

## Objectius

En aquesta quinzena aprendràs a:

- Distingir les diferents classes de cossos geomètrics.
- Construir-los a partir del seu desenvolupament pla.
- Calcular les seves àrees i volums.
- Localitzar un punt sobre la Terra.
- Calcular l'hora en cada país.
- Conèixer com es fan els diferents tipus de mapes i els avantatges i inconvenients de cadascun.

Abans de començar

1. Poliedres regulars.....	pàg. 4
Definicions	
Desenvolupaments	
Poliedres duals	
2. Altres poliedres.....	pàg. 6
Prismes	
Piràmides	
Poliedres semiregulars	
3. Cossos de revolució .....	pàg. 12
Cilindres	
Cons	
Esferes	
4. L'esfera terrestre .....	pàg. 15
Coordenades geogràfiques	
Fusos horaris	
5. Mapes .....	pàg. 17
Projeccions	

Exercicis per a practicar

Per saber-ne més

Resum

Autoavaluació

Activitats per enviar al tutor



## Abans de començar



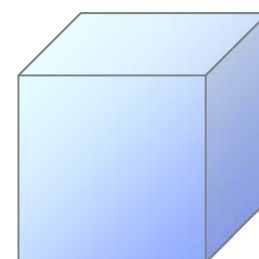
### Recorda

Un **poliedre** és un cos tancat limitat per polígons.

Cadascun d'ells rep el nom de **cara**. Els costats de les cares són les **arestes** del poliedre i els extrems de les arestes són els **vèrtexs** del poliedre.

En tot poliedre simple (sense forats) es compleix **la relació d'Euler**:

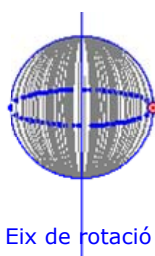
*El nombre de cares d'un poliedre (C) és igual al nombre d'arestes (A) menys el de vèrtexs (V) més 2.*



$$C=6 \quad V=8 \quad A=12$$

$$A-V+2=12-8+2=6=C$$

$$C = A - V + 2$$



Un **cos de revolució** és qualsevol figura geomètrica construïda en fer girar una figura plana al voltant d'un eix contingut en el mateix pla.

## 1. Poliedres regulars

### Definicions

Direm que un **poliedre** és **regular** quan es compleixen les següents condicions:

- Les seves cares són polígons regulars iguals.
- En cada vèrtex concorren el mateix nombre de cares.



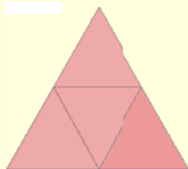

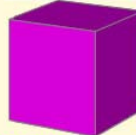
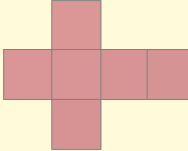


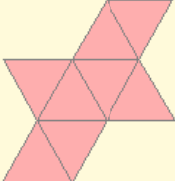



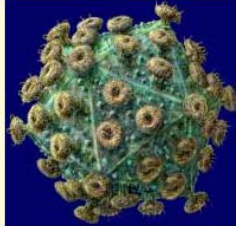

Només hi ha cinc poliedres regulars (anomenats també **Sòlids Platònics**):

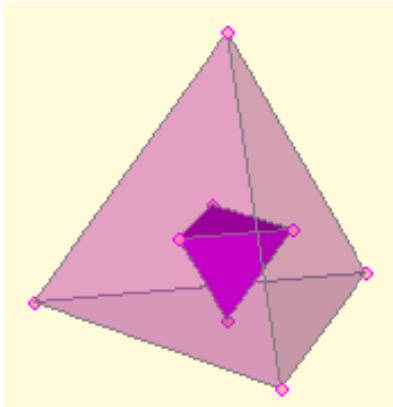
- **Tetraedre:** 4 cares (triangles equilàters)
- **Hexaedre o cub:** 6 cares (quadrats)
- **Octaedre:** 8 cares (triangles equilàters)
- **Dodecaedre:** 12 cares (pentàgons regulars)
- **Icosaedre:** 20 cares (triangles equilàters)

### Desenvolupaments

Es diu que un cos geomètric és **desenvolupable** si es pot construir a partir d'una figura plana formada per totes les seves cares.

Tots els poliedres regulars són desenvolupables i en aquest apartat et mostrarem les figures que permeten la seva construcció

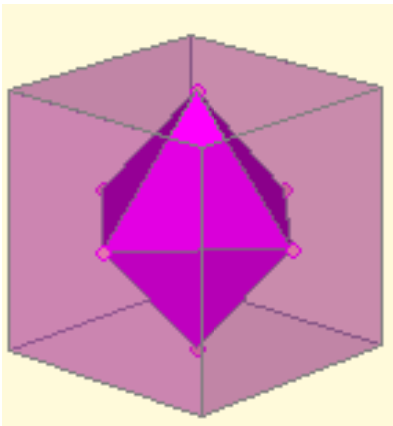
Característiques	Desenvolupament	
 <p>Empaquetament de boles en forma de tetraedre.</p>	<p>Tetraedre</p>  <p>Cares: 4 triangles equilàters Arestes: 6 Vèrtexs: 4</p>	
 <p>Cristalls cúbics de pirita (Sulfur de ferro FeS<sub>2</sub>)</p>	<p>Hexaedre o Cub</p>  <p>Cares: 6 quadrats Arestes: 12 Vèrtexs: 8</p>	
 <p>Cristalls octaèdrics de fluorita (Fluorur de Calci CaF<sub>2</sub>)</p>	<p>Octaedre</p>  <p>Cares: 8 triangles equilàters Arestes: 12 Vèrtexs: 6</p>	
 <p>Institut de la Construcció Eduardo Torroja (Madrid)</p>	<p>Dodecaedre</p>  <p>Cares: 12 pentàgons regulars Arestes: 30 Vèrtexs: 20</p>	
 <p>Estructura icosaèdrica d'un virus</p>	<p>Icosaedre</p>  <p>Cares: 20 triangles equilàters Arestes: 30 Vèrtexs: 12</p>	



## Poliedres duals

Es diu que dos poliedres són **duals** si el nombre de vèrtexs del primer coincideix amb el nombre de cares del segon i a l'inrevés. A més ambdós han de tenir el mateix nombre d'arestes.

Si dos poliedres són duals poden construir-se l'un a partir de l'altre unint amb segments els centres de cada dues cares contigües.



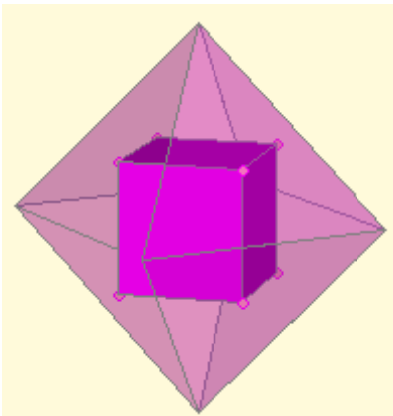
A les següents imatges es mostra que el cub i l'octaedre són duals, el dodecaedre i l'icosaedre també i que el tetraedre és dual amb ell mateix.

**Tetraedre: nre. de vèrtexs = 4 = nre. de cares.**

**Nre. de cares del cub = 6 = nre. de vèrtexs de l'octaedre**

**Nre. de cares de l'octaedre = 8 = nre. de vèrtexs del cub**

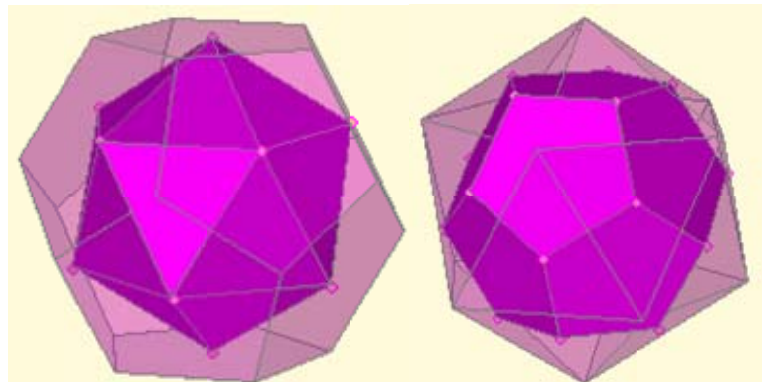
**Nre. d'arestes del cub = 12 = nre. d'arestes de l'octaedre.**



**Nre. de cares del dodecaedre=12 =nre. de vèrtexs de l'icosaedre**

**Nre. de cares de l'icosaedre =20=nre. de vèrtexs del dodecaedre**

**Nre. d'arestes del dodecaedre = 30=nre. d'arestes de l'icosaedre**



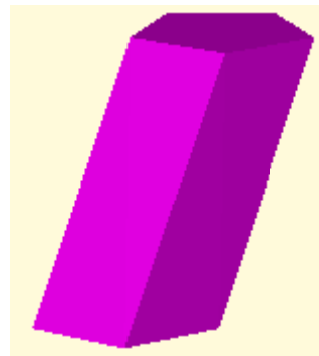
# Cossos geomètrics

## 2. Altres poliedres

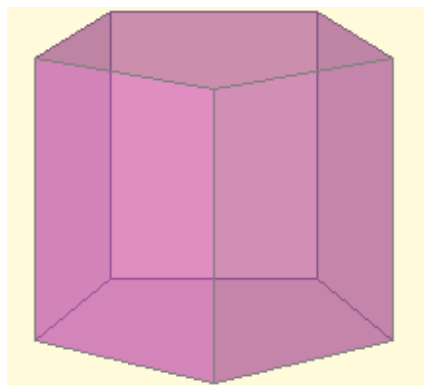
### Prismes

Un **prisma** és un poliedre amb dues cares paral·leles que són polígons iguals i els costats dels quals s'uneixen mitjançant paral·lelograms. Les cares paral·leles són les **bases** i els paral·lelograms són els **costats**.

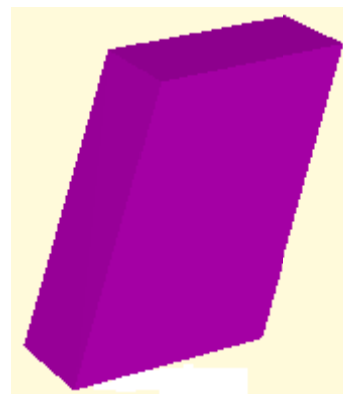
- Si els costats són rectangles és un **prisma recte**, en cas contrari és un **prisma oblic**.
- Si las bases són paral·lelograms és un **paral·lelepípede** i si las bases i els costats són rectangles és un **ortoedre**.
- Si les bases d'un prisma recte són polígons regulars diem que és un **prisma regular**.



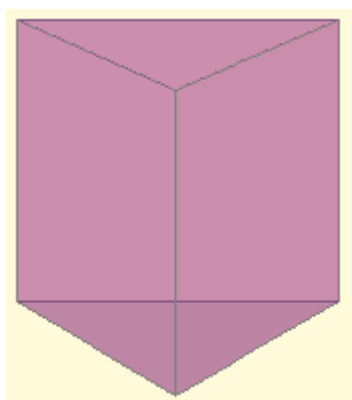
Prisma oblic



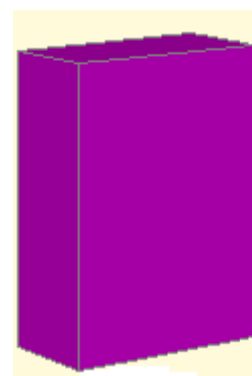
Prisma regular pentagonal



Prisma oblic  
Paral·lelepípede



Prisma regular triangular



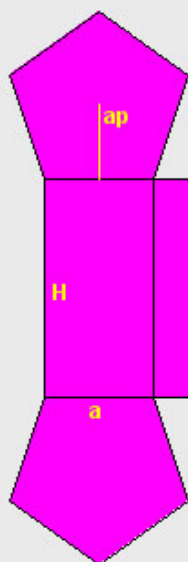
Prisma recte  
Ortoedre

## Desenvolupaments, àrees i volums de prismes regulars

Els prismes són cossos desenvolupables. En particular, els prismes regulars tenen un desenvolupament molt senzills, format per tants rectangles iguals com costats tingui i dos polígons regulars que formen las bases. Això facilita el càlcul de les seves àrees i volums.

1. Desenvolupament i àrea d'un prisma regular pentagonal:

### PRISMA PENTAGONAL



$ap$  = apotema del pentàgon       $p$  = perímetre =  $5 \cdot a$

$$\text{Àrea de la base} = AB = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$$

Àrea d'un costat =  $a \cdot H$

Àrea lateral =  $AL = 5 \cdot a \cdot H$

$$\text{Àrea total} = 2 \cdot AB + AL = 5 \cdot a \cdot ap + 5 \cdot a \cdot H = 5 \cdot a \cdot (ap + H)$$

$a$  = aresta de les bases = base dels rectangles laterals  
 $H$  = altura del prisma = altura dels rectangles laterals

2. Volum d'un prisma pentagonal regular:



Observa el prisma de l'esquerra.

Podem considerar que està format per una sèrie apilada de prismes del mateix tipus l'altura del qual és la unitat.

El volum de cadascun d'aquests petits prismes és igual a l'àrea de la base,  $A$ , després el volum del prisma gran serà:

$$V = A \cdot H$$

essent  $H$  l'altura del prisma.

### PRISMA PENTAGONAL

$$V = \frac{p \cdot ap}{2} \cdot H = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} \cdot H$$



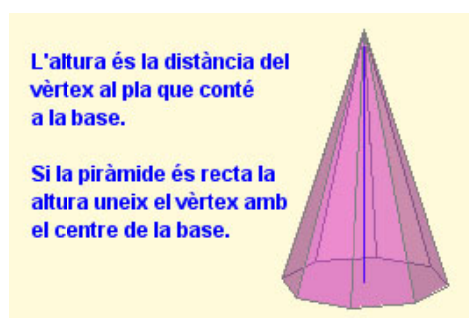
# Cossos geomètrics

## Piràmides

Una **piràmide** és un poliedre amb una cara formada per un polígon qualsevol sobre els costats del qual s'aixequen triangles que s'uneixen en un punt comú. El polígon és la **base** de la piràmide, els triangles són els **costats** i el punt comú és el **vèrtex**.

Si el vèrtex es projecta verticalment sobre el centre de la base és una **piràmide recta**, en cas contrari, és una **piràmide obliqua**.

Si la base d'una piràmide recta és un polígon regular diem que és una **piràmide regular**. En aquest cas, els costats són triangles isòsceles i tots iguals. *El tetraedre és un cas particular de piràmide.*

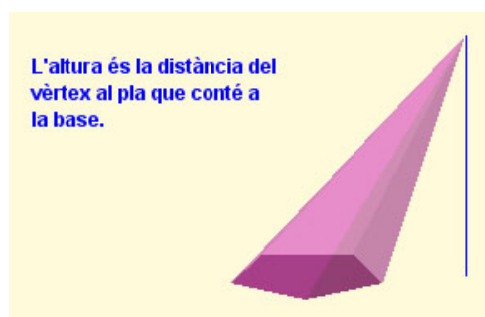
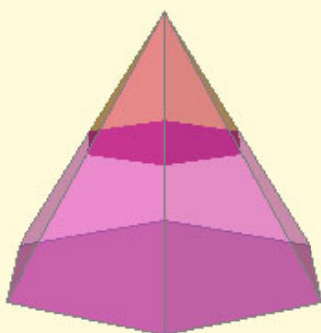


Piràmide octogonal recta

Una **piràmide truncada**, o **tronc de piràmide**, s'obté tallant el seu vèrtex amb un pla paral·lel a la base.

El poliedre resultant té dues bases semblants i paral·leles, però de diferent mida.

L'altura del tronc de piràmide és la diferència entre l'altura de la piràmide inicial i la de la piràmide que hem tret.



Piràmide pentagonal obliqua

## Desenvolupaments, àrees i volums de piràmides regulars

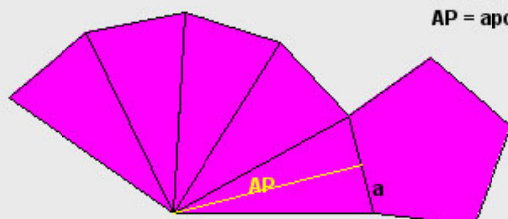
Les piràmides són cossos geomètrics desenvolupables. En particular, les piràmides regulars tenen un desenvolupament molt senzill, format per tants triangles isòsceles iguals com costats tingui i un polígon regular que forma la base. Al igual que en el cas dels prismes això facilita el càlcul de les seves àrees i volums.

- Desenvolupament d'una piràmide regular pentagonal:

### PIRÀMIDE PENTAGONAL

$a$  = aresta de la base

AP = apotema de la piràmide = altura de cada costat



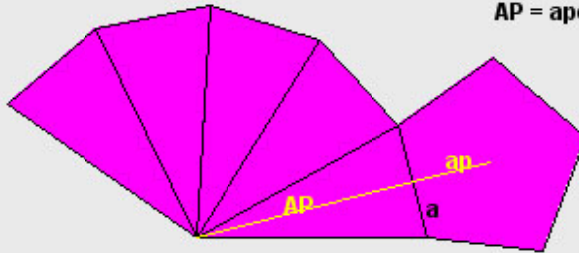


4. Àrea de una piràmide regular pentagonal:

### PIRÀMIDE PENTAGONAL

$a$  = aresta de la base

$AP$  = apotema de la piràmide = altura de cada costat



$$\text{de la base} = AB = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$$

$$\text{Àrea d'un costat} = \frac{a \cdot AP}{2} \quad \text{ÀREA TOTAL} = AB + AL = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} + 5 \cdot \frac{a \cdot AP}{2} = \frac{5 \cdot a}{2} \cdot (ap + AP)$$

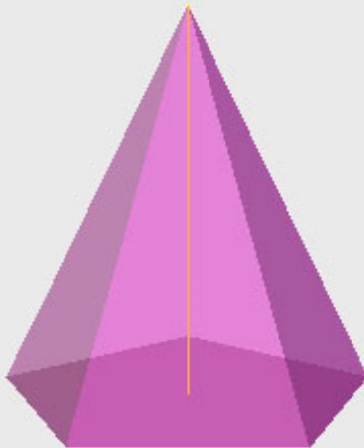
$$\text{Àrea lateral} = AL = 5 \cdot \frac{a \cdot AP}{2}$$

5. Volum d'una piràmide regular pentagonal:

El volum de qualsevol piràmide és sempre igual a la tercera part del volum d'un prisma que tingui la mateixa base i la mateixa altura, és a dir,

$$V = \frac{1}{3} AB \cdot H$$

essent,  $AB$  l'àrea de la base i  $H$  l'altura de la piràmide



### PIRÀMIDE PENTAGONAL

$$\text{Àrea de la base} = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$$

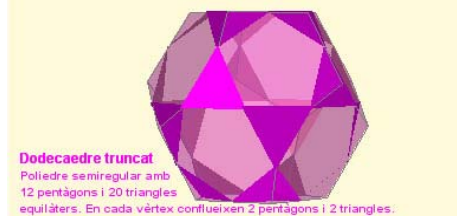
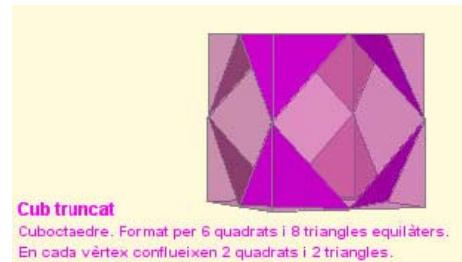
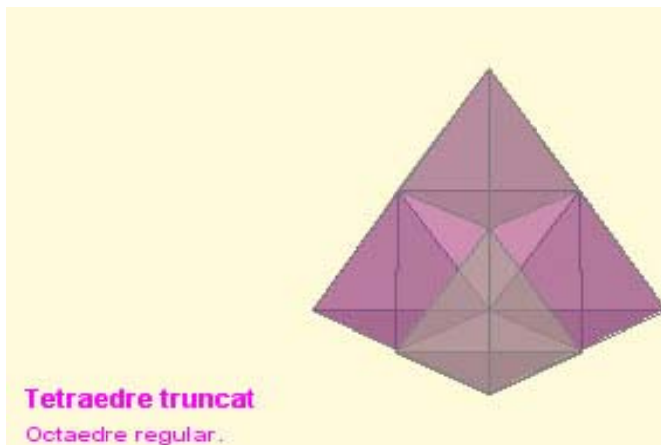
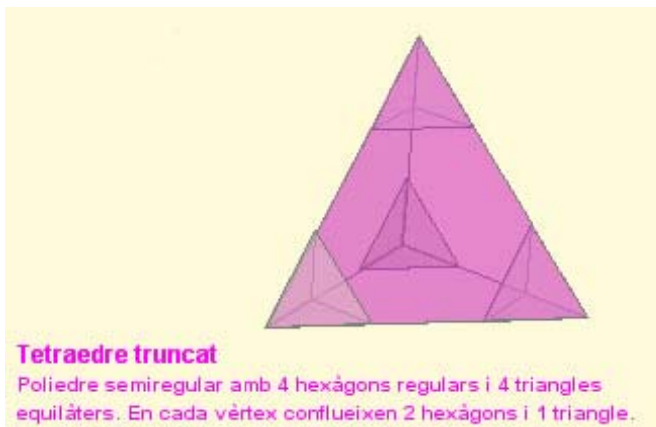
$$\text{Volum} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} \cdot H = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{6} \cdot H$$

## Poliedres semiregulars

Un **poliedre semiregular** és un poliedre les cares del qual són polígons regulars de dos o més tipus, de forma que en cada vèrtex concorren els mateixos polígons (en nombre i en tipus).

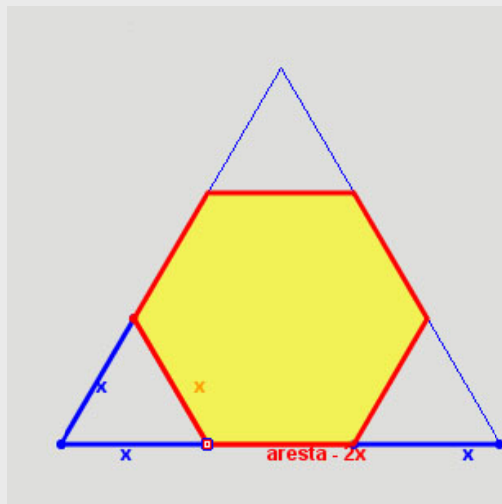
Es poden obtenir amb certa facilitat poliedres semiregulars a partir dels poliedres regulars mitjançant la tècnica del truncament.

**Truncar** un poliedre consisteix en suprimir un dels seus vèrtexs mitjançant l'aplicació d'un tall pla.



## EXERCICIS resolts

6. Determinar la longitud de l'aresta d'un tetraedre, d'un octaedre o d'un icosaèdre que s'ha de truncar a partir d'un vèrtex per obtenir un poliedre semiregular.



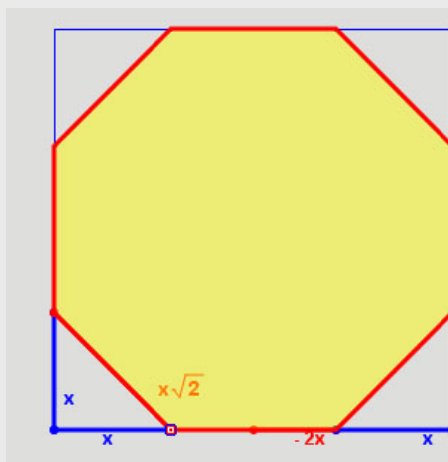
El triangle adjunt representa una cara d'un tetraedre, octaedre o icosaèdre regular. Movent el punt vermell se simula el truncament dels vèrtexs.

La figura resultant és un hexàgon, que ha de ser regular perquè el poliedre que busquem sigui semiregular.

Això s'aconsegueix quan  
 $x = \text{aresta} - 2x$   
 o sigui, quan  
 $\text{aresta} = 3x$

Per tant el tall ha de produir-se a una distància del vèrtex d'un terç del total de l'aresta.

7. Determinar la longitud de l'aresta d'un cub que s'ha de truncar a partir d'un vèrtex per obtenir un poliedre semiregular.



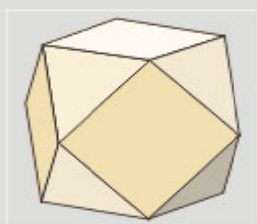
El quadrat adjunt representa una cara d'un cub. Movent el punt vermell se simula el truncament dels vèrtexs.

Al truncar observem que la figura resultant és un octògon, que ha de ser regular perquè el poliedre que busquem sigui semiregular.

Això s'aconsegueix quan  
 $x\sqrt{2} = \text{aresta} - 2x$   
 o sigui, quan  
 $x = \frac{\text{aresta}}{2 + \sqrt{2}}$

8. Analitza la dualitat de poliedres regulars quan es truncuen per la meitat de l'aresta.

**El cub i el octaedre són duals.**  
 En ambdós casos s'obté un  
**CUBOCTAEDRE**



**El dodecaedre i l'icosaèdre són duals.**  
 En ambdós casos s'obté un  
**ICOSIDODECAEDRE**



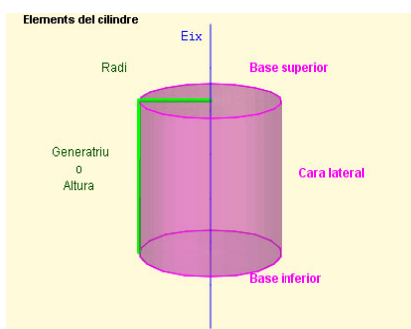
# Cossos geomètrics

## 3. Cossos de revolució

### Cilindres

Un **cilindre** és un cos generat per un segment (**generatriu**) al girar al voltant d'una recta paral·lela al segment (**eix**). El cilindre és un cos desenvolupable.

Un cilindre té 3 cares: dues d'elles són cercles paral·lels i iguals (**bases**) i l'altra és una cara corba (**cara lateral**) que desenvolupada es transforma en un rectangle.



El **radi** del cilindre és el radi de qualsevol de les seves bases i l'**altura** del cilindre és la longitud de la generatriu.

La cara lateral desenvolupada és un rectangle, la base del qual és la longitud de la circumferència que envolta la base i l'altura del qual és la generatriu.

La cara lateral desenvolupada és un rectangle, la base del qual és la longitud de la circumferència que envolta la base i l'altura del qual és la generatriu.

Àrea de la base =  $AB = \pi \cdot r^2$   
 Àrea lateral =  $AL = B \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$   
 Àrea total =  $2 \cdot AB + AL = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$h = g$   
 $B = 2 \cdot \pi \cdot r$

Igual que en el prisma, el volum d'un cilindre és igual a l'àrea de la base per l'altura:

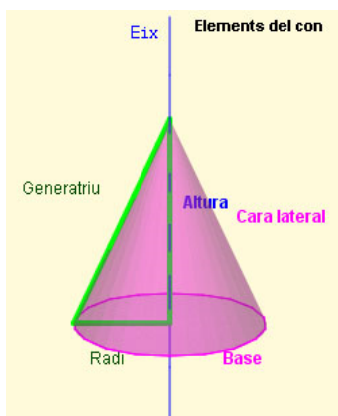
$V = AB \cdot h$

Com que la base és un cercle, tenim:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

### Cons

Un **con** és un cos generat per un segment (**generatriu**) al girar al voltant d'una recta sobre la que es recolza un dels seus extrems (**eix**). El con és un cos desenvolupable.



Un con té 2 cares: un cercle (**base**) i una cara corba (**cara lateral**) que desenvolupada es transforma en un sector circular.

El punt de recolzament de la generatriu sobre l'eix és el **vèrtex** del con. El **radi** del con és el radi de la seva base i l'**altura** del con és la distància del vèrtex al

centre de la base.

La cara lateral desenvolupada és un sector circular el radi del qual és la generatriu i l'amplitud del qual és la longitud de la circumferència de la base.

**Conos** Desarrollo del cono

$h = \sqrt{g^2 - r^2}$   
 $B = 2 \cdot \pi \cdot r$

L'àrea lateral és l'àrea d'un sector circular de radi  $g$  i amplitud  $B = 2 \cdot \pi \cdot r$ , per tant l'angle central del sector és  $\alpha = \frac{2\pi r}{g}$ , i, per tant,

$AL = \frac{1}{2} \cdot g^2 \cdot \alpha = \pi \cdot g \cdot r$

Àrea de la base =  $AB = \pi \cdot r^2$

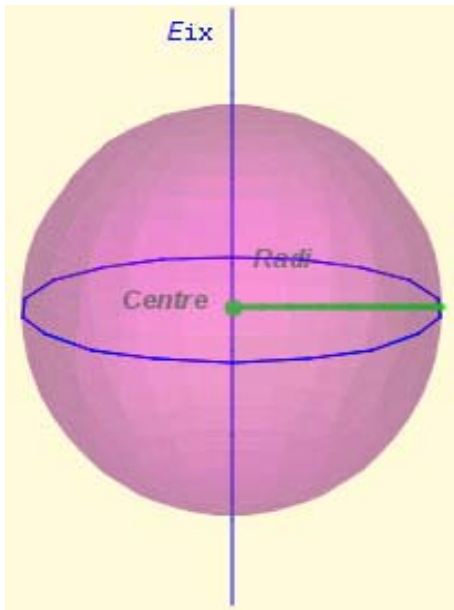
Àrea total =  $AB + AL = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot g \cdot r$

Igual que en les piràmides, el volum d'un con és la tercera part del volum del cilindre que tingui la mateixa base i la mateixa altura:

$V = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot h$

Com que la base és un cercle tenim:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

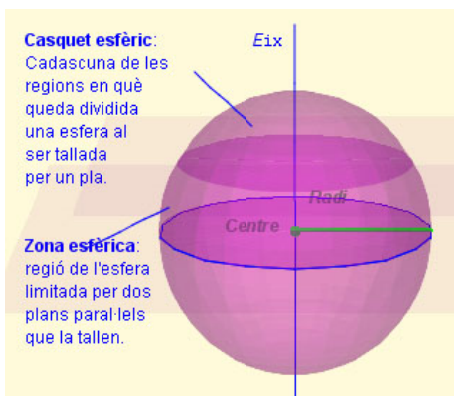


## Esferes

Una **esfera** és un cos generat per un cercle al girar al voltant de qualsevol dels seus diàmetres.

El **radi** d'una esfera és el mateix que el radi del cercle que la genera i coincideix amb la distància del centre de l'esfera a qualsevol dels punts de la seva superfície. Aquesta propietat caracteritza a l'esfera: *l'esfera és el conjunt de punts de l'espai que equidisten d'un punt fix, anomenat centre.*

**Les esferes no són desenvolupables.** Per aquest motiu l'elaboració de mapes és un problema important. Analitzarem aquest problema amb més detall en l'últim capítol.



### • Àrea de l'esfera

L'àrea d'una esfera de radi  $r$  és igual l'àrea lateral del cilindre que la circumscriu.

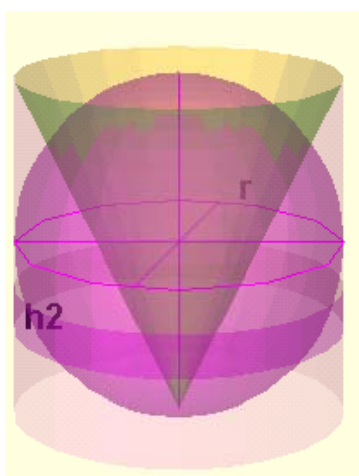
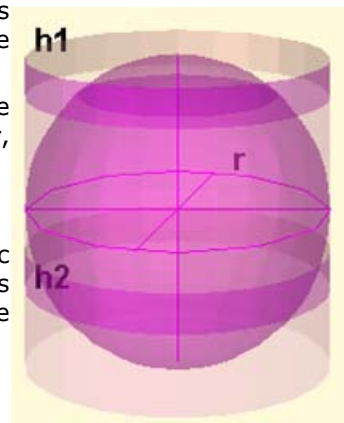
Com que el radi d'aquest cilindre també és  $r$  i la seva altura  $2r$ , l'àrea de l'esfera és:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2r = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

A més l'àrea d'un casquet esfèric o d'una zona esfèrica també és igual a l'àrea lateral del cilindre que la conté.

$$\text{Àrea del casquet} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h_1$$

$$\text{Àrea de la zona} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h_2$$



### • Volum de la esfera

$$V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

El volum del cilindre circumscriu és:

$$V_{CI} = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2 \cdot \pi \cdot r^3$$

Per tant el volum de l'esfera equival als dos terços del volum del cilindre circumscriu.

Com el volum d'un con del mateix radi i altura és la tercera part del volum del cilindre:

$$V_E + V_{CO} = V_{CI}$$

La mateixa relació val pel volum d'una zona esfèrica:

El volum d'una zona esfèrica és igual al volum del cilindre que l'envolta menys el volum del tronc de con que queda al seu interior.

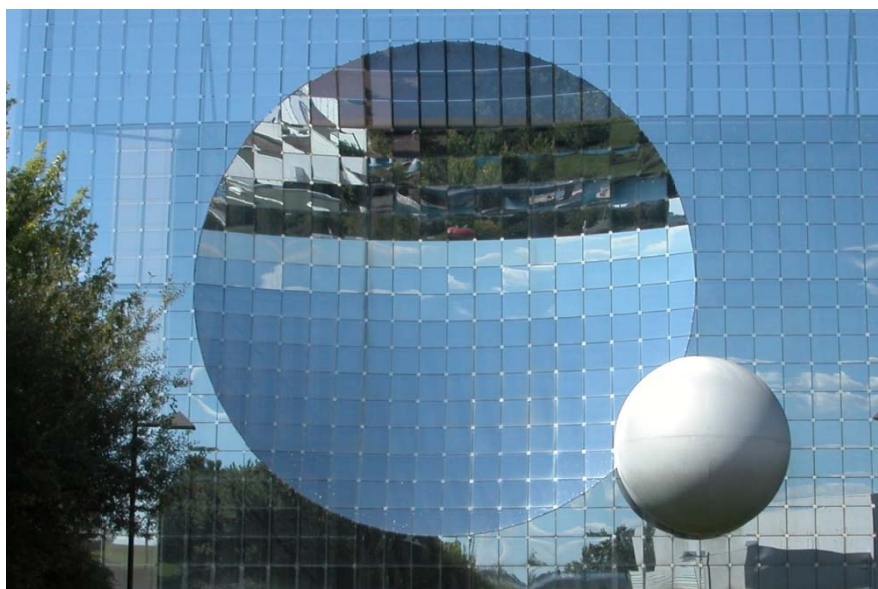
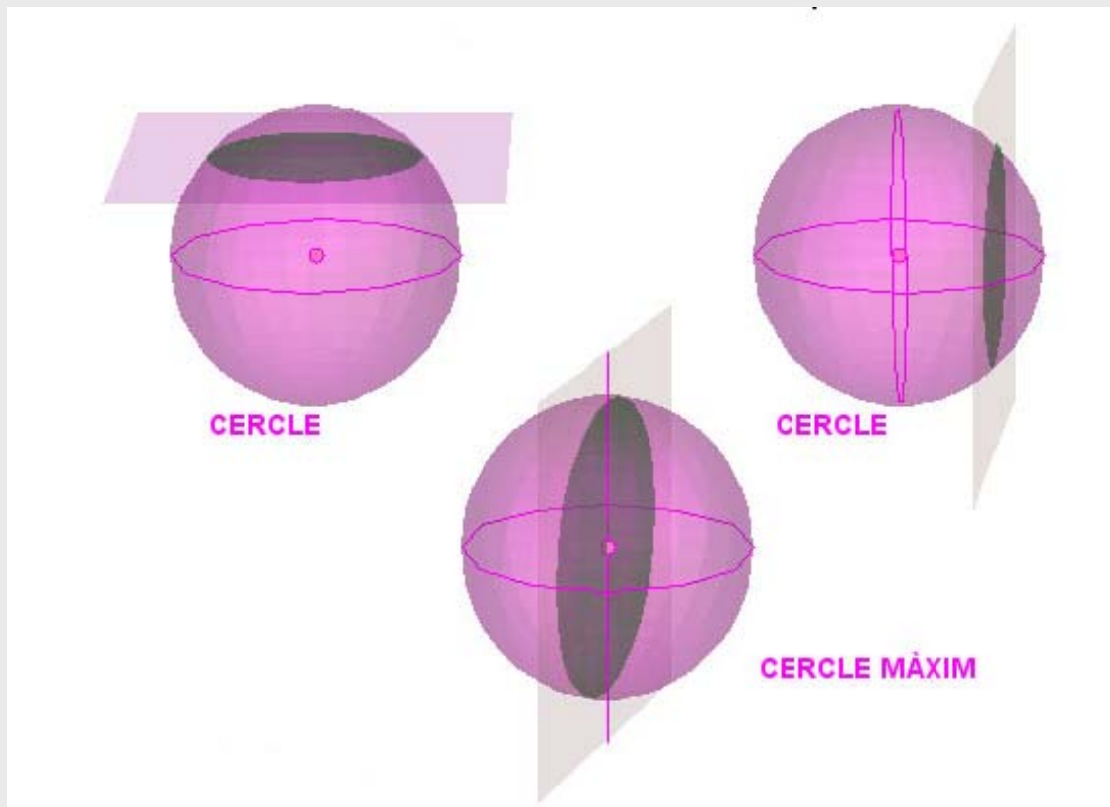
$$V_{ZE} = \pi \cdot r^2 \cdot h_2 - V_{TCO}$$



## Cercles a l'esfera

Quan un pla talla una esfera la intersecció d'ambdues figures produeix sempre un cercle. Si aquest cercle conté al centre de l'esfera es diu que és un CERCLE MÀXIM.

Les circumferències que limiten als cercles màxims tenen la propietat de que són els camins més curts entre dos punts qualsevol de la superfície de l'esfera.





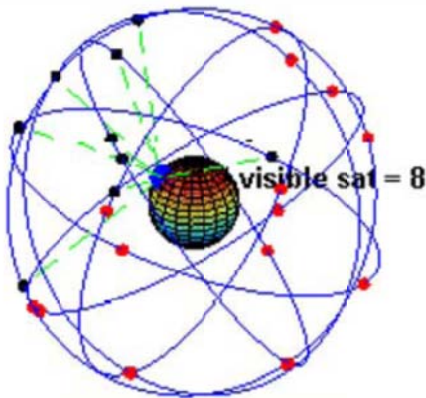
## 4. L'esfera terrestre

### Coordenades geogràfiques

La Terra té una forma quasi esfèrica. Gira sobre una línia anomenada **eix**. Els punts en què l'eix talla a la superfície de la Terra són els **pols geogràfics**.

Els plans que contenen l'eix, tallen a la Terra en cercles màxims les vores dels quals són circumferències anomenades **meridians**.

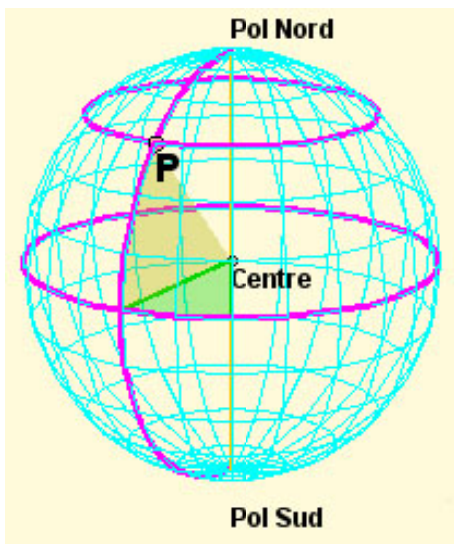
El pla perpendicular a l'eix que passa pel centre de la Terra la talla en un cercle màxim la vora del qual és l'**Equador**. Els plans paral·lels al pla de l'Equador tallen a la Terra en cercles que ja no són màxims. Les seves vores són els **paral·lels**.



A la imatge pots veure una representació del conjunt de satèl·lits que utilitza el Sistema de Posicionament Global (GPS) per localitzar amb precisió persones, objectes o vehicles.

La parella de nombres (longitud, latitud) formen el que s'anomena **coordenades geogràfiques** d'un indret.

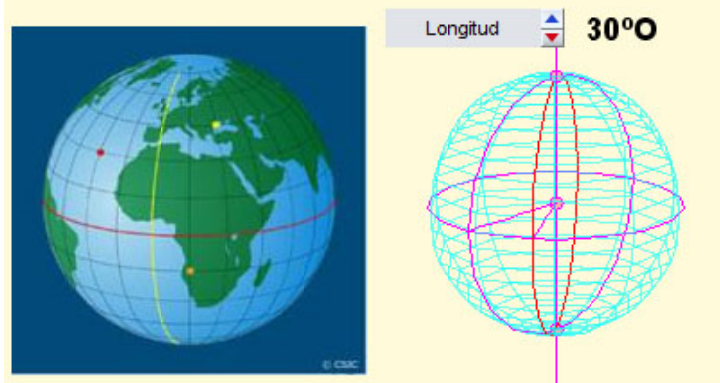
Aquestes coordenades determinen de forma precisa la posició sobre la Terra d'una població, un vaixell, un avió, un cotxe e inclús un telèfon mòbil.



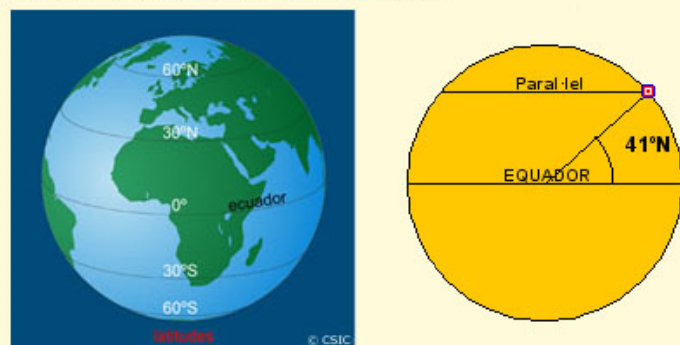
LONGITUD: **30° O**  
LATITUD: **45° N**

- **Longitud i latitud**

Per cada punt de la Terra passa un meridià i només un. La seva distància angular respecte a un meridià de referència (Meridià 0 o de Greenwich) s'anomena **longitud**. Es mesura en graus i s'ha d'indicar si és Est (°E) o Oest (°O). La longitud varia entre 0° i 180°. Per exemple, Valladolid té una longitud de 5°O.



Per cada punt de la Terra passa un paral·lel i només un. La seva distància angular respecte a l'Equador s'anomena **latitud**. Es mesura en graus i cal indicar si és Nord o Sud. La latitud mínima s'obté en qualsevol punt de l'Equador i és de 0°. La latitud màxima s'obté en els pols 90°N y 90°S. Per exemple, Valladolid té una latitud de 41°N.



## EXERCICIS resoltos

9. Encara que ara s'usa una definició més precisa, el metro és, aproximadament, la *deumilionèsima part del quadrant d'un meridià qualsevol*. Això significa que tots els cercles màxims sobre la Terra mesuren, aproximadament, 40.000.000 de metres (en particular, tots els meridians i l'Equador). A partir d'aquesta dada calcula la longitud del radi de la Terra, la seva superfície i el seu volum.

**SOLUCIÓ:**

40.000.000 m = 40.000 km. Com que la longitud d'una circumferència és  $2\pi r$ , tenim que

$$r = \frac{40000}{2\pi} \approx 6366 \text{ km}$$

L'àrea de la seva superfície (usant la fórmula de l'àrea d'una esfera) és:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 6366^2 \approx 509.000.000 \text{ km}^2$$

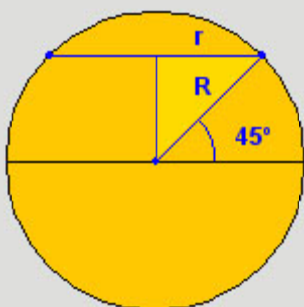
I el seu volum és:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 6366^3}{3} \approx 1,08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3 \approx \text{un bilió de km}^3$$

10. Excepte l'Equador, els paral·lels no són cercles màxims i calcular la seva longitud requereix l'ús d'unes eines que no veuràs fins el curs que ve. En canvi, en alguns casos concrets i amb l'ajut del nostre vell amic, el Teorema de Pitàgores, podem fer-ho. Calcula la longitud en km del paral·lel de 45°N.

**SOLUCIÓ:**  $R = \text{radi de la Terra} = 6366 \text{ km}$

L'horitzontal superior representa el diàmetre del paral·lel 45°N



El complementari de 45° és 45°, per tant el triangle rectangle de la figura té els dos catets iguals i un d'ells és el radi del paral·lel 45°:

$$r^2 + r^2 = R^2, \Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{6366}{\sqrt{2}} \approx 4501 \text{ km}$$

La longitud del paral·lel 45° és doncs:

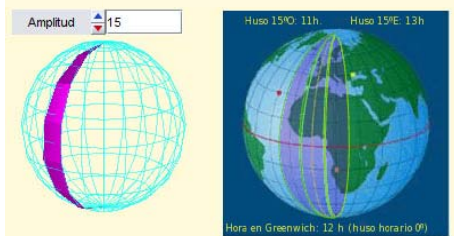
$$\text{long} = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3,14 \cdot 4501 \approx 28281 \text{ km}$$

Paral·lel

## Fusos horaris

Un fus esfèric és la regió de la superfície de l'esfera limitada per dos cercles màxims.

En el caso de la Terra diem FUS HORARI a un fus esfèric limitat per dos meridians.



Un **dia** és el temps que triga la Terra en girar sobre sí mateixa. Així, en qualsevol punt és **migdia** quan el Sol passa pel meridià del lloc. Això fa que fins i tot localitats properes tinguin hores diferents.

Per evitar aquest problema s'ha dividit la Terra en 24 zones que tenen la mateixa hora. Aquestes zones s'estableixen així: Centrat en el meridià  $0^\circ$  es forma un **fus esfèric** de  $15^\circ$  ( $360^\circ:24h=15^\circ$ ). En tots els punts d'aquest fus serà migdia quan el Sol passi pel meridià  $0^\circ$ . A partir d'ell amb girs de  $15^\circ$  es formen els altres 23 **fusos horaris**. El Sol triga una hora en creuar cada fus.

## EXERCICIS resoltos

11. Tenim una esfera de 9 cm de radi. Calcula la superfície d'un fus esfèric sobre aquesta esfera de  $62^\circ$  d'amplitud.

**SOLUCIÓ:**

$$\text{La superfície de l'esfera és } A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 9^2 = 1017,88 \text{ cm}^2$$

$$\text{La superfície d'un fus esfèric de } 1^\circ \text{ de amplitud és } \frac{A}{360}$$

$$\text{Per tant, la superfície del nostre fus és de } \frac{A}{360} \cdot 62 = 175,3 \text{ cm}^2$$

12. La ciutat A té una longitud de  $170^\circ\text{E}$  i la ciutat B de  $102^\circ\text{O}$ . Calcula l'hora que és a la ciutat B quan a la ciutat A són les 10 hores.

**SOLUCIÓ:**

Dividim les longituds per la amplitud d'un fus horari ( $15^\circ$ ). Si el residu és menor de  $7^\circ 30'$  el quocient és la diferència de fusos horaris de cada ciutat amb el meridià  $0^\circ$ . Si el residu és major llavors s'ha de sumar una unitat al quocient:

$$170^\circ = 15^\circ \cdot 11 + 5^\circ \text{ per tant la ciutat A està 11 fusos horaris a l' Est del merid. de Greenwich}$$

$$102^\circ = 15^\circ \cdot 6 + 12^\circ \text{ per tant la ciutat B està 7 fusos horaris a l' Oest del merid. de Greenwich}$$

Per tant, la diferència horària entre A i B és de -18 hores,

així a B són les 16 hores del dia anterior .



# Cossos geomètrics

## 5. Mapes

### Projeccions de l'esfera sobre un pla

Un mapa és una representació de l'esfera terrestre sobre un pla.

Com sabem que l'esfera no és una superfície desenvolupable arribem a la conclusió que els mapes no poden ser més que representacions aproximades de la realitat i mai exactes.

En aquest apartat anem a analitzar algunes de les tècniques emprades per construir mapes. Totes elles consisteixen en projectar els punts de l'esfera sobre un pla i totes elles tenen avantatges i inconvenients.

Veurem en cada cas quins són aquests avantatges i inconvenients i descriurem la seva construcció.

En l'actualitat se solen emprar tècniques més complexes per reduir els inconvenients tant com es pugui. Aquestes tècniques solen barrejar unes quantes de les descrites aquí però, malgrat tot, no aconsegueixen eliminar completament els errors.



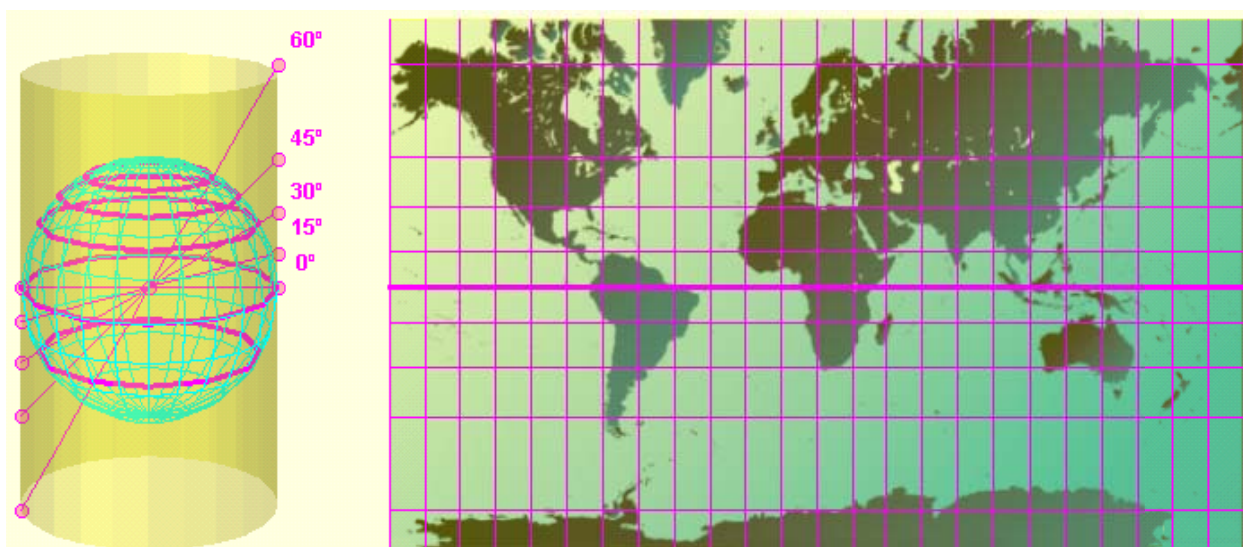
### Projecció de Mercator

Projecció cilíndrica des del centre de la Terra, inventada per Gerardus Mercator en 1569.

**Característiques:** Els meridians es representen mitjançant rectes verticals separades per distàncies iguals. Els paral·lels es representen mitjançant rectes horitzontals més separades a mesura que ens allunyem de l'Equador.

**Avantatges:** Manté la forma real dels continents i facilita l'establiment de rumbos constants de navegació.

**Inconvenients:** Disminueix la seva precisió a mesura que ens allunyem de l'Equador, el que fa que la superfície dels països d'Europa i Amèrica del Nord sembli molt més gran del que és en realitat.



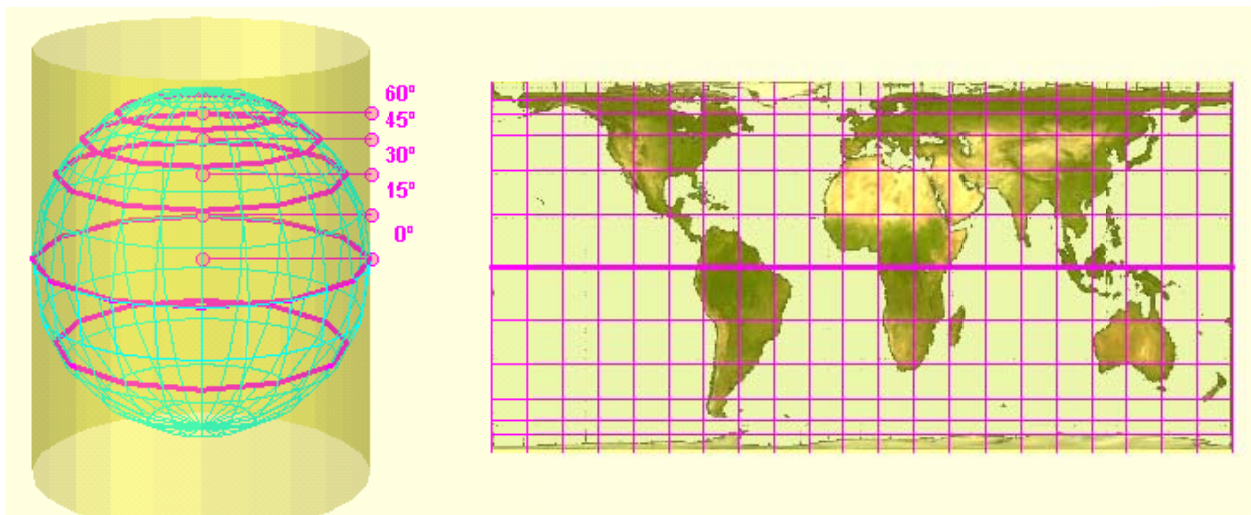
## Projecció de Gall-Peters

Projecció cilíndrica des de l'infinit.

**Característiques:** Els meridians es representen mitjançant rectes verticals separades per distàncies iguals. Els paral·lels es representen mitjançant rectes horitzontals més juntes a mesura que ens allunyem de l'Equador.

**Avantatges:** Aquest tipus de projecció conserva les àrees, és a dir, la superfície dels continents tal com es veu en el mapa és la correcta d'acord amb l'escala del mapa.

**Inconvenients:** A diferència de la projecció de Mercator, en aquest cas no es manté la forma correcta dels continents. Per mantenir les àrees, les zones properes a l'Equador es veuen més estretes i llargues de l'habitual i les zones properes als pols es veuen més amples i aplanades.



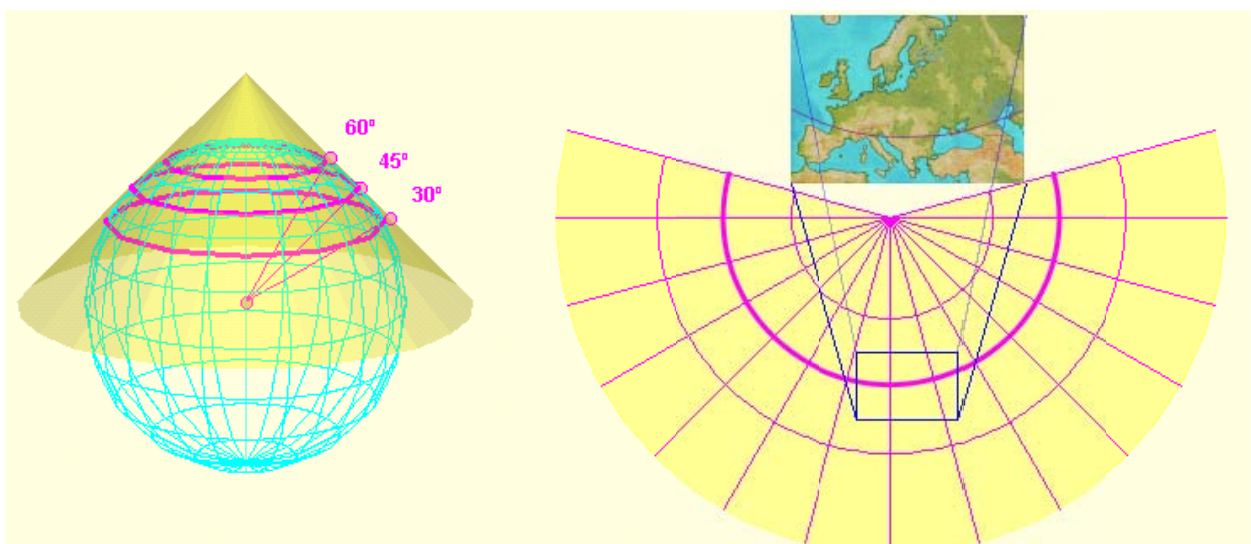
## Projecció Cònica

Projecció sobre un con tangent a l'esfera al llarg d'un paral·lel.

**Característiques:** El mapa apareix en el desenvolupament del con. Els meridians es representen mitjançant generatrius del con separades per distàncies angulars iguals. Els paral·lels es representen mitjançant arcs de circumferència perpendiculars als meridians.

**Avantatges:** És molt adequat per representar mapes zonals. És molt precís a prop del paral·lel de tangència.

**Inconvenients:** Igual que en els casos anteriors, les distorsions augmenten en allunyar-nos del paral·lel de tangència.





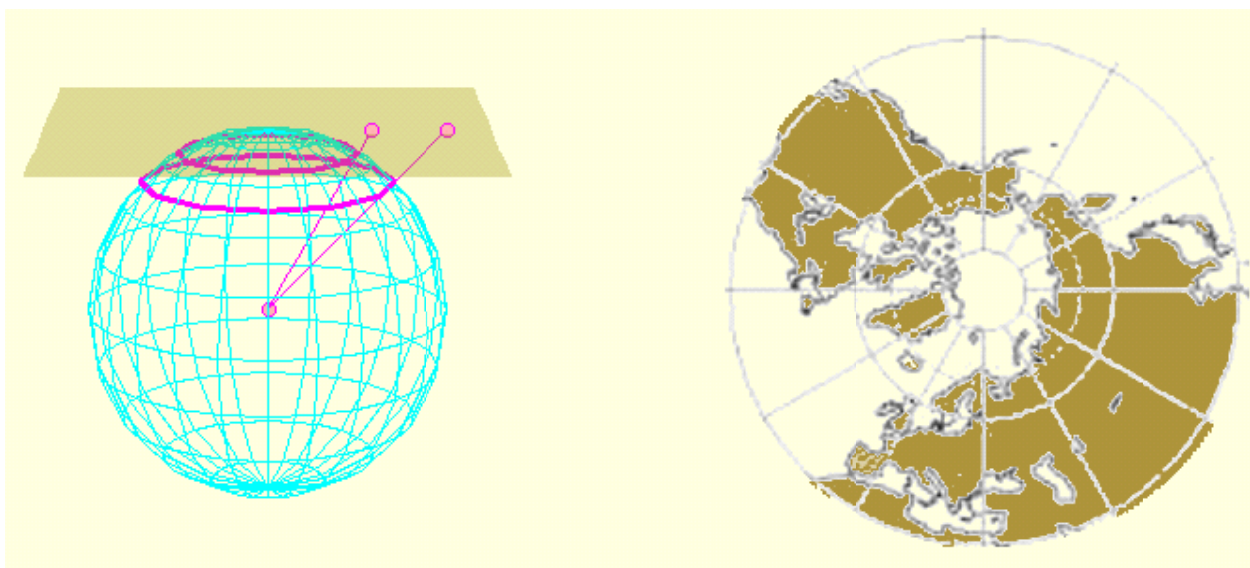
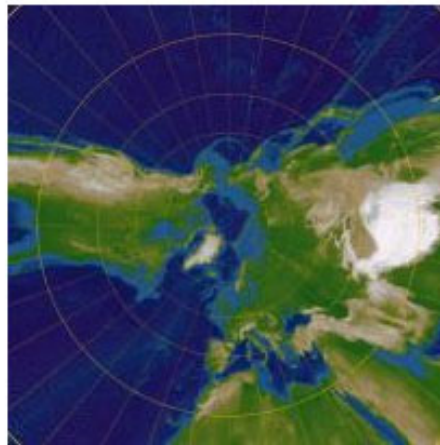
## Projecció Azimutal

Projecció sobre un pla tangent a l'esfera en un dels pols.

**Característiques:** El mapa és circular. Els meridians es representen com radis del cercle separats per distàncies angulars iguals. Els paral·lels són circumferències concèntriques més separades a mida que ens allunyem del pol.

**Avantatges:** És molt adequat per representar mapes polars. És molt precís a prop del pol.

**Inconvenients:** Les distorsions augmenten en allunyar-nos del pol.

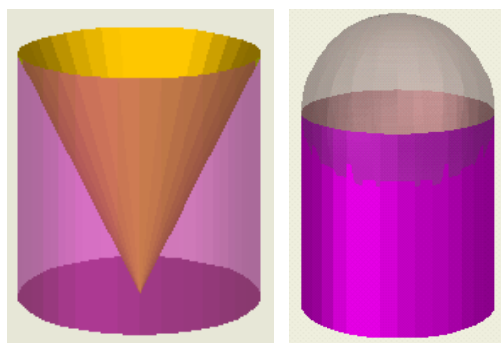




## Per practicar



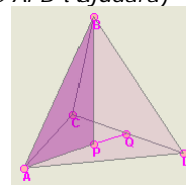
1. Calcula l'àrea total del tetraedre truncat sabent que la seva aresta mesura 12 cm.
2. Calcula l'àrea total d'un prisma recte sabent que les seves bases són rombes de diagonals  $D=26\text{cm}$  i  $d=14\text{cm}$  i la seva altura de  $h=26\text{cm}$ .
3. Calcula l'àrea lateral d'un tronc de piràmide quadrangular regular sabent que el costat de base major és  $B=26\text{cm}$ . El costat de base menor és  $b=14\text{cm}$  i l'aresta lateral és  $a=13\text{cm}$ .
4. Calcula l'àrea total del recipient de la figura esquerra sabent que el radi de la base és  $r=7\text{cm}$  i l'altura és  $h=13\text{cm}$ .



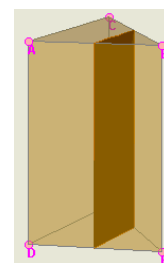
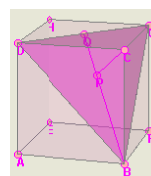
5. Quants litres de pintura es necessiten per pintar la paret exterior d'un observatori astronòmic (figura de dalt) sabent que té un radi de 5m, que l'altura del cilindre és de 9m i que amb cada litre es poden pintar 10 metres quadrats?
6. Una bola de Nadal de 3cm de radi es vol cobrir parcialment amb pa d'oro de forma que la franja coberta tingui una amplitud de  $60^\circ$  des del centre de la bola. Calcula la superfície de la bola que es pintarà.



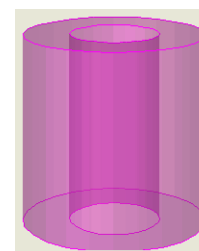
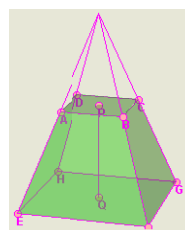
7. Calcula el volum del tetraedre regular de la figura sabent que la seva aresta  $AB=10\text{cm}$ . (El triangle  $APB$  t'ajudarà)



8. El cub de la figura té 10 cm d'aresta. Calcula el volum del tetraedre de vèrtexs BCDG i comprova que és la sisena part del volum del cub.



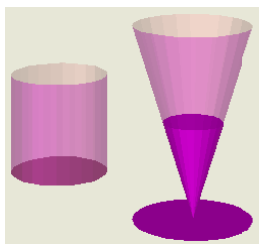
9. Calcula el volum dels dos prismes en que queda dividit el prisma regular triangular de la figura al ser tallat per un pla perpendicular a les bases que passa pels punts mitjans de les arestes.  $AD=20\text{m}$  i  $AC=15\text{m}$ .
10. Calcula el volum d'un tronc de piràmide quadrangular sabent que l'aresta de la base major és  $EF=20\text{cm}$ , l'aresta de la base menor és  $AB=8\text{cm}$  i l'altura del tronc és  $PQ=15\text{cm}$ .



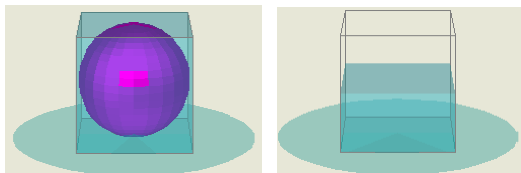
11. Calcula el volum de la peça de dalt sabent que el diàmetre de la circumferència exterior és de 10cm, el diàmetre de la circumferència interior és de 5 cm i l'altura és de 10 cm.

# Cossos geomètrics

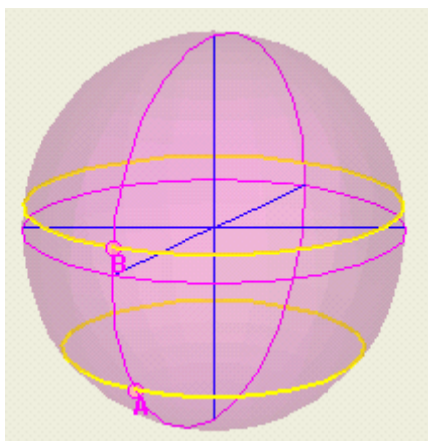
12. Les figures representen un vas cilíndric de 6cm de diàmetre i 8 cm d'altura i una copa amb forma de tronc de con amb 7cm de diàmetre major, 5 cm de diàmetre menor i 8 cm de generatriu. Quin té més capacitat?



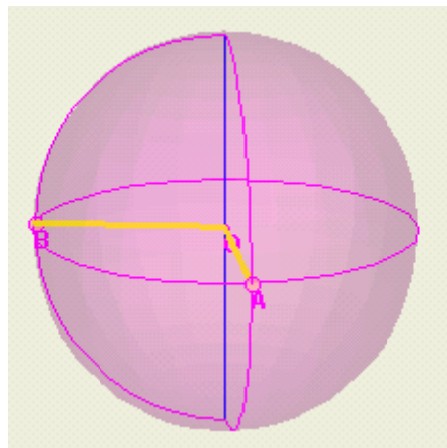
13. Un recipient cúbic de 10 cm d'aresta està ple d'aigua. S'introdueix en ell amb compte una bola de vidre de 5 cm de radi i després es treu amb compte. Calcula el volum de l'aigua que s'ha vessat i l'altura a la que queda l'aigua quan es treu la bola.



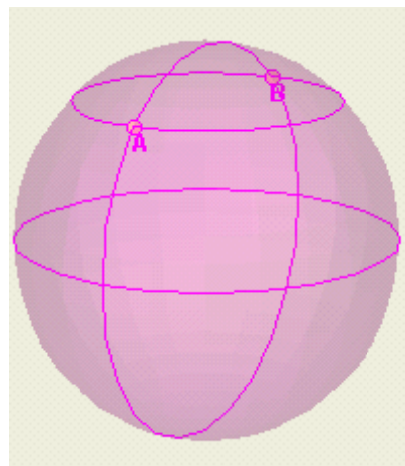
14. Calcula la distància entre dos punts de la Terra, A i B, situats al mateix meridià, si la latitud de A és de  $38^{\circ} 5' S$  i la de B és de  $7^{\circ} 28' N$ .



15. El punt A es troba en el meridià  $7^{\circ}E$  i el punt B en el meridià  $94^{\circ}O$ . Si a A són les 23 hores, quina hora és a B?



16. Els punts A i B es troben sobre el paral·lel  $45^{\circ}N$  i les seves longituds es diferencien en  $180^{\circ}$ . Un avió ha d'anar des de A fins B, quina ruta és més curta: seguint el paral·lel o seguint el meridià pel Pol Nord?

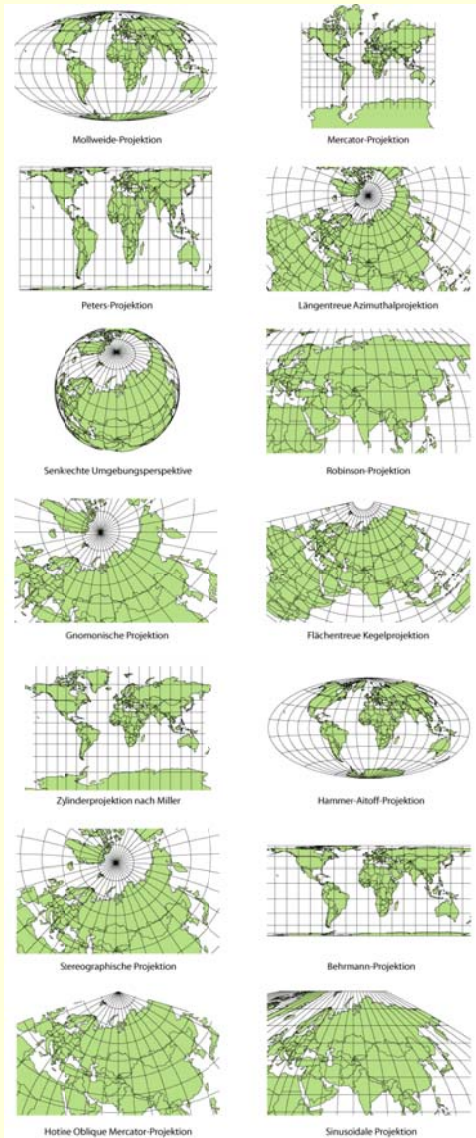


Per saber-ne més



## Altres tipus de mapa

Com hem vist hi ha diferents tipus de mapes basats en projeccions diferents de l'esfera sobre diferents tipus de superfície. Aquí et mostrem alguns altres tipus:



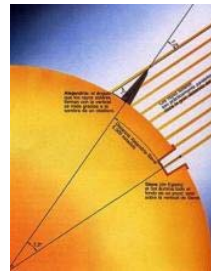
## La mesura de la Terra



La mida aproximada del nostre planeta es coneix des d'antic.

En el segle III a C. Eratòstenes va calcular el radi de la Terra amb una precisió molt bona.

Sabia que les ciutats egípcies de Siena i Alexandria estaven en el mateix meridià i que el dia del solstici d'estiu la llum del Sol arribava al fons d'un pou a Siena i, el mateix dia, a Alexandria els obeliscos projectaven ombra amb un angle de  $7^\circ$ .



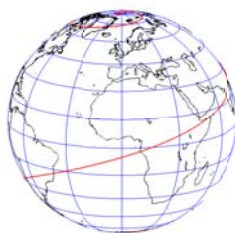
Al dibuix pots veure que l'angle de l'ombra coincideix amb la diferència de latitud entre les dues ciutats.

Eratòstenes va contractar un home per a que mesurés la distància entre ambdues ciutats que va resultar ser d'uns 800 km.

Si  $7^\circ$  de meridià tenen una longitud de 800 km, el meridià sencer de  $360^\circ$  mesurarà  $800/7 \cdot 360 = 41143$  km, d'on el radi de la Terra seria:

$$R = 41143 / (2\pi) = 6548 \text{ km.}$$

iUna excel·lent aproximació per l'època! El radi mig real és d'uns 6400 km.



## Geodèsiques i loxodromes.

Una **geodèsica** és una línia que uneix dos punts d'una superfície pel camí més curt. Sobre la Terra les geodèsiques són els cercles màxims. Una **loxodroma** és una trajectòria sobre la Terra que talla a tots els meridians amb un angle constant. Es fan servir molt a la navegació aèria i marítima. En l'enllaç adjunt pots veure una loxodroma de  $72^\circ$ .

# Cossos geomètrics

## Recorda el més important

### Poliedres

**Regulars:** Les seves cares són polígons regulars iguals i en cada vèrtex concorre el mateix nombre de cares.

**Semiregulars:** les cares són polígons regulars diferents i amb el mateix nombre i tipus de cares en cada vèrtex.

**Prismes:** les bases són polígons regulars iguals i els costats són paral·lelograms.

**Piràmides:** la base és un polígon regular i els costats són triangles concurrents en un vèrtex comú. Tots es poden desenvolupar.

### Cossos de revolució

**Cilindre:** generat per un rectangle en girar al voltant d'un dels seus cotats.

**Con:** generat per un triangle rectangle en girar al voltant d'un dels seus catets.

El cilindre i el con són desenvolupables.

**Esfera:** generada per una circumferència en girar sobre un dels seus diàmetres.

L'esfera no és desenvolupable.

### Àrees i volums

	A. lat.	A. total	Volum
Prismes	$p \cdot h$	$B + p \cdot h$	$B \cdot h$
Piràmides	$(p \cdot a)/2$	$B + (p \cdot a)/2$	$(B \cdot h)/3$
Cilindres	$2\pi r h$	$2\pi r^2 + 2\pi r h$	$\pi r^2 h$
Cons	$\pi g r$	$\pi r^2 + \pi g r$	$(\pi r^2 h)/3$
Esferes		$4\pi R^2$	$(4\pi R^3)/3$

$p$  = perímetre de la base,

$B$  = àrea de la base,

$h$  = altura,  $a$  = apotema (piràmide),

$r$  = radi de la base (cons i cilindres),

$R$  = radi (esfera),  $g$  = generatriu (con)

### Poliedres:

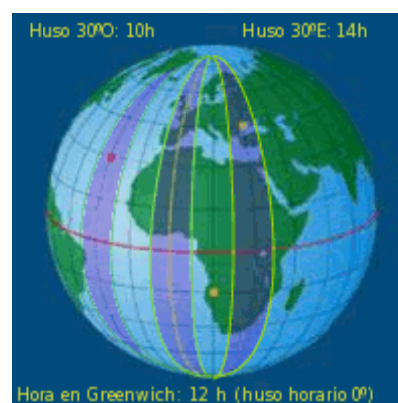
L'àrea d'un poliedre és sempre igual a la suma de les àrees dels polígons que formen les seves cares. El volum es calcula descomponent el poliedre en prismes i/o piràmides i sumant els seus volums.

### L'esfera terrestre

**Meridians:** cercles màxims que passen pels pols. Es numeren de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  Est i Oest a partir del *Meridià de Greenwich*. El meridià d'un indret és la seva longitud.

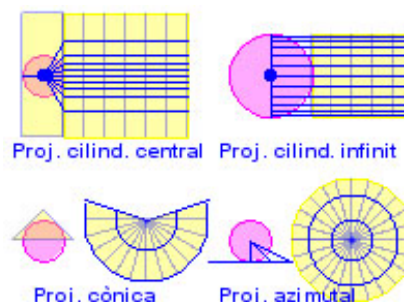
**Paral·lels:** cercles perpendiculars a l'eix de la Terra. Es numeren de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  Nord i Sud a partir de l'*Equador*. El paral·lel d'un indret és la seva latitud.

**Fusos horaris:** la Terra es divideix en 24 fusos horaris de  $15^\circ$  d'amplitud amb una hora de diferència entre ells.

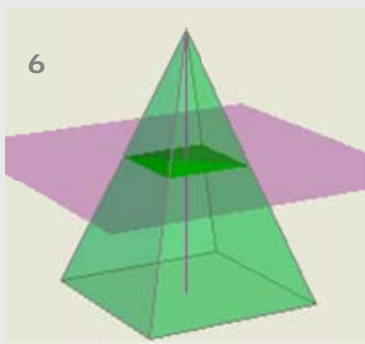
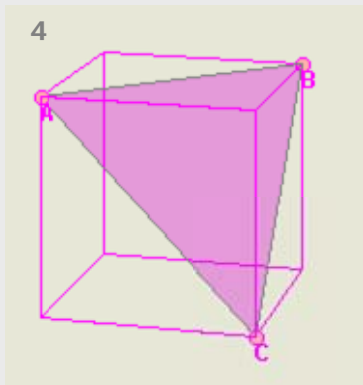
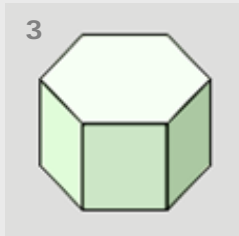


### Mapes

Un mapa és una representació de l'esfera terrestre sobre un plan, obtinguda mitjançant alguna forma de projecció. Les més habituals són les següents:



## Autoavaluació



10

a) Mapa de Mercator

1) Els paral·lels són cercles i els meridians radis.

b) Mapa de Gall-Peters

2) Els meridians i paral·lels són rectes perpendiculars i els paral·lels estan més separats com més lluny de l'Equador.

c) Mapa azimutal

3) Els paral·lels són arcs de circumferència i els meridians són rectes convergents.

d) Mapa cònic

4) Els meridians i paral·lels són rectes perpendiculars i els paral·lels estan més junts com més lluny de l'Equador.

- Indica quin poliedre s'obté al truncar les arestes d'un dodecaedre per la meitat i indica el nombre de cares arestes i vèrtexs que té.
- Els catets d'un triangle rectangle mesuren 12 cm i 16 cm. Troba quin con té major àrea total: el que s'obté fent girar el triangle al voltant del primer catet o el que s'obté al girar sobre el segon.
- Calcula l'àrea total del poliedre semiregular de la imatge sabent que la seva aresta és  $a$ . (Expressa el resultat en funció d' $a$ )
- Calcula l'àrea del triangle de la figura sabent que l'aresta del cub és  $a$ . (Expressa el resultat en funció d' $a$ )
- La "zona tropical" de la Terra està situada, aproximadament, entre els paral·lels  $30^\circ$  N i  $30^\circ$  S. Quin percentatge de la superfície de la Terra està situada en la zona tropical?
- Una piràmide de base quadrada es talla amb un plano paral·lel a la base per la meitat de l'altura de la piràmide, obtenint una piràmide més petita i un tronc de piràmide. Quantes vegades es més gran el volum del tronc amb respecte al volum de la piràmide petita?
- Es talla una semiesfera de radi  $R$  amb un pla paral·lel a la base de la semiesfera, a una altura de  $\frac{2}{3}$  del radi. Troba el volum de la major de les dues zones en que queda dividida. (Expressa el resultat en funció de  $R$ )
- Una milla nàutica és la distancia entre dos punts situats sobre el Equador amb una diferència de longituds de  $1'$ . ¿A quants km equival una milla nàutica si el radi de la Terra és de 6366 km?
- Boston està al meridià  $71^\circ$  O i Frankfurt en el meridià  $9^\circ$ E. Un avió surt de Frankfurt a las 23 hores i triga 8 hores en arribar a Boston. Quina hora és a Boston quan arriba?
- Associa els diferents tipus de mapa amb les seves característiques.



## Solucions dels exercicis per practicar

1.  $1745,9 \text{ cm}^2$
2.  $1899,54 \text{ cm}^2$
3.  $922,6 \text{ cm}^2$
4.  $1050,4 \text{ cm}^2$
5. 43,98 litres
6.  $56,54 \text{ cm}^2$
7.  $117,85 \text{ cm}^3$
8.  $500/3 \text{ cm}^3$
9. El petit  $162,37 \text{ m}^3$  i el gran  $487,13 \text{ cm}^3$ .
10.  $3120 \text{ cm}^3$ .
11.  $589,04 \text{ cm}^3$
12. La copa té un volum de  $226,49 \text{ cm}^3$  i el vas de  $226,19 \text{ cm}^3$ . Tenen pràcticament la mateixa capacitat.
13. S'han vessat  $523,59 \text{ cm}^3$  d'aigua. L'altura final de l'aigua és de 4,76 cm
14. 5061 km.
15. A B són les 17 hores.
16. Pel meridià són 10.000 km i pel paral·lel són 14.172 km.

## Solucions AUTOEVALUACIÓ

1. És un icosidodecaedre amb 32 cares, 60 arestes i 30 vèrtexs.
2. El que gira sobre el primer:  $576\pi \text{ cm}^2$  en front a  $384\pi \text{ cm}^2$ .
3.  $6a^2 + 3a^2\sqrt{3}$
4.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
5. 50%
6. El tronc és 7 vegades major que la piràmide petita.
7.  $\frac{46\pi R^3}{81}$
8. 1,85 km
9. És la 1 de la matinada del dia següent.
10. a2, b4, c1, d3