h. Un grup perseguidor es troba a 10 km del final corrent a 15 km/h. Atraparan l'escapat si mantenen les velocitats? En cas afirmatiu, quant de temps tardaran i a quina distància de la meta?

Anomenem x al temps transcorregut des d'ara (mesurat en hores) i y a la distància recorreguda des d'aquest moment (mesurada en km). L'escapat està 2 km més endavant, llavors la funció que descriu el desplaçament respecte al temps en cada cas és:

Escapat: y = 10 x + 2 Grup perseguidor: y = 15 x Meta: y = 10

Les seves gràfiques segons el color són:

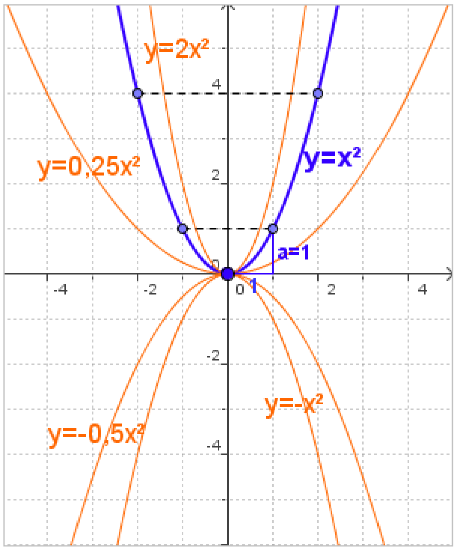
L´atrapen en 0,4 hores (24 minuts) a 4 km de la meta.



6. Funcions quadràtiques

La funció y = ax²

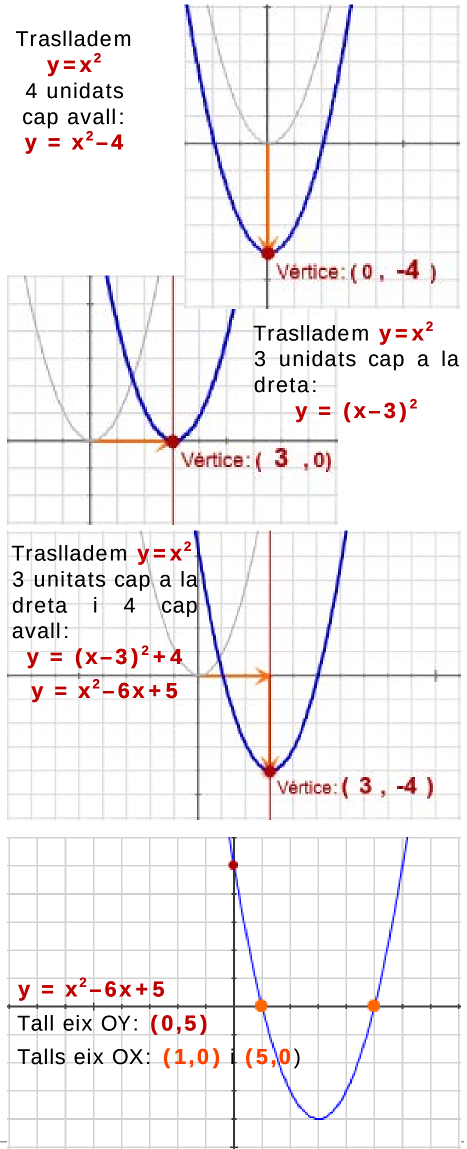
Les **funcions quadràtiques** són les que tenen per expressió algebraica un polinomi de segon grau. Comencem per la més senzilla, $\mathbf{f(x)=ax^2}$ o $\mathbf{y=ax^2}$. Observa en la figura com es construeix la gràfica i com canvia segons els valors i el signe de **a**.



- ✓ La gràfica de $\mathbf{y=ax^2}$ és una corba anomenada **paràbola**.
- ✓ El **vèrtex** és l'origen de coordenades i és **simètrica** respecte de l'eix OY.
- ✓ Si a>0 la corba s'obre cap amunt i si a<0 cap avall. La corba és tant més tancada com més s'allunya de 0 el valor de a.

Trasllacions d'una paràbola

Com pots veure a la dreta si es trasllada el vèrtex de la paràbola $\mathbf{y = ax^2}$ de (0,0) a un altre punt del pla, s'obté la gràfica d'una funció quadràtica qualsevol $\mathbf{y = ax^2+bx+c}$.



- Si es trasllada el vèrtex de la paràbola verticalment, c unitats (c>0 cap amunt, c<0 cap avall) obtenim la paràbola d'expressió: $\mathbf{y = ax^2 + c}$
- Si es trasllada el vèrtex de la paràbola horitzontalment k unitats (k>0 cap a la dreta, k<0 cap a l'esquerra) obtenim la paràbola d'expressió: $\mathbf{y = a(x - k)^2}$

Combinant els dos moviments, en traslladar el vèrtex de (0, 0) al punt (x_v,y_v) obtenim:

$\mathbf{y = a(x - x_v)^2 + y_v}$ i operant $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$

> La gràfica de $\mathbf{y=ax^2+bx+c}$ és una **paràbola** de la mateixa forma que la $y=ax^2$, eix vertical i **vèrtex (-b/2a, f(-b/2a))**.

Igual que en altres representacions gràfiques és interesant calcular els punts de tall amb els eixos de coordenades,

> - El punt de tall amb l'eix **OY** es **c**
> - Els talls amb l'eix **OX** són les solucions (si n'hi ha) de l'equació $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$

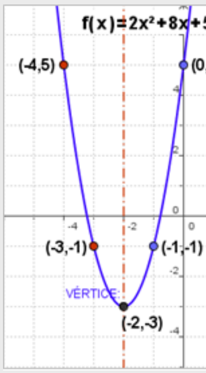
EXERCICIS resolts

22. Representa la funció: $\mathbf{y = 2x^2+8x+5}$

Comencem per col·locar el seu vèrtex:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -2, \qquad y_v = f(-2) = -3$$

Es dibuixa l'eix de simetria i tot seguit fem una taula de valors augmentant en una unitat el valor de x cada vegada. Quan tenim alguns punts dibuixem els simè



x	f(x)
-2	-3
-1	-1
0	5
-4	5
-3	-1

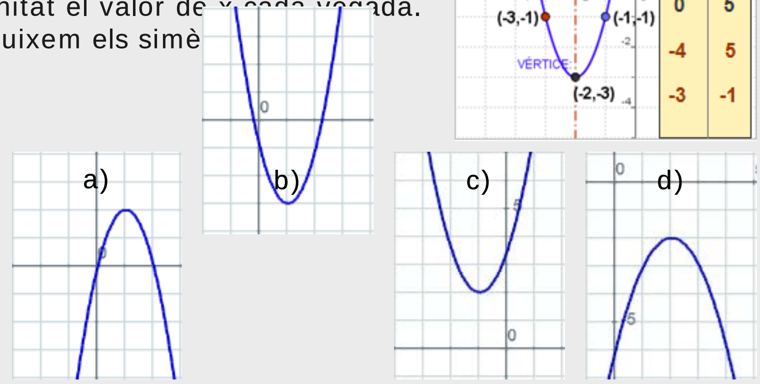
23. Representa les funcions:

a) $\mathbf{y = -2x^2+4x}$

b) $\mathbf{y = 2x^2-4x-1}$

c) $\mathbf{y = 1,5x^2+3x+3,5}$

d) $\mathbf{y = 2x^2-4x-1}$



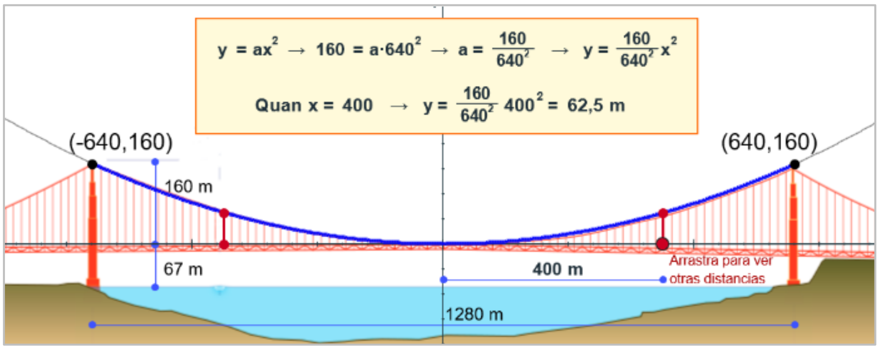
Aplicacions

Aquestes funcions tenen mo ltes aplicacions en el món real. Vegem algunes:

1) Pont penjant

El Golden Gate, el famós pont penjant de Sant Francesc, està suspès de dues enormes cables que adopten forma de paràbola i toquen la calçada al centre del pont. Les seves mesures s'indiquen a la figura.

Quina és l'altura dels cables a 400 m del centre del pont?



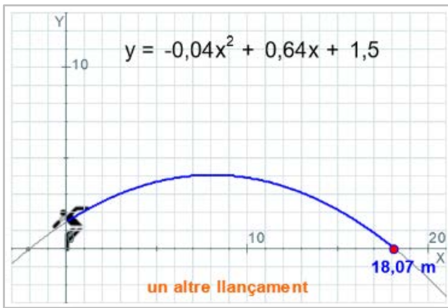
2) Tir parabòlic

Un llançador de pes llença la bola seguint una trajectòria d'equació

$y = -0,04x^2+0,64x+15$

on x és la distància recorreguda per la bola en metres, i y l'alçada que assoleix també en m.

Quina distància aconsegueix la bola?



Quan la bola arriba a terra y = 0, o sigui hem de calcular els punts de tall amb l'eix OX:

$$-0,04x^2 + 0,64x + 1,5 = 0$$

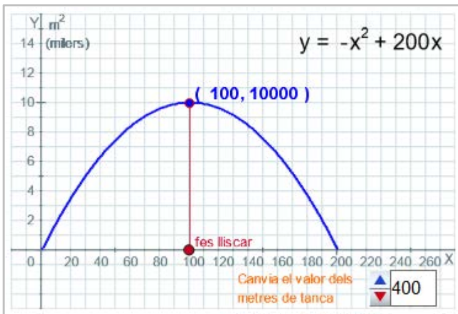
$$x = \frac{-0,64 \mp \sqrt{0,64^2 - 4\cdot(-0,04)\cdot 1,5}}{2\cdot(-0,04)} = \begin{cases} -2,07 \\ 18,07 \end{cases}$$

De les dues solucions la que busques és la positiva, la distància no pot ser negativa, per tant mesura **18,07 m**.

3) Àrea màxima

Un granger té un camp molt gran en el qual vol tancar una zona de forma rectangular.

Si disposa de 400 m de prop, ¿quines són les dimensions del rectangle de major àrea que pot tancar?, quin és aquest àrea?



Si anomenem x a la longitud respectiva de dos costats paral·lels, la longitud de cada un dels altres serà 200-x, i l'àrea $\mathbf{y = x\cdot(200-x)}$

L'àrea màxima s'aconsegueix en el vèrtex de la paràbola:

Abscissa: **x = 100 m**

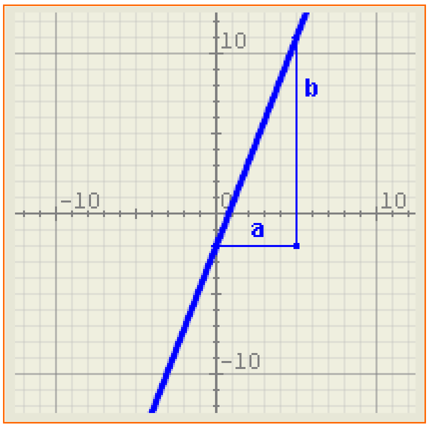
Ordenada: $\mathbf{y = 10000\ m^2}$

Per tant es tracta d'un quadrat de costat 100 m i àrea 10000 m^2.

Per practicar

1. Representa gràficament les rectes que tenen equacions **y=2x/5** i **5x+y+5**=0.

2. Troba l'equació de la recta de la imatge:



3. Calcula la forma general de l'equació de la recta que passa pel punt P(3,-2) i que té pendent m=-2.

4. Calcula la forma general de l'equació de la recta que passa pels punts P(3,-2) i Q(-2,-1).

5. Determina el pendent i l'ordenada en l'origen de la recta d'equació **3x+2y-2=0**.

6. Determina la posició relativa de les rectes **y=3x-2** i **y=-2x-2**. Si es tallen troba també les coordenades del punt de tall.

7. Esbrina si els punts A(-2,-4), B(0,-2) i C(3,1) estan alineats.

8. Troba l'equació de la recta paral·lela a y=3x-4 que passa pel punt (-3,-10).

9. Dos agricultors de zones diferents conreen blat amb els rendiments i costos que s'indiquen a sota. Esbrina quantes hectàrees ha de tenir cada un per obtenir beneficis i qui té més beneficis en funció del nombre d'hectàrees cultivades.

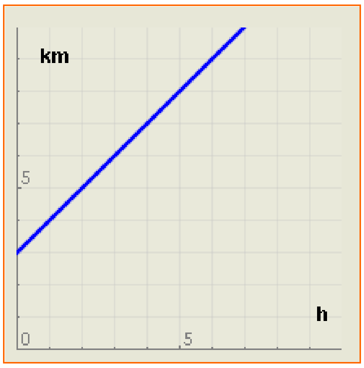
Agricultor 1:	
Rendiment:	6,99 Tm/ha.
Costos per reg, adob, etc:	210 €/ha.
Costos fixos (assegurança, impostos, etc):	6370 €
Agricultor 2:	
Rendiment:	4,2 Tm/ha.
Costos per reg, adob, etc:	52 €/ha.
Costos fixos (assegurança, impostos, etc):	302 €
Preu del blat:	221 €/Tm

10. La sorra continguda en un rellotge de sorra ocupa un volum de 563 cm^3 i el fabricant indica que la velocitat de caiguda de la sorra és de 7 cm^3/s. Quin temps ha de passar perquè hi hagi la mateixa quantitat de sorra a les dues parts?

11. Troba l'equació de la funció que descriu la següent frase: "Un mòbil està a 3 km de mi i s'apropa a 2 km/h".

12. Troba l'equació de la funció que descriu la següent frase: "Un mòbil està al meu costat durant 1 hora i després s'allunya a 2 km/h".

13. La gràfica següent representa la distància a la qual es troba una persona respecte a mi en relació amb el temps transcorregut. Expressa amb una frase el seu significat.



14. Calcula el valor de b perquè la gràfica de la funció y = 2x^2 + bx + 4 passi pel punt (3, 31)

15. Escriu l'equació de la paràbola que té coeficient a = -1, talla l'eix d'ordenades en (0,-5) i el seu vèrtex és el punt (4,11).

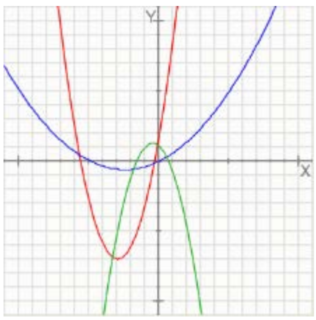
16. Calcula el vèrtex i els punts de tall amb els eixos de la paràbola y = -2x^2–2x+4. A partir d'aquestes dades fes un esbós de la gràfica.

17. Associa cada paràbola amb la seva corresponent expressió algebraica:

a) y = x^2 + 6x + 2

b) y =0,1x^2 – 0,5x

c) y = -x^2 – x + 1



Per saber-ne més

Relacions no lineals

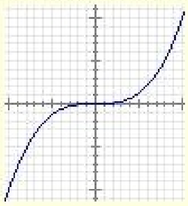
Recorda el problema que se't plantejava al principi: Si una síndria pesa el doble que una altra, el seu preu en serà el doble. Però, si el radi d'una síndria és el doble del de l'altra, el seu preu també serà el doble?


Suposem que 1 kg val 0'75€.

El preu d'una síndria de x kg és y = 0'75x. És una funció lineal. El preu és directament proporcional al pes.

Per altra banda, el pes és directament proporcional al volum i el volum d'una esfera és $4/3 \cdot \pi \cdot r^3$. Llavors si el radi de la primera és r i el de la segona és 2r, el volum de la primera és proporcional a r^3 i el de la segona a $(2r)^3 = 8r^3$. Per tant, el volum, el pes i, en definitiva, el preu de la segona síndria és 8 vegades més gran que el de la primera.

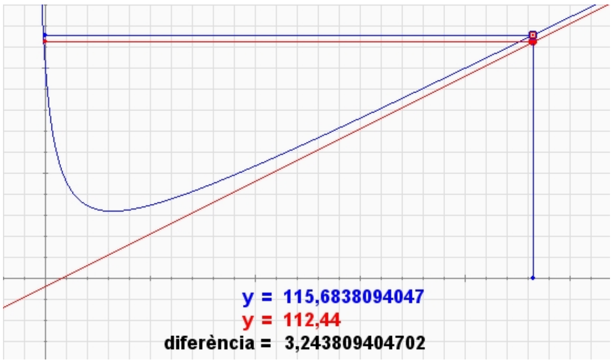
La relació entre pes (o preu) i longitud no és, per tant, lineal. Donat que el pes és proporcional, no a la longitud, sinó al cub de la longitud, direm que la relació entre aquestes dues magnituds és cúbica.
La seva gràfica té aquesta forma:



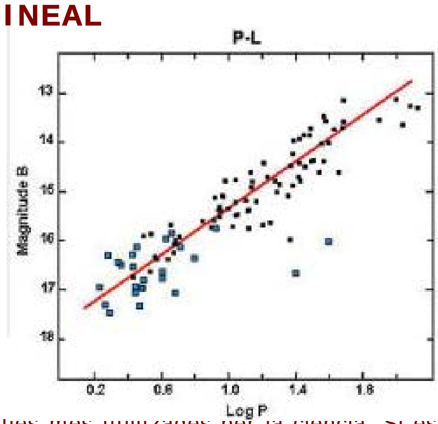
$y = x^3$

Comportament asimptòtic

Algunes funcions no lineals tenen la propietat què com més gran és el valor de x, més s'assemblen a una funció lineal o afí (és a dir, una línia recta). Això facilita l'estudi de la seva tendència a llarg termini. Aquesta recta rep el nom de **asímptota** i es diu que la funció té un comportament **asimptòtic.**

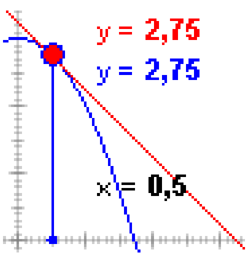


REGRESSIÓ LINEAL



És una de les tècniques més utilitzades per la ciència. Si es vol estudiar la relació que existeix entre dues magnituds es fan moltes observacions assignant una parella de valors a cada una. S'obté així un núvol de punts que pot o no mostrar una tendència.

En el exemple sembla existir un cert comportament lineal.



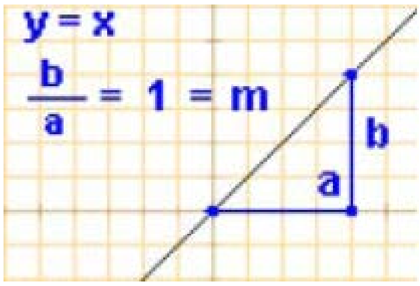
Derivades:
Comportament lineal d'una funció no lineal. La funció blava de la imatge no és lineal. La vermella és una funció afí tangent en un punt de la primera. A prop del punt x = 0,5 els valors d'ambdues funcions són molt semblants. Lluny del punt són molt diferents. Quan hem d'estudiar una funció prop d'un punt és més fàcil fer els càlculs amb una funció lineal o afí que s'aproximi a ella. La recta tangent a una funció en un punt rep el nom de **funció derivada** en el punt i aprendràs a calcular-la en els propers cursos.

Recorda el més important

Funcions lineals

Són les funcions que relacionen magnituds directament proporcionals i la seva equació és de la forma **y = mx**

La seva representació gràfica és sempre una línia recta que passa per l'origen. El pendent, m, és la constant de proporcionalitat.

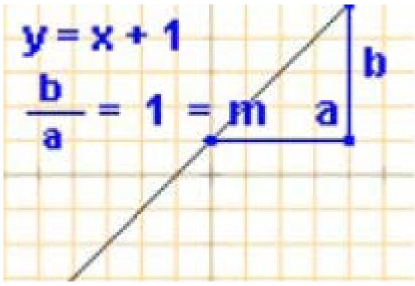


Funcions afins

Relacionen magnituds directament proporcionals sotmeses a alguna condició inicial. Tenen la forma

y = mx+n

La seva gràfica és una recta de pendent m que passa pel punt (0,n) (n és l'**ordenada en l'origen**).



Equació de la recta

- Forma explícita: **y = mx + n**
- Forma punt-pendent: si es coneix el pendent, m, i les coordenades d'un punt (x_o,y_o), l'equació és:

  $$y - y_o = m\cdot(x - x_o)$$

- Recta per dos punts: si es coneixen les coordenades de dos punts $P(x_o,y_o)$, $Q(x_1,y_1)$ l'equació és:

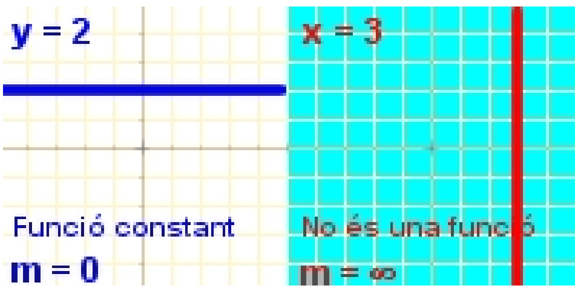
  $$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

- Forma general: Simplificant qualsevol de les equacions anteriors s'obté:

  Ax + By + C = 0

  el pendent és m=-A/B si B≠0

Casos particulars



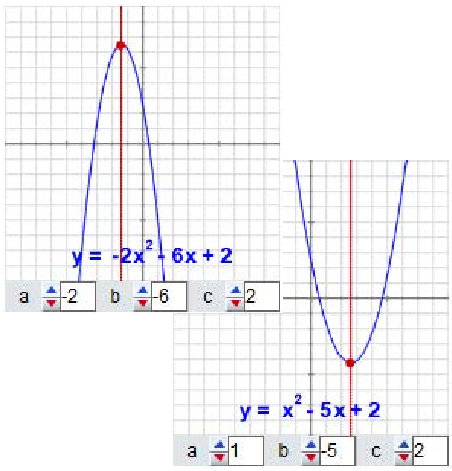
Funcions quadràtiques

y = ax²+bx+c amb **a≠0**

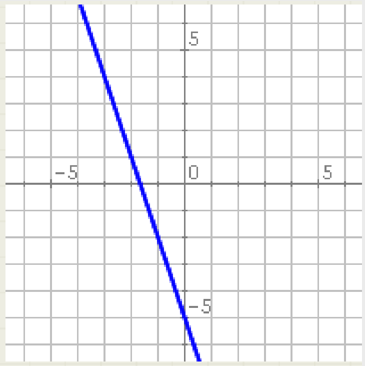
La seva gràfica és una **paràbola** amb eix de simetria vertical i **vèrtex**: **(-b/2a, f(-b/2a))**

• El valor de a indica cap a on s'obre la corba i si és més oberta o tancada.

• El valor de c indica el punt de tall amb l'eix OY.



Autoavaluació



1. Escriu el pendent i l'ordenada en l'origen de la recta de la imatge.

2. Calcula l'ordenada en l'origen de la recta que passa pel punt (-4,-1) i té pendent –3.

3. Calcula l'ordenada en l'origen de la recta l'equació general de la qual és $-3x - 3y + 2 = 0$.

4. Calcula el pendent de la recta que passa pels punts P(-5,-4) i Q(-4,-2).

5. Calcula el vèrtex de la paràbola $y = -2x^2 + 20x - 42$

6. Calcula els punts en què la paràbola $y = 2x^2 - 20x + 48$ talla l'eix d'abscisses.

7. Determina la posició relativa de les rectes d'equacions $4x - 3y + 5 = 0$ i $-8x + 6y + 1 = 0$.

8. Troba les coordenades del punt de tall de les rectes d'equacions $y = -x + 5$ i $y = 2x - 7$.

9. Esbrina si els punts A(-3,-1), B(0,-1) i C(6,-4) estan alineats.

10. Troba l'equació de la recta paral·lela a $y = -x + 5$ que passa pel punt (4,-2).

Solucions dels exercicis per practicar

1. 40,2 segons.

2. y=2x+3

3. $y = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 1 \\ 2x - 2 & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$

4. Està a 3 km de mi i s'allunya a 1 km/h.

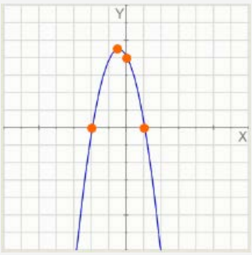
5. b = 3

6. y = -x^2 + 8x – 5

7. Eix OY: (0, 4)

Eix OX: (-2, 0) (1, 0)

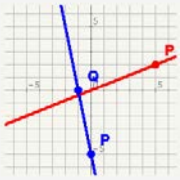
Vèrtex (-0,5 , 4,5)



8. a) y = x^2 + 6x + 2

b) y =0,1x^2 – 0,5x

c) y = -x^2 – x + 1

9. 

10. $y = \frac{13}{5}x - 2$

11. 2x+y-4=0

12. x+5y+7=0

13. m=-3/2, n=1

14. Són secants i es tallen en el punt (0,-2)

15. Sí, estan alineats. (Troba l'equació de la recta que passa per A i per B i comprova que també passa per C).

16. y=3x-1

17. El primer obté beneficis a partir de 4,77 ha. El segon a partir de 0,34 ha. El primer guanya més que el segon a partir de 13,2 ha.

Solucions AUTOEVALUACIÓN

1. m=-3, n=-5

2. n=-13

3. n=2/3≈0,66

4. m=2

5. V(5, 8)

6. (4, 0) y (6, 0)

7. Són paral·leles perquè A1·B2 = A2·B1

8. x=4, y=1

9. No estan alineats.

10. y = -x + 2