

## Objectius

En aquesta quinzena aprendràs a:

- Identificar les solucions d'una equació.
- Reconèixer i obtenir equacions equivalents.
- Resoldre equacions de primer grau.
- Resoldre equacions de segon grau completes i incompletes.
- Resoldre algunes equacions senzilles de grau superior a dos.
- Utilitzar el llenguatge algebraic i les equacions per resoldre problemes.

Abans de començar.

1. Expressions algebraiques ..... pàg. 4  
Identitat i equació  
Solució d'una equació
2. Equacions de primer grau..... pàg. 6  
Definició  
Mètode de resolució  
Resolució de problemes
3. Equacions de segon grau ..... pàg. 8  
Definició. Tipus  
Resolució de  $ax^2+bx=0$   
Resolució de  $ax^2+c=0$   
Resolució de  $ax^2+bx+c=0$   
Suma i producte de les arrels  
Discriminant d'una equació  
Equació  $(x-a)\cdot(x-b)=0$   
Resolució de problemes
4. Equacions de grau superior a dos ... pàg. 11  
Equacions factoritzades  
Equacions biquadrades

Exercicis per practicar

Per saber-ne més

Resum

Autoavaluació

Activitats per enviar al tutor



## Abans de començar

Quant et va costar aquesta ràdio?

Un quart, més un cinquè,  
més un sisè, menys  
21 euros va ser la meitat



Anomenem  $x$  a la quantitat buscada:

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} - 21 &= \frac{x}{2} \\ \frac{15x}{60} + \frac{12x}{60} + \frac{10x}{60} - \frac{1260}{60} &= \frac{30x}{60} \\ 7x - 1260 &= 30x \\ 7x &= 1260 \rightarrow x = 180\end{aligned}$$

# Equacions de segon grau

## 1. Igualtats algebraiques

### Identitat i Equació

Una **igualtat algebraica** està formada per dues expressions algebraiques separades per el signe igual (=).

- Quan la igualtat és certa per a algun valor de les lletres s'anomena **equació**.
- Si la igualtat és certa per a qualsevol valor de les lletres s'anomena **identitat**.

### Solució d'una equació

El valor de la lletra que fa que la igualtat es verifiqui s'anomena **solució** de l'equació.

**Resoldre** una equació és trobar la solució o solucions.

Dues o més equacions que tenen les mateixes solucions s'anomenen **equivalents**.

Una equació diem que és **compatible** si té solució. Si no té solució, diem que és **incompatible**.

Per obtenir una **equació equivalent** a una dada s'utilitzen les regles següents.

- Si **sumem o restem** als dos membres d'una equació la mateixa expressió algebraica, s'obté una equació equivalent a la donada.
- Si **multipliquem o dividim** els dos membres d'una equació la mateixa expressió algebraica, s'obté una equació equivalent a la donada.

**Identitat:**  $2(x + 1) = 2x + 2$

Observa que es verifica per a qualsevol valor de x:

$$x = 0; 2(0 + 1) = 2 = 2(0) + 2$$

$$x = 1; 2(1 + 1) = 4 = 2(1) + 2$$

$$x = 2; 2(2 + 1) = 6 = 2(2) + 2$$

**Equació:**  $x + 1 = 2$

Observa que es verifica només per a  $x=1$

$$x = 1; 1 + 1 = 2$$

$$x = 2; 2 + 1 = 3 \neq 2$$

$x + 5 = 8$  és una **equació compatible**, té com única solució  $x=3$

$x + 1 = 4$  és una **equació compatible**, té com única solució  $x=3$

Les dues **equacions** són **equivalents**.

$x^2 = -1$  és una **equació incompatible**, no té solució, cap nombre elevat al quadrat pot ser negatiu.

Equacions equivalents a  $x + 5 = 8$

$$x + 7 = 10 \text{ s'obté sumant } 2$$

$$x + 5 + 2 = 8 + 2 \rightarrow x + 7 = 10$$

$2x + 10 = 16$  s'obté multiplicant per 2

$$2(x + 5) = 2 \cdot 8 \rightarrow 2x + 10 = 16$$

## EXERCICIS resoltos

1. Classifica la següent expressió algebraica:  $6(7x - 1) + 3x = 4x + 76$ , en identitat o equació.

Sol: És una equació,  $6(7x - 1) + 3x = 42x - 6 + 3x = 45x - 6 \neq 4x + 76$

2. Classifica la següents expressió algebraica:  $7(5x - 1) + 5x = 40x - 7$ , en identitat o equació.

Sol: És una identitat,  $7(5x - 1) + 5x = 35x - 7 + 5x = 40x - 7$

3. Escriu una equació de la forma  $ax+b=c$ , una solució de la qual sigui  $x=4$

Sol:  $3x - 5 = 7$

4. Escriu una equació de la forma  $ax = b$  que sigui equivalent a  $5x + 4 = -16$

Sol: Restant 4 als dos membres de l'equació s'obté  $5x = -20$

5. Escriu una equació de la forma  $x + b = c$  que sigui equivalent a  $5x + 20 = 15$

Sol: Dividint per 5 als dos membres de l'equació s'obté  $5x + 4 = 3$

6. Raona si  $x=2$  és solució de l'equació:  $5x + 3(x - 1) = 13$

Sol: Sí, és solució:  $5(2) + 3(2 - 1) = 10 + 3 \cdot 1 = 10 + 3 = 13$

7. Raona si  $x=3$  és solució de l'equació:  $7x + 3(x - 2) = 16$

Sol: No és solució  $7(3) + 3(3 - 2) = 21 + 3 \cdot 1 = 24 \neq 16$

8. Comprova que  $x=-1$ , és solució de l'equació  $5x + x^2 = -4$

Sol: Sí, és solució  $5(-1) + (-1)^2 = -5 + 1 = -4$

9. Escriu una equació que sigui incompatible

Sol:  $(x - 1)^2 = -4$ , cap nombre elevat al quadrat és negatiu

# Equacions de segon grau

## 2. Equacions de primer grau

### Definició

Una **equació de primer grau amb una incògnita** és una igualtat algebraica que es pot expressar en la forma  **$ax=b$** , essent **a** i **b** nombres reals, amb  **$a \neq 0$** . El major exponent de les **x** ha de ser **1**.

Si  $a \neq 0$  sempre té solució, i a més és única, la solució és:  **$x=b/a$**

### Mètode de resolució

Per resoldre una equació de primer grau se segueixen aquests passos.

- S'eliminen els denominadors. Per fer-ho, es calcula el mcm dels denominadors i es multipliquen els dos membres de l'equació per aquest nombre.
- Es treuen els parèntesis.
- S'agrupen els termes en x a un costat del símbol "igual" i els nombres a l'altre.
- Es redueixen els termes semblants.

### Resolució de problemes

Per resoldre un problema mitjançant una equació, s'han de traduir al llenguatge algèbric les condicions de l'enunciat, i després resoldre l'equació plantejada.

Comença per llegir atentament l'enunciat, fins que estiguis segur de que comprens bé el que s'ha de calcular i les dades que et proporcionen.

Un cop l'equació està resolta, s'obté la solució del problema.

*EXEMPLE 1) L'edat d'un pare és triple de la del seu fill. Si entre els dos sumen 72 anys, quina és l'edat de cadascun d'ells?*

- ✓ Edat del fill:  $x$  anys      Edat del pare:  $3x$  anys  
Entre els dos 72 anys  $\rightarrow 3x+x=72$

*EXEMPLE 2) Quants litres de vi de 4€ el litre han de barrejar-se amb vi de 2 € el litre, per obtenir 40 litres de vi amb un preu de 3 € el litre.*

- ✓ Vi de 4€/l:  $x$  litres      Preu:  $4x$   
Vi de 2€/l:  $40-x$  litres      Preu:  $2(40-x)$   
Preu de la mescla  $40 \cdot 3 \rightarrow 4x+2(40-x)=3 \cdot 40$

$2x + 9 = 15$  Equació de grau 1, es pot escriure com  $2x = 6$

La solució és:  $x = \frac{6}{2} = 3$

$$\frac{3x}{2} + 2(x - 1) = 5$$

Treure denominadors:

$$2\left(\frac{3x}{2} + 2(x - 1)\right) = 2 \cdot 5$$

$$3x + 4(x - 1) = 10$$

Treure parèntesis:

$$3x + 4x - 4 = 10$$

Agrupar:  $3x + 4x = 10 + 4$

Reduir:  $7x = 14$

Aïllar:  $x = \frac{14}{7} = 2$



Equació:  $3x+x=72$

Es resol:  $4x=72$        $x=72/4=18$

El fill té 18 i el pare 54 anys

Equació:  $4x+2(40-x)=3 \cdot 40$

Es resol:  $4x+80-2x=120$

$2x=40$        $x=40/2=20$

S'han de barrejar 20 litres de vi de cada preu.

## EXERCICIS resolts

10. Resol les equacions següents:

a)  $\frac{-7x+5}{7} + \frac{9x-7}{8} = -1$  Sol:  $56 \frac{-7x+5}{7} + 56 \frac{9x-7}{8} = 56 \cdot (-1) \rightarrow 8(-7x+5) + 7(9x-7) = -56$   
 $-56x + 40 + 63x - 49 = -56 \rightarrow 7x = -47 \rightarrow x = \frac{-47}{7}$

b)  $\frac{2x-(x+1)}{4} = \frac{5x+2}{6}$  Sol:  $12 \frac{x-1}{4} = 12 \frac{5x+2}{6} \rightarrow 3(x-1) = 2(5x+2)$   
 $3x-3 = 10x+4 \rightarrow -7x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{-7} = -1$

c)  $\frac{3x-7(x+1)}{6} = \frac{2x-1}{3} - 2$  Sol:  $6 \frac{3x-7(x+1)}{6} = 6 \frac{2x-1}{3} - 6 \cdot 2 \rightarrow 3x-7(x+1) = 2(2x-1) - 12$   
 $3x-7x-7 = 4x-2-12 \rightarrow -8x = -7 \rightarrow x = \frac{7}{8}$

d)  $\frac{2x-5}{3} - \frac{-2x+8}{7} = x$  Sol:  $21 \frac{2x-5}{3} - 21 \frac{-2x+8}{7} = 21x \rightarrow 7(2x-5) - 3(-2x+8) = 21x$   
 $14x-35+6x-24 = 21x \rightarrow -x = 59 \rightarrow x = -59$

e)  $\frac{6x-(x-8)}{6} = \frac{-2x-17}{3} + x$  Sol:  $6 \frac{6x-(x-8)}{6} = 6 \frac{-2x-17}{3} + 6x \rightarrow 6x-(x-8) = 2(-2x-17) + 6x$   
 $5x+8 = -4x-34+6x \rightarrow 3x = -42 \rightarrow x = -14$

11. L'edat d'un pare és el triple que la del seu fill. Si entre els dos sumen 56 anys, quina és l'edat de cadascun d'ells?

Sol:

**Edat del fill :x**       $x + 3x = 56 \rightarrow 4x = 56 \rightarrow x = \frac{56}{4} = 14$   
**Edat del pare :3x**  
**L'edat del fill és de 14 anys i la del pare, 42 anys.**

12. Quants litres de vi de 5€ el litre han de barrejar-se amb vi de 3€ el litre per obtenir 50 litres de vi amb un preu de 4€ el litre?

Sol:

**Litres de vi de 5€ :x**  
**litres    preu**  
**vi de 3€ el litre x    5x**  
**vi de 4€ el litre 50-x    3(50-x)**       $5x + 3(50-x) = 200 \rightarrow 2x = 50 \rightarrow x = 25$   
**vi de 6€ el litre 50    200**  
**S'han de barrejar 25 litres de 5 € amb el vi de 3 €.**

# Equacions de segon grau

## 3. Equacions de segon grau

### Definició. Tipus

Una **equació de segon grau amb una incògnita** és una igualtat algebraica que es pot expressar en la forma:  $ax^2 + bx + c = 0$ , essent **a**, **b** i **c** nombres reals, amb **a**≠0.

Si **b**≠0 i **c**≠0, diem que l'equació és **completa**. Si **b**=0 o **c**=0, l'equació és **incompleta**.

### Resolució de $ax^2+bx=0$

Per resoldre aquest tipus d'equacions incompletes, n'hi ha prou amb treure factor comú a la "x" i igualar els dos factors a zero.

L'equació de segon grau **incompleta** del tipus  $ax^2+bx=0$  té dues solucions:  $x_1=0$  i  $x_2=-b/a$

### Resolució de $ax^2+c=0$

Per resoldre aquest tipus d'equació incompleta, s'aïlla "x<sup>2</sup>" i s'extreu l'arrel quadrada.

L'equació de segon grau **incompleta** del tipus  $ax^2+c=0$ , pot no tenir solució o tenir dues solucions diferents de la forma:  $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

### Resolució de $ax^2+bx+c=0$

L'equació de segon grau **completa** és una igualtat algebraica que es pot expressar de la forma  $ax^2+bx+c=0$ , essent **a**, **b** i **c** nombres reals, amb **a**≠0

Per obtenir les solucions utilitzem la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Suma i Producte de les arrels

Si  $x_1$  i  $x_2$  són les arrels d'una equació de segon grau  $ax^2+bx+c=0$ , a compleixen les propietats següents:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} ; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Observa que l'equació de segon grau  $ax^2+bx+c=0$  es pot escriure en funció de la suma **s** i el producte **p** de les arrels:

$$x^2 - sx + p = 0$$

Equació de segon grau **completa**:  $3x^2 + 4x + 2 = 0$

a=3 ; b=4 ; c=2

Equació de segon grau **incompleta**:  $3x^2 + 2 = 0$

a=3 ; b=0 ; c=2

$$3x^2 + 9x = 0$$

$$x(3x + 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 9 = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

$$3x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Les arrels són  $x=3$  i  $x=2$

$$x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5 = \frac{-(-5)}{1}$$
$$x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 3 = 6 = \frac{6}{1}$$



# Equacions de segon grau

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0$   
Té dues arrels reals diferents.

$$3x^2 + 5x + 6 = 0$$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -37 < 0$   
No té arrels reals.

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

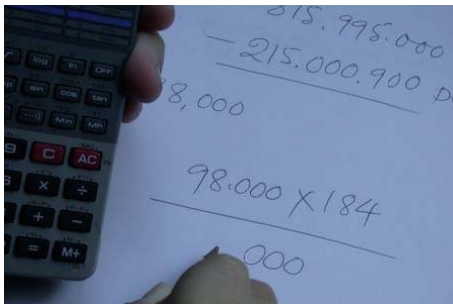
$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$   
Té dues arrels reals iguals.

$$(x + 7) \cdot (x - 9) = 0$$

Per tal que un producte sigui igual a zero, n'hi ha prou que un dels factors sigui zero.

$$x + 7 = 0 \rightarrow x = -7$$

$$x - 9 = 0 \rightarrow x = 9$$



## Recorda els passos:

- Comprendre l'enunciat
- Identificar la incògnita
- Traduir al llenguatge algebraic
- Plantejar l'equació
- Resoldre
- Comprovar les solucions

## Discriminant

S'anomena discriminant d'una equació de segon grau  $ax^2+bx+c=0$ , a l'expressió:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

El nombre de solucions de l'equació depèn del signe del discriminant:

- Si  $\Delta > 0$  hi ha dues arrels reals diferents.
- Si  $\Delta = 0$  hi ha dues arrels reals iguals.
- Si  $\Delta < 0$  no hi ha arrels reals.

## Equació $(x-a) \cdot (x-b) = 0$

Per tal que el producte de diversos factors sigui zero, almenys un dels factors ha de ser zero.

Per resoldre les equacions que estan factoritzades, com la següent:  $(x-a)(x-b)=0$ , s'igualen a zero cada un dels factors i es resolen les equacions resultants.

$$x-a = 0 \rightarrow x=a$$

$$x-b = 0 \rightarrow x=b$$

## Resolució de Problemes

Les equacions de primer i segon grau apareixen en multitud d'ocasions en la resolució de diversos problemes de la vida real

*La suma dels quadrats de dos nombres naturals és 313. Quins són els nombres?*

Anomenem  $x$  al menor dels nombres.

Anomenem  $x+1$  al consecutiu

$$\text{L'equació és: } x^2 + (x+1)^2 = 313$$

Resolem:

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 313$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 313$$

$$2x^2 + 2x - 312 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 2496}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2500}}{4} = \frac{-2 \pm 50}{4} = \begin{cases} 12 \\ -13 \end{cases}$$

La solució és el nombre 12, (-13 no val per no ser natural).

# Equacions de segon grau

## EXERCICIS resolta

13. Resol les equacions següents de segon grau incompletes:

a)  $x^2 - 6x = 0$  Sol:  $x(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 6 = 0 \rightarrow x = 6 \end{cases}$

b)  $x^2 + 27x = 0$  Sol:  $x(x + 27) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 27 = 0 \rightarrow x = -27 \end{cases}$

c)  $3x^2 + 5x = 0$  Sol:  $x(3x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{3} \end{cases}$

14. Resol les equacions següents de segon grau incompletes:

a)  $x^2 - 36 = 0$  Sol:  $x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \end{cases}$

b)  $4x^2 - 9 = 0$  Sol:  $x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

c)  $x^2 + 9 = 0$  Sol:  $x^2 = -9 \rightarrow$  No hay solució

15. Resol les equacions següents de segon grau completes:

a)  $x^2 - 7x + 10 = 0$  Sol:  $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$

b)  $3x^2 + 17x + 20 = 0$  Sol:  $x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 240}}{6} = \frac{-17 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-17 \pm 7}{6} = \begin{cases} -\frac{5}{3} \\ -4 \end{cases}$

c)  $3x^2 + 5x + 4 = 0$  Sol:  
 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 48}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{6} =$  **No té solució**

16. Escriu una equació de segon grau les arrels de la qual siguin  $x = -1$ ,  $x = 4$ :

Sol:  $\left. \begin{array}{l} S = -1 + 4 = 3 \\ P = -1 \cdot 4 = -4 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

17. Resol les equacions següents:

a)  $(x - 2)(x + 3) = 0$  Sol:  $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$  ;  $x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

b)  $(3x - 1)(x - 5) = 0$  Sol:  $3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$  ;  $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$

$$(3x+6)(7x-9)(x-12)=0$$

**Pas 1:** S'igualen a zero els factors

$$\begin{aligned} 3x+6 &= 0 \\ 7x-9 &= 0 \\ x-12 &= 0 \end{aligned}$$

**Pas 2:** Es resol cada equació

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ x &= \frac{9}{7} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$64x^4 - 36x^2 = 0$$

**Pas 1:** Traient factor comú i aplicant les identitats notables es factoritza el polinomi.

$$\begin{aligned} 4x^2(16x^2 - 9) &= 0 \\ 4x^2(4x+3)(4x-3) &= 0 \end{aligned}$$

**Pas 2:** S'igualen a zero cada factor i es resolten les equacions.

$$\begin{aligned} 4x^2 = 0 &\rightarrow x = 0 \\ 4x+3 = 0 &\rightarrow x = -\frac{3}{4} \\ 4x-3 = 0 &\rightarrow x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$2x^4 + 6x^2 - 36 = 0$$

**Pas 1:** Realitzar el canvi  $t = x^2$

$$2t^2 + 6t - 36 = 0$$

**Pas 2:** Aplicar la fórmula

$$\begin{aligned} t &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(2)(-36)}}{2 \cdot (2)} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{36+288}}{4} = \frac{-6 \pm 18}{4} = \begin{cases} 3 \\ -6 \end{cases} \end{aligned}$$

**Pas 3:** Calcular les solucions

$$\begin{aligned} x^2 = 3 &\rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ x^2 = -6 &\rightarrow \text{No hi ha solució} \end{aligned}$$

## 4. Equacions de grau superior a dos

### Equacions factoritzades

Has vist que per resoldre les equacions formades per un producte igual a zero s'igualen a zero cada un dels factors i es resolten les equacions que en resulten. Farem el mateix quan hi hagi més d'un producte:

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b)(x-c) &= 0 \\ (x-a) = 0 &\rightarrow x = a \\ (x-b) = 0 &\rightarrow x = b \\ (x-c) = 0 &\rightarrow x = c \end{aligned}$$

Factoritzar el polinomi de l'equació és un mètode útil per resoldre equacions de grau superior a dos, per fer això aquí trauràs factor comú i utilitzaràs les identitats notables. El proper curs aprendràs nous mètodes per descompondre en factors un polinomi.

### Equacions biquadrades

Una **equació biquadrada** és una igualtat algebraica que es pot expressar de la forma  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , amb a, b i c nombres reals, i  $a \neq 0$ .

Per resoldre-les es fa el canvi  $t = x^2$ .

L'equació es transforma en una de segon grau, amb incògnita  $t$ :  $at^2 + bt + c = 0$

En aplicar la fórmula de l'equació de segon grau obtenim dues solucions:  $t_1$  i  $t_2$ .

Amb la qual cosa  $x = \pm\sqrt{t_1}$  i  $x = \pm\sqrt{t_2}$

# Equacions de segon grau

## EXERCICIS resolts

18. Resol les següents equacions factoritzades:

a)  $(x + 3)(2x - 5)(3x + 1) = 0$       Sol:  $x = -3, x = \frac{5}{2}, x = -\frac{1}{3}$

b)  $(2x - 6)(3x + 7)(5x + 10) = 0$       Sol:  $x = 3, x = -\frac{7}{3}, x = -2$

c)  $(7x + 3)(4x - 6)(x - 8) = 0$       Sol:  $x = -\frac{3}{7}, x = \frac{3}{2}, x = 8$

19. Treu factor comú i aplica els identitats notables per resoldre les següents equacions:

a)  $4x^5 - 12x^4 + 9x^3 = 0$        $x^3(4x^2 - 12x + 9) = 0 \rightarrow x^3(2x - 3)^2 = 0$   
Sol:  $x = 0, x = \frac{3}{2}$

b)  $16x^3 + 40x^2 + 25x = 0$        $x(16x^2 + 40x + 25) = 0 \rightarrow x(4x + 5)^2 = 0$   
Sol:  $x = 0, x = -\frac{5}{4}$

c)  $16x^3 - 4x = 0$        $4x(4x^2 - 1) = 0 \rightarrow 4x(2x + 1)(2x - 1) = 0$   
Sol:  $x = 0, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$

20. Treu factor comú i després resol l'equació de segon grau:

a)  $x^5 - 12x^4 + 32x^3 = 0$        $x^3(x^2 - 12x + 32) = 0$   
 $x^3 = 0 \quad x^2 - 12x + 32 = 0$   
Sol:  $x = 0, x = 4, x = 8$

b)  $3x^3 + 21x^2 + 30x = 0$        $3x(x^2 + 7x + 30) = 0$   
 $3x = 0 \quad x^2 + 7x + 30 = 0$   
Sol:  $x = 0, x = -2, x = -5$

21. Resol les següents equacions biquadrades:

a)  $3x^4 - 27x^2 + 42 = 0$        $x^2 = t \rightarrow 3t^2 - 27t + 42 = 0$   
 $t = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 3 \cdot 42}}{6} = \frac{27 \pm \sqrt{225}}{6} = \frac{27 \pm 15}{6} = \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases}$   
Sol:  $x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7}$   
 $x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

a)  $x^4 - 10x^2 - 96 = 0$        $x^2 = t \rightarrow t^2 - 10t - 96 = 0$   
 $t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 96}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{484}}{2} = \frac{10 \pm 22}{2} = \begin{cases} 16 \\ -6 \end{cases}$   
Sol:  $x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$   
 $x^2 = -6$  No hay solución



## Per practicar

- Determina si les igualtats següents algebraiques són identitats o són equacions:
  - $6(x - 1) - 3x = 4x + 6$
  - $3(x - 1) - 5 = 3x - 8$
  - $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
  - $x - (2x - 5) = 3x - 8$
- Indica el grau de las equacions següents:
  - $x^2 - 1 = x + 2$
  - $x^2 - 1 = x^2 + x + 2$
  - $x^3 - 1 = x^3 + x^2 + 2$
  - $x - 1 = 3x + 2$
- Indica si  $x=4$  és solució de les equacions següents:
  - $3(x - 1) - 5 = 3x - 8$
  - $(x - 1)^2 - 5 = x$
  - $2(x + 3) - 5x = x + 2$
  - $x^3 - 60 = x$
- Escriu una equació de primer grau la solució de la qual sigui:
  - $x=2$
  - $x=3$
  - $x=1$
- Resol les equacions següents de primer grau:
  - $10 - x = 3$
  - $2x - 5 = 15$
  - $-9 + 4x = x$
  - $3x - 10 = 50 + x$
- Calcula el valor de  $x$ :
  - $3(x - 1) + 2x = x + 1$
  - $2 - 2(x - 3) = 3(x - 3) - 8$
  - $2(x + 3) + 3(x + 1) = 24$
  - $\frac{3x}{2} + 2(x - 1) = 12$
- Obté la solució de les equacions següents:
  - $\frac{x - 1}{2} - \frac{x + 3}{3} = 1$
  - $\frac{x - 3}{2} - 3(x + 2) = -20$
  - $\frac{2 - 2(x - 3)}{2} - \frac{x + 4}{4} = 3$
  - $\frac{4(x + 1)}{2} + x - \frac{x + 3}{3} = 5 + 3(x - 2)$
- Troba dos nombres consecutius que sumin 71
- Troba un nombre tal que sumat amb el seu triple sigui igual a 100
- Quina és l'edat que tinc ara si dintre de 12 anys tindrà el triple de l'edat que tenia fa 8 anys?
- En Joan té 12 anys menys que la Maria, dintre de 4 anys la Maria tindrà el triple de l'edat d'en Joan, quina és l'edat que tenen ara?
- A una festa assisteixen 43 persones. Si marxessin 3 nois, hi hauria el triple de noies que de nois. Quants nois i noies hi ha?

# Equacions de segon grau

13. Resol

- a)  $x^2 - 5x = 0$
- b)  $x^2 + 3x = 0$
- c)  $x^2 - 9 = 0$
- d)  $x^2 + 5 = 0$

14. Resol

- a)  $x^2 - 5x + 6 = 0$
- b)  $x^2 - 3x - 4 = 0$
- c)  $x^2 + 3x - 10 = 0$
- d)  $x^2 - 6x + 9 = 0$

15. Resol

- a)  $(x + 2)(x - 3) = 0$
- b)  $(3x + 1)(x + 5) = 0$
- c)  $x(x + 9) = 0$
- d)  $(2x + 8)(3x - 9) = 0$

16. Escriu una equació de segon grau les arrels de la qual siguin:

- a)  $x=3$  i  $x=-5$
- b)  $x=2$  i  $x=4$
- c)  $x=-1$  i  $x=-9$
- d)  $x=0$  i  $x=-5$

17. Resol

- a)  $(x + 2)(x - 3) = 6$
- b)  $(x + 1)(x - 5) = 16$

18. Calcula el valor de  $m$  sabent que  $x=3$  és solució de l'equació de segon grau  $x^2 - mx + 27 = 0$

19. La suma d'un nombre natural i el seu quadrat és 42. De quin nombre es tracta?

20. La diagonal d'un rectangle mesura 10 cm. Troba les seves dimensions si un costat mesura 2 cm menys que l'altre.

21. Troba dos nombres positius que es diferenciïn en 7 unitats, sabent que el seu producte és 44.

22. Troba dos nombres la suma dels quals sigui 10 i el seu producte, 24

23. Un camp de futbol mesura 30 m més de llargada que d'amplada i la seva àrea és de 7000 m<sup>2</sup>, troba les seves dimensions.

24. Tenim un filferro de 17 cm. Com l'hem de doblegar per tal que formi un angle recte, de manera que els seus extrems quedin a 13 cm?.

25. Esbrina el valor dels coeficients  $a$ ,  $b$  i  $c$  en l'equació de segon grau  $7x^2 + bx + c = 0$ , per tal que les seves solucions siguin 3 i -2

26. La diagonal d'un rectangle té 10 cm. Calcula les seves dimensions si el costat petit mesura  $\frac{3}{4}$  del costat gran.

27. Reparteix el nombre 20 en dues parts de manera que la suma dels seus quadrats sigui 202.

28. Troba dos nombres positius sabent que es diferencien en 7 unitats i el seu producte és 60.

29. Un triangle rectangle té de perímetre 24 metres, i la longitud d'un catet és igual a  $\frac{3}{4}$  de l'altre. Troba la longitud dels seus costats.

30. Troba dos nombres sabent que sumen 18 unitats i el seu producte és 77.

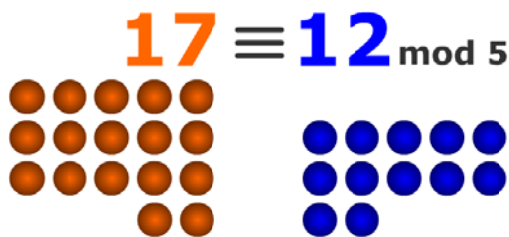
Per saber-ne més



## Congruències lineals

Diem que **a** és **congruent** amb **b** mòdul **m** si a i b donen el **mateix residu** en dividir-los per m.

S'escriu :  **$a \equiv b \pmod{m}$**



$$17 \equiv 12 \pmod{5}$$

Observa que en dividir 17 entre 5 dóna residu 2 i en dividir 12 entre 5 dóna residu 2.

$$17 \equiv 11 \pmod{2}$$

$$12 \equiv 6 \pmod{3}$$

Una equació lineal de congruències és una equació de la forma:

$$ax + b \equiv 0 \pmod{m}$$

Si **p** és una solució de l'equació també ho són **p+m**, **p+2m**, **p+3m**,...

- ✓ Si  $M = \text{mcd}(a, m) = 1$  hi ha una solució.
- ✓ Si  $M = \text{mcd}(a, m) \neq 1$  i M és divisor de b hi ha M solucions.
- ✓ Si  $M = \text{mcd}(a, m) \neq 1$  i M no és divisor de b, no hi ha solució.

**Resoldre:  $2x - 4 \equiv 0 \pmod{3}$**

$\text{mcd}(2, 3) = 1$  Hi ha una solució que és  $x = 2$ , també ho són  $2 + 3k$

**Resoldre:  $2x - 12 \equiv 0 \pmod{4}$**

$\text{mcd}(2, 4) = 2$  i 2 divisor de 4, hi ha dues solucions que són

$x = 0$ , també ho són  $0 + 4k$   
 $x = 2$ , també ho són  $2 + 4k$

**Resoldre:  $2x - 1 \equiv 0 \pmod{4}$**

$\text{mcd}(2, 4) = 2$  i 2 no és divisor de 4, no hi ha solució.

Observa que  $2x - 1$  és senar, i cap senar és múltiple de 4

# Equacions de segon grau



## Recorda el més important

### Identitat

Igualtat entre dues expressions algebraiques que es verifica per a qualsevol valor de les lletres

### Equació

Igualtat entre dues expressions algebraiques que es verifica per a algun valor de les lletres

### Equació de primer grau

Són equacions que es poden expressar en la forma  $ax=b$  amb  $a \neq 0$ . Tenen una única solució que és  $x=a/b$

### Solució d'una equació

És el valor de la incògnita que fa certa la igualtat.

### Equació Incompatible

És l'equació que no té solució.

### Equació Compatible

És l'equació que té solució.

### Equacions equivalents

Dues equacions són equivalents si tenen les mateixes solucions.

### Equació de segon grau

Completes:  $ax^2+bx+c=0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si  $b^2-4ac > 0$  té 2 solucions
- Si  $b^2-4ac = 0$  té 1 solució doble
- Si  $b^2-4ac < 0$  no té solució

Incompletes: Si  $b=0$  o  $c=0$

- $ax^2+c=0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ 
  - $-c/a > 0$ , dues solucions
  - $-c/a < 0$ , no té solució
  - $c=0$ , una solució doble,  $x=0$

- $ax^2+bx=0$   
Solucions:  $x=0$ ,  $x=-b/a$

### Propietats de les arrels de l'equació de segon grau

La **suma** de les solucions de l'equació de segon grau és

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

El **producte** de les solucions de l'equació de segon grau és

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

### Equació Canònica

Si  $S$  és la suma de les arrels i  $P$  el producte, l'equació de segon grau es pot escriure en la forma:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

### Equacions de grau superior a dos

- Factoritzades:  $(x-a)(x-b)(x-c)=0$   
 $x-a=0 \rightarrow x=a$ ;  $x-b=0 \rightarrow x=b$ ; ...
- Biquadrades:  $ax^4+bx^2+c=0$   
Es fa  $x^2=t$  i es resol l'equació de segon grau que en resulta.



## Autoavaluació



1. Escriu una equació de la forma  $ax+b=c$  que tingui per solució  $x=8$
2. Resol l'equació:  $x - \frac{x-16}{6} = 2(x+6)$
3. Troba un nombre sabent que si li sumem sis vegades el consecutiu el resultat és igual a 755
4. Resol l'equació:  $\frac{x+4}{2} + \frac{x+7}{3} = 1$
5. Resol l'equació:  $-4x^2 - 7x = 0$
6. Resol l'equació:  $-2x^2 + 8 = 0$
7. Resol l'equació:  $x^2 - 24x + 108 = 0$
8. Escriu una equació de segon grau que tingui per solucions 20 i 1
9. El quadrat d'un nombre positiu més el doble del seu oposat és 960. Quin és aquest nombre?
10. Resol sense aplicar la f:  $(x+9) \cdot (4x-8) \cdot (3x+15) = 0$

# Equacions de segon grau

## Solucions dels exercicis per practicar

1. a) equació      b) identitat  
c) identitat      d) equació
2. a) 2      b) 1      c) 2      d) 1
3. a) si      b) sí      c) no      d) sí
4. a)  $x + 3 = 5$       b)  $2x + 1 = 7$   
c)  $3x - 1 = 2$
5. a)  $x=7$       b)  $x=10$   
c)  $x=3$       d)  $x=30$
6. a)  $x=1$       b)  $x=5$   
c)  $x=3$       d)  $x=4$
7. a)  $x=15$       b)  $x=5$   
c)  $x=1$       d)  $x=6$
8. 35
9. 25
10. 18
11. En Joan 2 i la Maria 14 anys
12. 13 nois i 30 noies
13. a)  $x=0$        $x=5$       b)  $x=3$        $x=-3$   
c)  $x=0$        $x=-3$       d) No hi ha solució
14. a)  $x=2$        $x=3$       b)  $x=-1$        $x=4$   
c)  $x=2$        $x=-5$       d)  $x=3$        $x=3$
15. a)  $x=-2$        $x=3$       b)  $x=-1/3$        $x=-5$   
c)  $x=0$        $x=-9$       d)  $x=-4$        $x=3$
16. a)  $x^2 + 2x - 15 = 0$   
b)  $x^2 - 6x + 8 = 0$   
c)  $x^2 + 10x + 9 = 0$   
d)  $x^2 - 5x = 0$
17. a)  $x=4$ ,  $x=-3$       b)  $x=7$ ,  $x=-3$   
c)  $x^2 + 10x + 9 = 0$       d)  $x^2 - 5x = 0$
18. 12
19. 6
20. 8 i 6
21. 11 i 4
22. 6 i 4
23. 100 i 70
24. El punt del doblec està a 12 i 5 cm dels extrems
25.  $b=-7$        $c=-42$
26. 6 i 8
27. 11 i 9
28. 12 i 5
29. 6,8 i 10
30. 11 i 7

### Solucions AUTOAVALUACIÓ

1.  $-2x+7=-9$
2. -8
3. 107
4. -4
5. 0 i  $-7/4$
6. 2 i -2
7. 18 y 6
8.  $x^2 - 21x + 20 = 0$
9. 32
10. -9, 2 i -5