8

Cossos geomètrics

Objectius

En aquesta quinzena aprendràs a:

- Distingir les diferents classes de cossos geomètrics.
- Construir-los a partir del seu desenvolupament pla.
- Calcular les seves àrees i volums.
- Determinar el seus plans de simetria.
- Localitzar un punt sobre la Terra.
- Calcular l'hora en cada país.
- Conèixer com es fan els diferents tipus de mapes i els avantatges i inconvenients de cadascun.

Abans de començar

Recorda

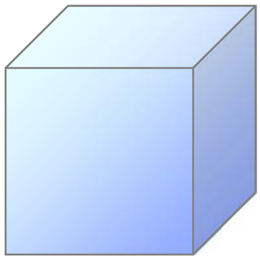
Un **poliedre** és un cos tancat limitat per polígons.

Cadascun d'ells rep el nom de **cara**. Els costats de les cares són les **arestes** del poliedre i els extrems de les arestes són els **vèrtexs** del poliedre.

En tot poliedre simple (sense forats) es compleix **la relació d'Euler**:

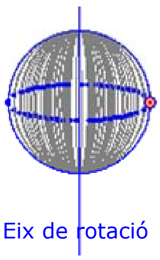
El nombre de cares d'un poliedre (C) és igual al nombre d'arestes (A) menys el de vèrtexs (V) més 2.

$$C = A - V + 2$$



C=6   V=8   A=12

A-V+2=12–8+2=6=C



Un **cos de revolució** és qualsevol figura geomètrica construïda en fer girar una figura plana al voltant d'un eix contingut en el mateix pla.

1. Poliedres regulars

Definicions

Direm que un **poliedre** és **regular** quan es compleixen les següents condicions:

- Les seves cares són polígons regulars iguals.
- En cada vèrtex concorren el mateix nombre de cares.

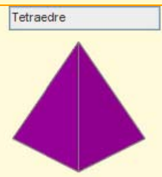
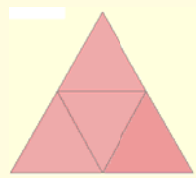
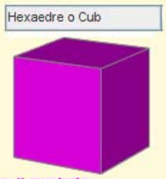
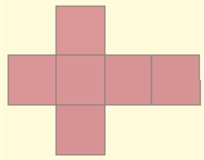
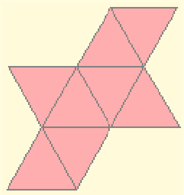
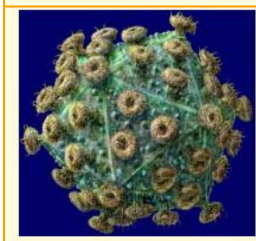
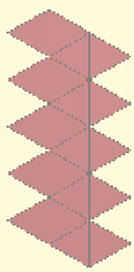
Només hi ha cinc poliedres regulars (anomenats també **Sólids Platònics**):

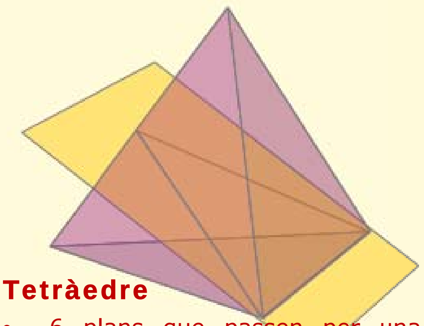
- **Tetraedre**: 4 cares (triangles equilàters)
- **Hexaedre o cub:** 6 cares (quadrats)
- **Octaedre**: 8 cares (triangles equilàters)
- **Dodecaedre**: 12 cares (pentàgons regulars)
- **Icosàedre**: 20 cares (triangules equilàters)

Desenvolupaments

Es diu que un cos geomètric és **desenvolupable** si es pot construir a partir d'una figura plana formada per totes les seves cares.

Tots els poliedres regulars són desenvolupables i en aquest apartat et mostrarem les figures que permeten la seva construcció

Característiques		Desenvolupament
 Empaquetament de boles en forma de tetraedre.	 Cares: 4 triangles equilàters Arestes: 6 Vèrtexs: 4	
 Cristalls cúbics de pirita (Sulfur de ferro FeS_2)	 Cares: 6 quadrats Arestes: 12 Vèrtexs: 8	
 Cristalls octaèdrics de fluorita (Fluorur de Calci CaF_2)	 Cares: 8 triangles equilàters Arestes: 12 Vèrtexs: 6	
 Institut de la Construcció Eduardo Torroja (Madrid)	 Cares: 12 pentàgons regulars Arestes: 30 Vèrtexs: 20	
 Estructura icosaèdrica d'un virus	 Cares: 20 triàngles equilàters Arestes: 30 Vèrtexs: 12	



Tetràedre

- 6 plans que passen per una aresta i pel punt mitjà de l'aresta oposada.

Plans de simetria

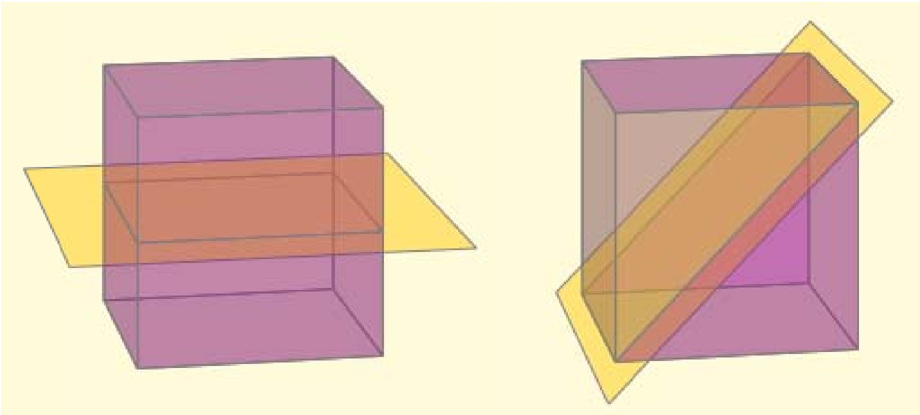
Un pla de simetria és aquell que divideix un cos en dues parts iguals que es corresponen de manera exacta.

Els políedres regulars tenen els següents plans de simetria:

Tetràedre	6
Cub	9
Octàedre	9
Dodecàedre	15
Icosàedre	15

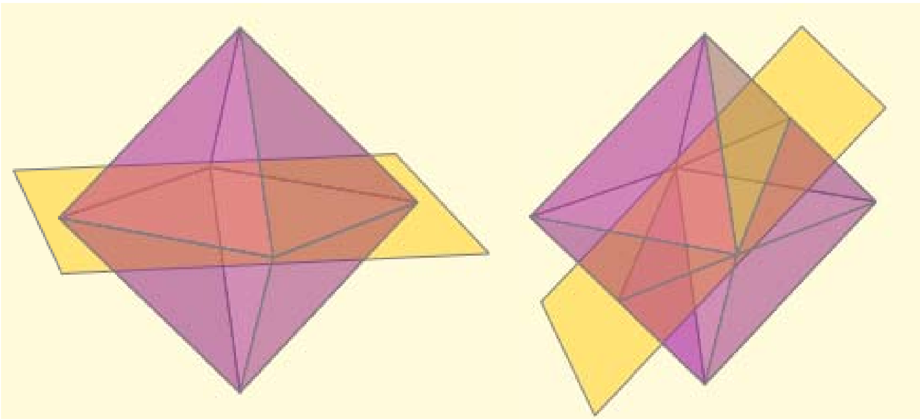
Hexàedre o cub

- 3 plans paral-lels a dues cares oposades.
- 6 plans que passen per dues arestes oposades.



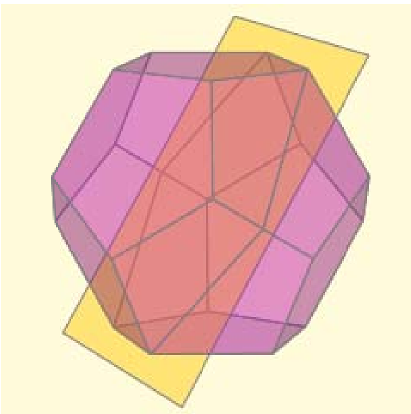
Octàedre

- 3 plans que passen per quatre vèrtexs.
- 6 plans que son perpendiculars a parells d'arestes paral-leles.



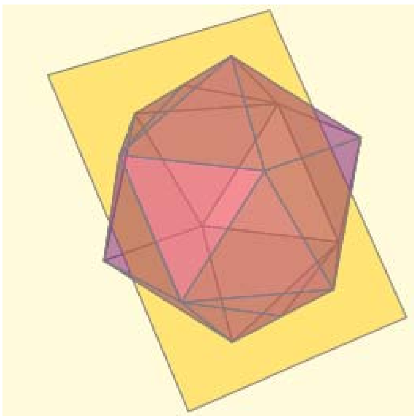
Dodecàedre

- 15 plans que passen per dues arestes paral-leles.



Icosàedre

- 15 plans que passen per dues arestes paral-leles.

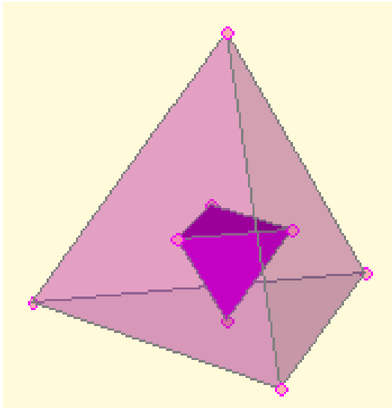


Poliedres duals

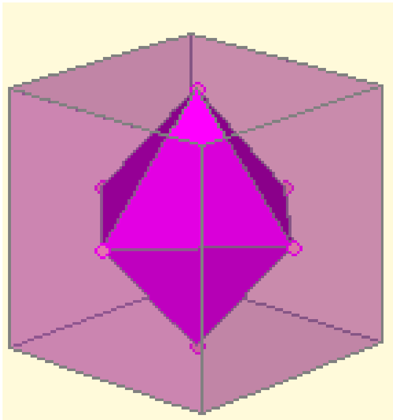
Es diu que dos poliedres són **duals** si el nombre de vèrtexs del primer coincideix amb el nombre de cares del segon i a l'inrevés. A més ambdós han de tenir el mateix nombre d'arestes.

Si dos poliedres són duals poden construir-se l'un a partir de l'altre unint amb segments els centres de cada dues cares contigües.

A les següents imatges es mostra que el cub i l'octaedre són duals, el dodecaedre i l'icosaedre també i que el tetraedre és dual amb ell mateix.



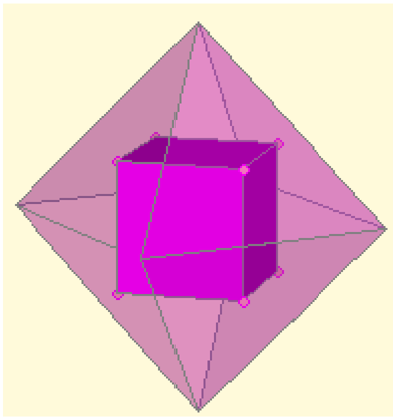
Tetraedre: nre. de vèrtexs = 4 = nre. de cares.



Nre. de cares del cub = 6 = nre. de vèrtexs de l'octaedre

Nre. de cares de l'octaedre = 8 = nre. de vèrtexs del cub

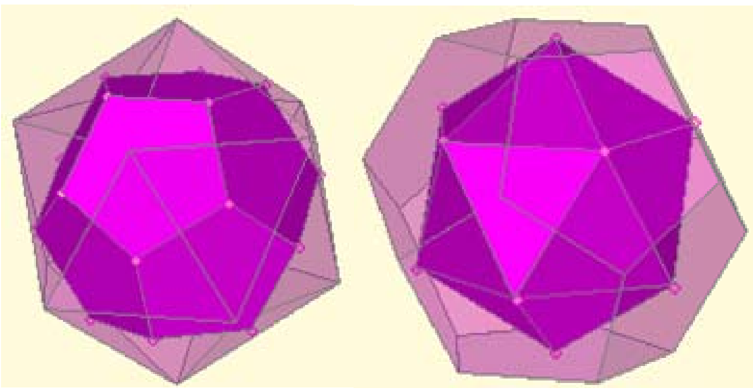
Nre. d'arestes del cub = 12 = nre. d'arestes de l'octaedre.



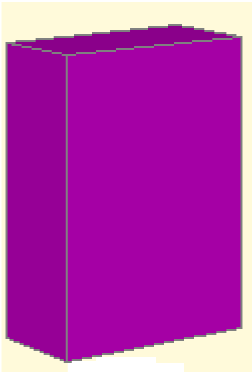
Nre. de cares del dodecaedre=12 =nre. de vèrtexs de l'icosaedre

Nre. de cares de l'icosaedre =20=nre. de vèrtexs del dodecaedre

Nre. d'arestes del dodecaedre = 30=nre. d'arestes de l'icosaedre



2. Altres poliedres

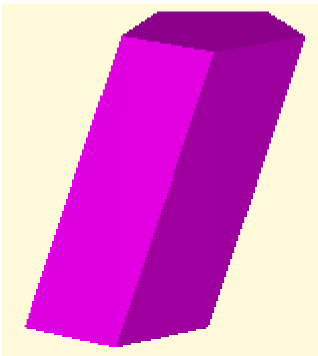


Prisma recte
Ortoedre

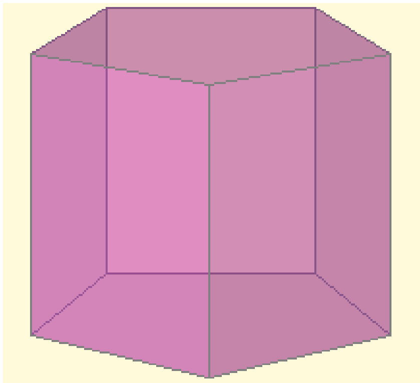
Prismes

Un **prisma** és un poliedre amb dues cares paral·leles que són polígons iguals i els costats dels quals s'uneixen mitjançant paral·lelograms. Les cares paral·leles són les ***bases*** i els paral·lelograms són els ***costats***.

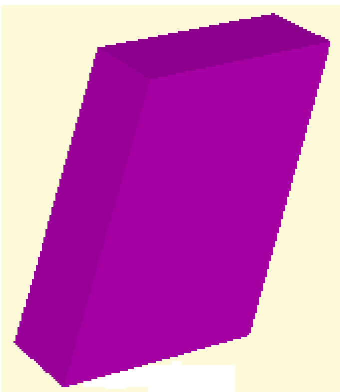
- Si els costats són rectangles és un **prisma recte**, en cas contrari és un **prisma oblic.**
- Si las bases són paral·lelograms és un **paral·lelepípede** i si las bases i els costats són rectangles és un **ortoedre.**
- Si les bases d'un prisma recte són polígons regulars diem que és un **prisma regular.**



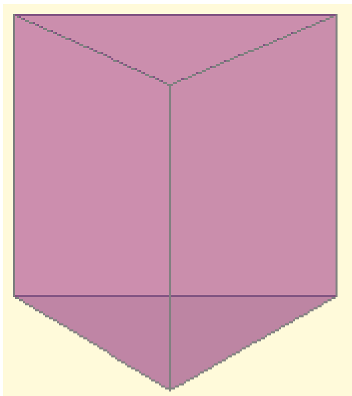
Prisma oblic



Prisma regular pentagonal



Prisma oblic
Paral·lelepípede



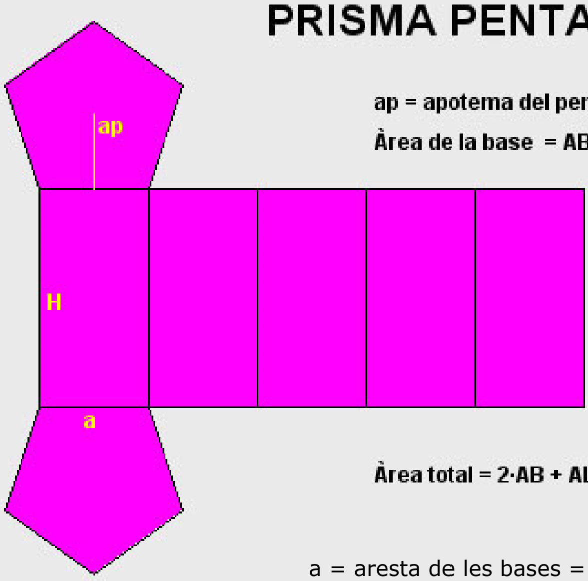
Prisma regular triangular

Desenvolupaments, àrees i volums de prismes regulars

Els prismes són cossos desenvolupables. En particular, els prismes regulars tenen un desenvolupament molt senzills, format per tants rectangles iguals com costats tingui i dos polígons regulars que formen las bases. Això facilita el càlcul de les seves àrees i volums.

1. Desenvolupament i àrea d'un prisma regular pentagonal:

PRISMA PENTAGONAL



ap = apotema del pentàgon   p = perímetre = $5 \cdot a$

Àrea de la base $= AB = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$

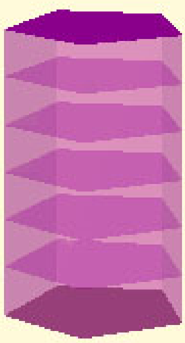
Àrea d'un costat = $a \cdot H$

Àrea lateral = $AL = 5 \cdot a \cdot H$

Àrea total = $2 \cdot AB + AL = 5 \cdot a \cdot ap + 5 \cdot a \cdot H = 5 \cdot a \cdot (ap + H)$

a = aresta de les bases = base dels rectangles laterals
H = altura del prisma = altura dels rectangles laterals

2. Volum d'un prisma pentagonal regular:



Observa el prisma de l'esquerra.

Podem considerar que està format per una sèrie apilada de prismes del mateix tipus l'altura del qual és la unidad.

El volum de cadascun d'aquests petits prismes és igual a l'àrea de la base, A, després el volum del prisma gran serà:

$$V = A \cdot H$$

essent H l'altura del prisma.

PRISMA PENTAGONAL

$$V = \frac{p \cdot ap}{2} \cdot H = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} \cdot H$$

Piràmides

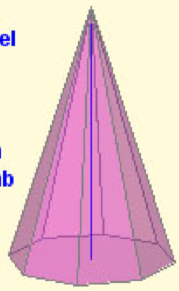
Una **piràmide** és un poliedre amb una cara formada por un polígon qualsevol sobre els costats del qual s'aixequen triangles que s'uneixen en un punt comú. El polígon és la ***base*** de la piràmide, els triangles són els ***costats*** i el punt comú és el ***vèrtex***.

Si el vèrtex es projecta verticalment sobre el centre de la base és una **piràmide recta**, en cas contrari, és una **piràmide obliqua**.

Si la base d'una piràmide recta és un polígon regular diem que és una **piràmide regular**. En aquest cas, els costats són triangles isòsceles i tots iguals. *El tetraedre és un cas particular de piràmide*.

L'altura és la distància del vèrtex al pla que conté a la base.

Si la piràmide és recta la altura uneix el vèrtex amb el centre de la base.



Piràmide octogonal recta

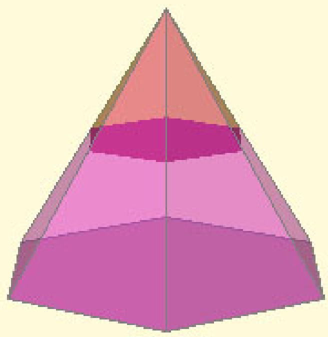
L'altura és la distància del vèrtex al pla que conté a la base.

Piràmide pentagonal obliqua

Una **piràmide truncada**, o **tronc de piràmide**, s'obté tallant el seu vèrtex amb un pla paral·lel a la base.

El poliedre resultant té dues bases semblants i paral·leles, però de diferent mida.

L'altura del tronc de piràmide és la diferència entre l'altura de la piràmide inicial i la de la piràmide que hem tret.



Desenvolupaments, àrees i volums de piràmides regulars

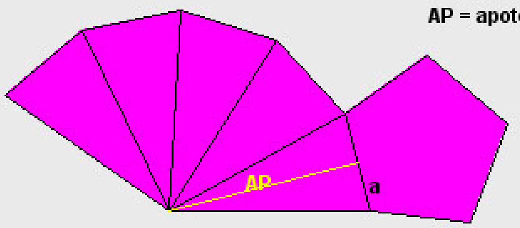
Les piràmides són cossos geomètrics desenvolupables. En particular, les piràmides regulars tenen un desenvolupament molt senzill, format per tants triangles isòsceles iguals com costats tingui i un polígon regular que forma la base. Al igual que en el cas dels prismes això facilita el càlcul de les seves àrees i volums.

3. Desenvolupament d'una piràmide regular pentagonal:

PIRÀMIDE PENTAGONAL

a = aresta de la base

AP = apotema de la piràmide = altura de cada costat

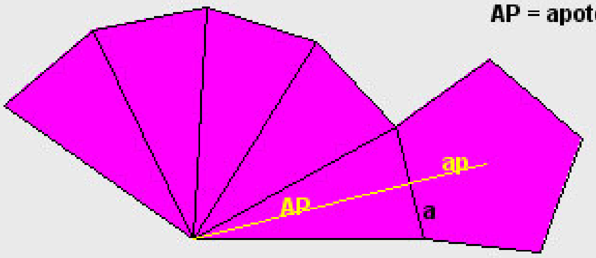


4. Área de una pirámide regular pentagonal:

PIRÀMIDE PENTAGONAL

a = aresta de la base

AP = apotema de la piràmide = altura de cada costat



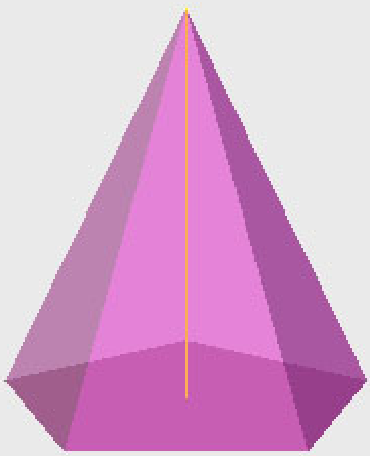
de la base = AB = $\frac{p \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$

Àrea d'un costat = $\frac{a \cdot AP}{2}$

ÀREA TOTAL = AB+AL = $\frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} + 5 \cdot \frac{a \cdot AP}{2} = \frac{5 \cdot a}{2} \cdot (ap + AP)$

Àrea lateral = AL = $5 \cdot \frac{a \cdot AP}{2}$

5. Volum d’una piràmide regular pentagonal:



El volum de qualsevol piràmide és sempre igual a la tercera part del volum d'un prisma que tingui la mateixa base i la mateixa altura, és a dir,

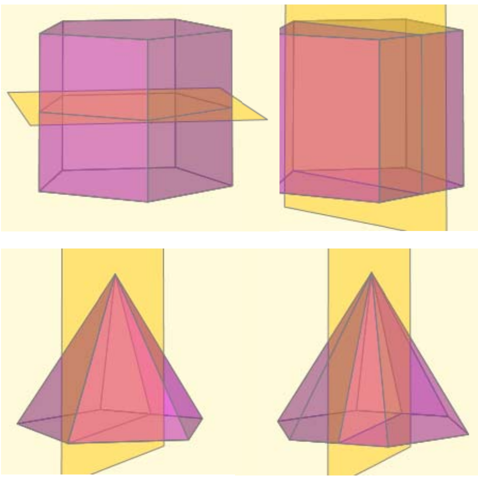
$$V = \frac{1}{3} AB \cdot H$$

essent, AB l'àrea de la base i H l'altura de la piràmide

PIRÀMIDE PENTAGONAL

Àrea de la base = $\frac{p \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2}$

Volum = $\frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot a \cdot ap}{2} \cdot H = \frac{5 \cdot a \cdot ap}{6} \cdot H$



Plans de simetria en prismas i piràmides regulars

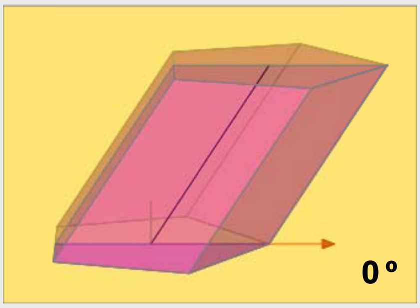
Si N es el nombre de costats de les bases d'un prisma regular o de la base d'una piràmide regular:

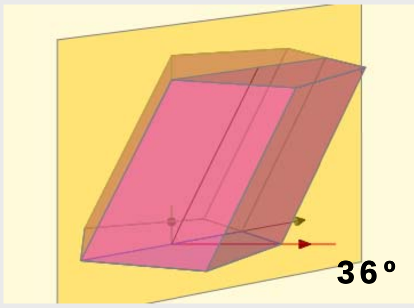
- El **prisma** té N+1 plans de simetria. Un és el pla paral·lel a les bases que passa pel punt mitjà de l'altura i els altres N són aquells que contenen els eixos de simetria de les bases.
- La **piràmide** té N plans de simetria, que són els que contenen els eixos de simetria de la base i el vèrtex d'aquesta piràmide.

Plans de simetria en prismas i pirámides oblics de base regular

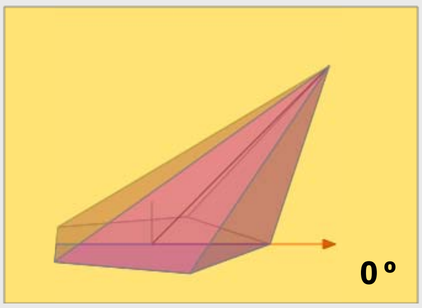
La majoria dels **prismes oblics de base regular** no tenen cap pla de simetria. Només, en tindran un, aquells que compleixin que la direcció d'inclinació coincideixi amb la d'un eix de simetria de les seves bases. Aquest pla passa per aquest eix i és perpendicular a les bases.

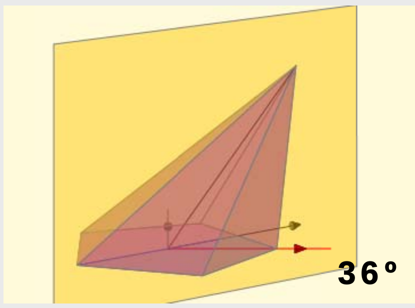
Per exemple en el prisma pentagonal podem distingir només dues direccions diferenciades en les quals aquests prismes tenen un pla de simetria (els altres s'obtenen de les anteriors mitjançant girs d'amplitud 72º=360º/núm. vèrtexs)





Passa el mateix en les **piràmides obliqües de base regular**.



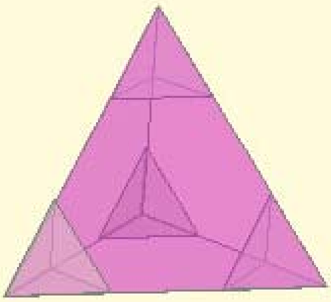


Poliedres semiregulars

Un **poliedre semiregular** és un poliedre les cares del qual són polígons regulars de dos o més tipus, de forma que en cada vèrtexs concorren els mateixos polígons (en nombre i en tipus).

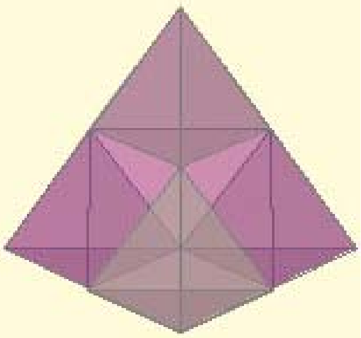
Es poden obtenir amb certa facilitat poliedres semiregulars a partir dels poliedres regulars mitjançant la tècnica del truncament.

Truncar un poliedre consisteix en suprimir un dels seus vèrtexs mitjançant l'aplicació d'un tall pla.



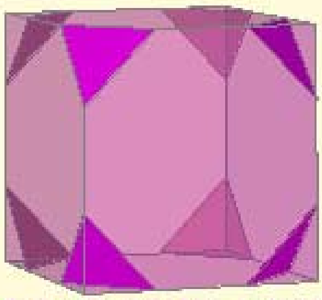
Tetraedre truncat

Poliedre semiregular amb 4 hexàgons regulars i 4 triangles equilàters. En cada vèrtex conflueixen 2 hexàgons i 1 triangle.



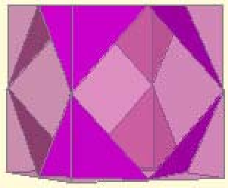
Tetraedre truncat

Octaedre regular.



Cub truncat

Poliedre semiregular amb 8 triangles equilàters i 6 octògons regulars. En cada vèrtex conflueixen 2 octogòns i 1 triangle.



Cub truncat

Cuboctaedre. Format per 6 quadrats i 8 triangles equilàters. En cada vèrtex conflueixen 2 quadrats i 2 triangles.

Octaedre truncat

Poliedre semiregular amb 8 hexàgons regulars i 6 quadrats. En cada vèrtex conflueixen 2 hexàgons i 1 quadrat.

Octaedre truncat

Cuboctaedre. Format per 6 quadrados i 8 triangles equilàters. En cada vèrtex conflueixen 2 quadrats i 2 triangles.

Dodecaedre truncat

Poliedre semiregular amb 12 pentàgons i 20 triangles equilàters. En cada vèrtex conflueixen 2 pentàgons i 2 triangles.

Dodecaedre truncat

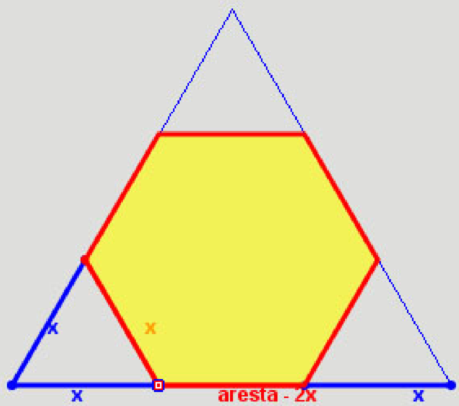
Poliedre semiregular amb 12 pentàgons i 20 triangles equilàters. En cada vèrtex conflueixen 2 pentàgons i 2 triangles.

Icosaedre truncat

Poliedre semiregular amb 12 pentàgons i 20 triangles equilàters. En cada vèrtex conflueixen 2 pentàgons i 2 triangles.

EXERCICIS resolts

6. Determinar la longitud de l’aresta d’un tetraedre, d’un octaedre o d’un icosàedre que s’ha de truncar a partir d’un vèrtex per obtenir un poliedre semiregular.



El triangle adjunt representa una cara d'un tetraedre, octaedre o icosaedre regular.
Movent el punt vermell se simula el truncamient dels vèrtexs.

La figura resultant és un hexàgon, que ha de ser regular perquè el poliedre que busquem sigui semiregular.

Això s'aconsegueix quan

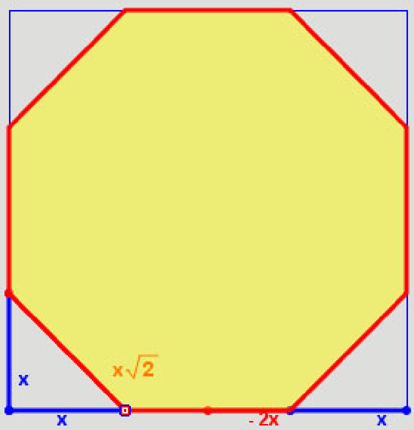
$$x = \text{aresta} - 2x$$

o sigui, quan

$$\text{aresta} = 3x$$

Per tant el tall ha de produir-se a una distància del vèrtex d'un terç del total de l'aresta.

7. Determinar la longitud de l’aresta d’un cub que s’ha de truncar a partir d’un vèrtex per obtenir un poliedre semiregular.



El quadrat adjunt representa una cara d'un cub.
Movent el punt vermell se simula el truncament dels vèrtexs.

Al truncar observem que la figura resultant és un octògon, que ha de ser regular perquè el poliedre que busquem sigui semiregular.

Això s'aconsegueix quan

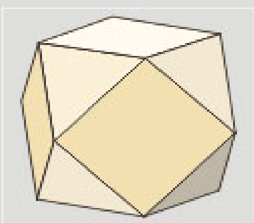
$$x\sqrt{2} = \text{aresta} - 2x$$

o sigui, quan

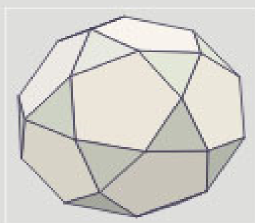
$$x = \frac{\text{aresta}}{2+\sqrt{2}}$$

8. Analitza la dualitat de poliedres regulars quan es trunquen per la meitat de l’aresta.

El cub i el octaedre són duals.
En ambdós casos s'obté un CUBOCTAEDRE



El dodecaedre i l'icosaedre són duals.
En ambdós casos s'obté un ICOSIDODECAEDRE

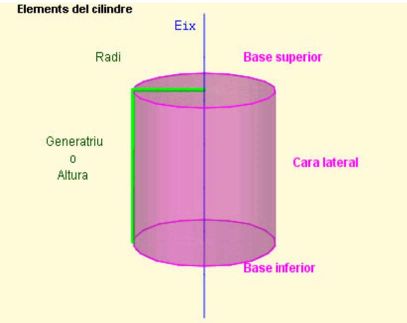


3. Cossos de revolució

Cilindres

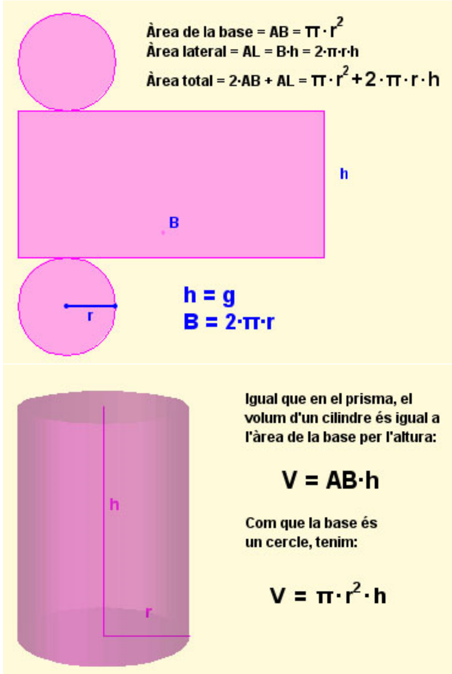
Un **cilindre** és un cos generat per un segment (***generatriu***) al girar al voltant d'una recta paral·lela al segment (***eix***). El cilindre és un cos desenvolupable.

Un cilindre té 3 cares: dues d'elles són cercles paral·lels i iguals (***bases***) i l'altra és una cara corba (***cara lateral***) que desenvolupada es transforma en un rectangle.



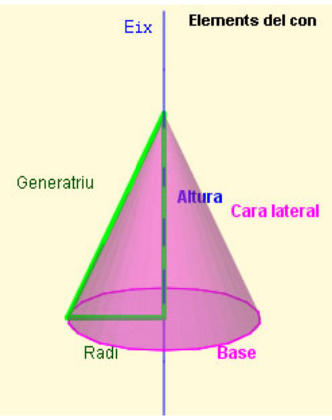
El ***radi*** del cilindre és el radi de qualsevol de les seves bases i l'***altura*** del cilindre és la longitud de la generatriu.

La cara lateral desenvolupada és un rectangle, la base del qual és la longitud de la circumferència que envolta la base i l'altura del qual és la generatriu.



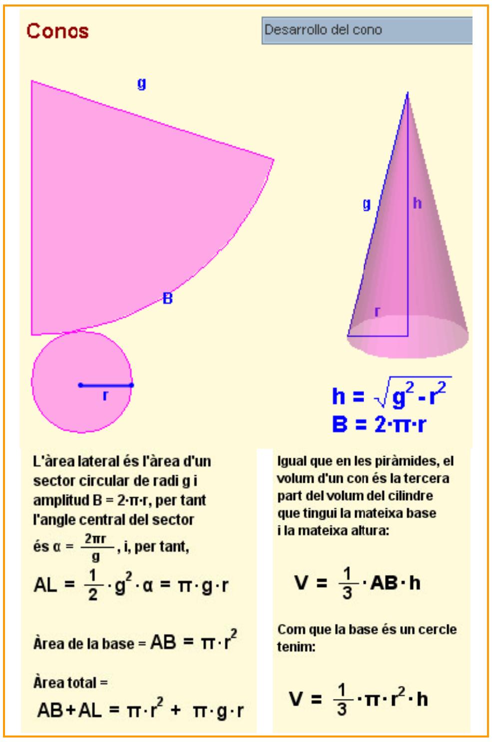
Cons

Un **con** és un cos generat per un segment (***generatriu***) al girar al voltant d'una recta sobre la que es recolza un dels seus extrems (***eix***). El con és un cos desenvolupable.

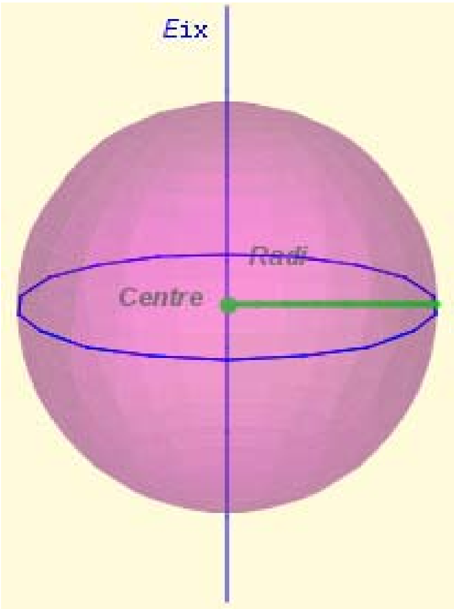


Un con té 2 cares: un cercle (***base***) i una cara corba (***cara lateral***) que desevolupada es transforma en un sector circular.

El punt de recolzament de la generatriu sobre l'eix és el ***vèrtex*** del con. El ***radi*** del con és el radi de la seva base i l'***altura*** del con és la distància del vèrtex al centre de la base.



La cara lateral desenvolupada és un sector circular el radi del qual és la generatriu i l'amplitud del qual és la longitud de la circumferència de la base.

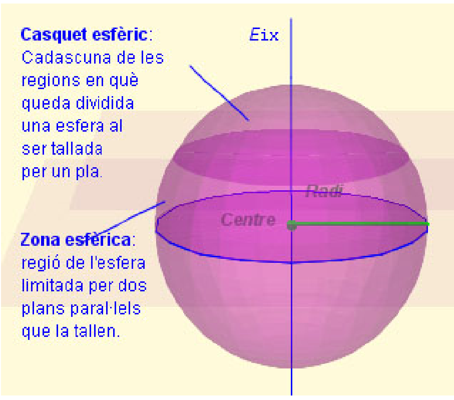


Esferes

Una **esfera** és un cos generat per un cercle al girar al voltant de qualsevol dels seus diàmetres.

El ***radi*** d'una esfera és el mateix que el radi del cercle que la genera i coincideix amb la distància del centre de l'esfera a qualsevol dels punts de la seva superfície. Aquesta propietat caracteritza a l'esfera: *l'esfera és el conjunt de punts de l'espai que equidisten d'un punt fix, anomenat centre*.

Les esferes no són desenvolupables. Per aquest motiu l'elaboració de mapes és un problema important. Analitzarem aquest problema amb més detall en l'últim capítol.



- **Àrea de l'esfera**

L'àrea d'una esfera de radi r és igual l'àrea lateral del cilindre que la circumscriu.

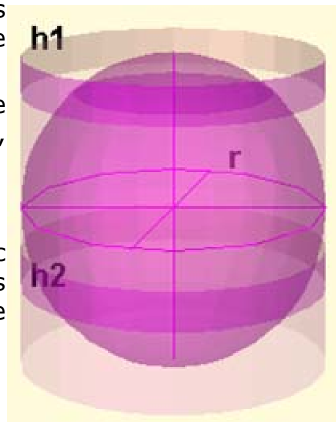
Com que el radi d'aquest cilindre també és r i la seva altura 2r, l'àrea de l'esfera és:

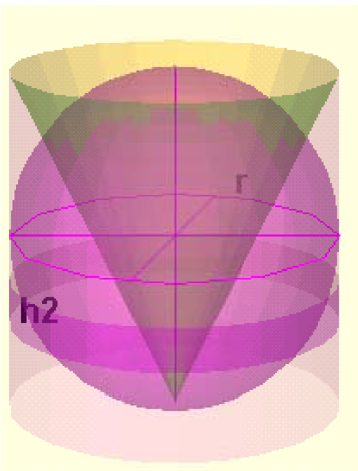
$$\mathbf{A} = \mathbf{2} \cdot \pi \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{2r} = \mathbf{4} \cdot \pi \cdot \mathbf{r}^{\mathbf{2}}$$

A més l'àrea d'un casquet esfèric o d'una zona esfèrica també és igual a l'àrea lateral del cilindre que la conté.

Àrea del casquet$=2\cdot\pi\cdot r\cdot h1$

Àrea de la zona$=2\cdot\pi\cdot r\cdot h2$





- **Volumen de la esfera**

$$\mathbf{V_E} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \cdot \pi \cdot \mathbf{r}^{\mathbf{3}}$$

El volum del cilindre circumscrit és:

$$\mathbf{V_{CI}=\pi\cdot r^2\cdot 2r = 2\cdot\pi\cdot r^3}$$

Por tant el volum de l'esfera equival als dos terços del volum del cilindre circumscrit.

Com el volum d'un con del mateix radi i altura és la tercera part del volum del cilindre:

$$\mathbf{V_E + V_{CO} = V_{CI}}$$

La mateixa relació val pel volum d'una zona esfèrica:

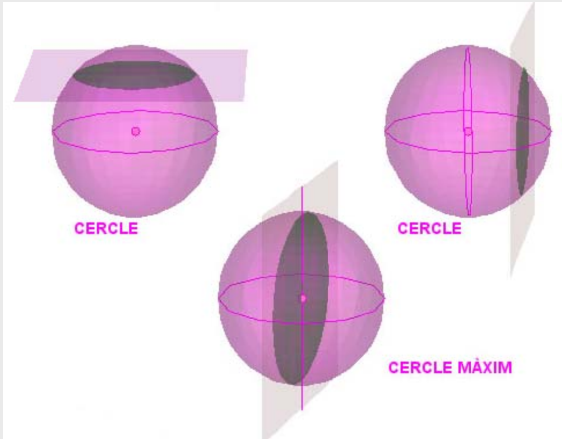
El volum d'una zona esfèrica és igual al volum del cilindre que l'envolta menys el volum del tronc de con que queda al seu interior.

$$V_{ZE}=\pi\cdot r^2\cdot h2 - V_{TCO}$$

Cercles a l'esfera

Quan un pla talla una esfera la intersecció d'ambdues figures produeix sempre un cercle. Si aquest cercle conté al centre de l'esfera es diu que és un CERCLE MÀXIM.

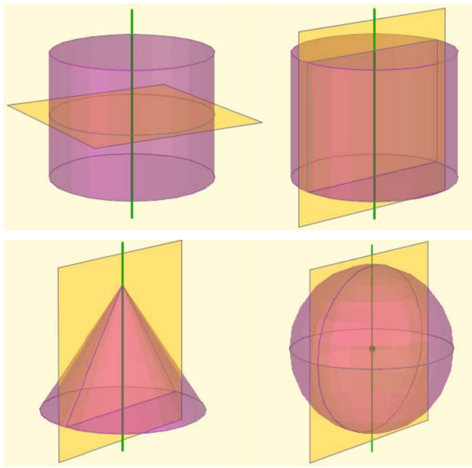
Les circumferències que limiten als cercles màxims tenen la propietat de que són els camins més curts entre dos punts qualsevol de la superfície de l'esfera.



Planos de simetría en cuerpos de revolución

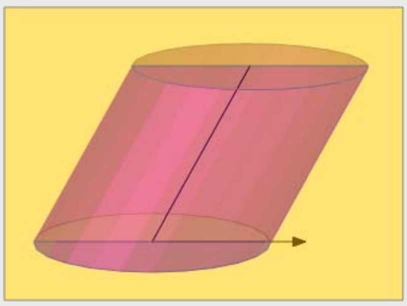
Todos los cuerpos de revolución tienen infinitos planos de simetría. Son todos los planos que contienen al eje de revolución.

- En el **cilindro**, además, hay un plano más que es el plano paralelo a las bases que pasa por el punto medio de la altura.
- En la **esfera**, adicionalmente hay una infinidad de infinitos planos de simetría ya que por su especial forma tiene infinitos ejes de revolución. Todos los planos de simetría pasan por el centro de la esfera



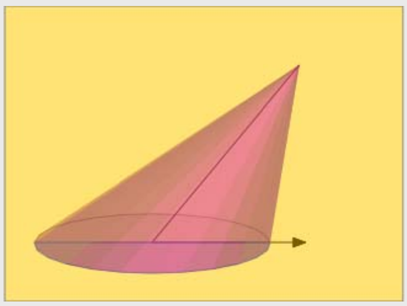
Planos de simetría en cilindros y conos oblicuos

Un cilindre és recte quan la recta que uneix els centres de les seves bases és perpendicular a elles. En qualsevol altre cas és oblic. La direcció d'inclinació és la projecció d'aquesta recta sobre una base.



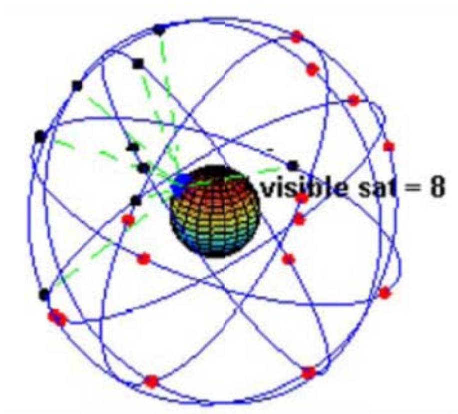
Només hi ha un pla de simetria. És perpendicular a les bases i conté la recta que passa pels seus centres.

Un con és recte quan la recta que uneix el centre de la base amb el vèrtex és perpendicular a la base. En qualsevol altre cas és oblic. La direcció d'inclinació és la projecció d'aquesta recta sobre la base.



Només hi ha un pla de simetria. És perpendicular a la base, passa pel seu centre i pel vèrtex del con.

4. L’esfera terrestre



A la imatge pots veure una representació del conjunt de satèl·lits que utilitza el Sistema de Posicionament Global (GPS) per localitzar amb precisió persones, objectes o vehicles.

Coordenades geogràfiques

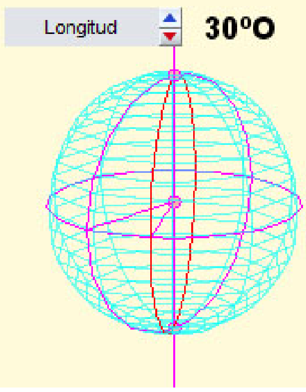
La Terra té una forma quasi esfèrica. Gira sobre una línia anomenada **eix**. Els punts en què l'eix talla a la superfície de la Terra són els **pols geogràfics**.

Els plans que contenen l'eix, tallen a la Terra en cercles màxims les vores dels quals són circumferències anomenades **meridians**.

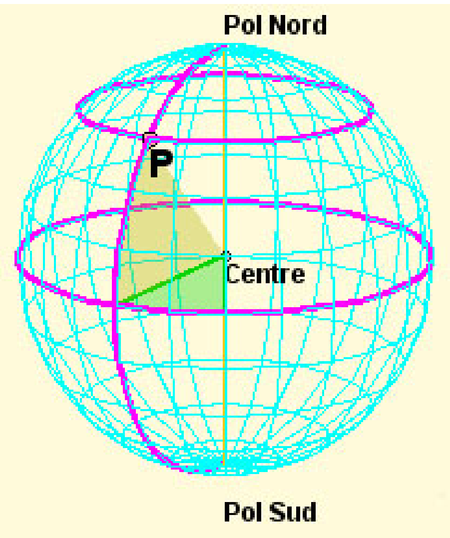
El pla perpendicular a l'eix que passa pel centre de la Terra la talla en un cercle màxim la vora del qual és l’**Equador**. Els plans paral·lels al pla de l'Equador tallen a la Terra en cercles que ja no són màxims. Les seves vores són els **paral·lels**.

- **Longitud i latitud**

Per cada punt de la Terra passa un meridià i només un. La seva distància angular respecte a un meridià de referència (Meridià 0 o deGreenwich) s´anomena **longitud**. Es mesura en graus i s'ha d'indicar si és Est (ºE) o Oest (ºO). La longitud varia entre 0º i 180º. Per exemple, Valladolid té una longitud de 5ºO.

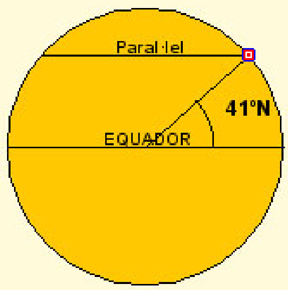


La parella de nombres (longitud, latitud) formen el que s’anomena coordenades geogràfiques d’un indret.
Aquestes coordenades determinen de forma precisa la posició sobre la Terra d’una població, un vaixell, un avió, un cotxe e inclús un telèfon mòbil.



LONGITUD: **30º O**
LATITUD: **45º N**

Per cada punt de la Terra passa un paral·lel i només un. La seva distància angular respecte a l'Equador s´anomena **latitud**.
Es mesura en graus i cal indicar si és Nord o Sud.
La latitud mínima s´obté en qualsevol punt de l'Equador i és de 0º.
La latitud màxima s'obté en els pols 90ºN y 90ºS.
Per exemple, Valladolid té una latitud de 41ºN.



EXERCICIS resolts

9. Encara que ara s'usa una definició més precisa, el metro és, aproximadament, la *deumilionèsima part del quadrant d'un meridià qualsevol*. Això significa que tots els cercles màxims sobre la Terra mesuren, aproximadament, 40.000.000 de metres (en particular, tots els meridians i l'Equador). A partir d'aquesta dada calcula la longitud del radi de la Terra, la seva superfície i el seu volum.

SOLUCIÓ:

40.000.000 m = 40.000 km. Com que la longitud d'una circumferència és $2\pi r$, tenim que

$$r = \frac{40000}{2\pi} \approx 6366 \text{ km}$$

L'àrea de la seva superfície (usant la fòrmula de l'àrea d'una esfera) és:

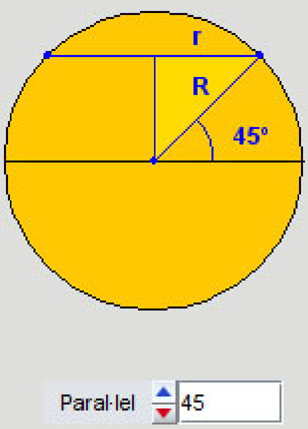
$$A = 4\cdot\pi\cdot r^2 = 4\cdot 3{,}14\cdot 6366^2 \approx 509.000.000 \text{ km}^2$$

I el seu volum és:

$$V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 6366^3}{3} \approx 1{,}08\cdot 10^{12} \text{ km}^3 \approx \text{un bilió de km}^3$$

10. Excepte l'Equador, els paral·lels no són cercles màxims i calcular la seva longitud requereix l'ús d'unes eines que no veuràs fins el curs que ve. En canvi, en alguns casos concrets i amb l'ajut del nostre vell amic, el Teorema de Pitàgores, podem fer-ho. Calcula la longitud en km del paral·lel de 45ºN.

SOLUCIÓ: R = radi de la Tierra = 6366 km



L'horitzontal superior representa el diàmetre del paral·lel 45ºN

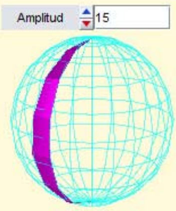
El complementari de 45º és 45º, per tant el triangle rectangle de la figura té els dos catets iguals i un d'ells és el radi del paral·lel 45º:

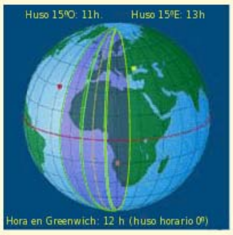
$$r^2 + r^2 = R^2, \Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{6366}{\sqrt{2}} \approx 4501 \text{ km}$$

La longitud del paral·lel 45º és doncs:

$$\text{long} = 2\cdot\pi\cdot r = 2\cdot 3{,}14\cdot 4501 \approx 28281 \text{ km}$$

Un fus esfèric és la regió de la superfície de l'esfera limitada per dos cercles màxims.
En el caso de la Terra diem FUS HORARI a un fus esfèric limitat per dos meridians.





Fusos horaris

Un **dia** és el temps que triga la Terra en girar sobre sí mateixa. Així, en qualsevol punt és ***migdia*** quan el Sol passa pel meridià del lloc. Això fa que fins i tot localitats properes tinguin hores diferents.

Per evitar aquest problema s'ha dividit la Terra en 24 zones que tenen la mateixa hora. Aquestes zones s'estableixen així: Centrat en el meridià 0º es forma un ***fus esfèric*** de 15º (360º:24h=15º). En tots els punts d'aquest fus serà migdia quan el Sol passi pel meridià 0º. A partir d'ell amb girs de 15º es formen els altres 23 **fusos horaris**. El Sol triga una hora en creuar cada fus.

EXERCICIS resolts

11. Tenim una esfera de 9 cm de radi. Calcula la superfície d'un fus esfèric sobre aquesta esfera de 62º d'amplitud.

SOLUCIÓ:

La superfície de l'esfera és $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 9^2 = 1017{,}88 \text{ cm}^2$

La superficie d'un fus esfèric de 1° de amplitud és $\frac{A}{360}$

Per tant, la superfície del nostre fus és de $\frac{A}{360} \cdot 62 = 175{,}3 \text{ cm}^2$

12. La ciutat A té una longitud de 170ºE i la ciutat B de 102ºO. Calcula l'hora que és a la ciutat B quan a la ciutat A són les 10 hores.

SOLUCIÓ:

Dividim les longituds per la amplitud d'un fus horari (15°). Si el residu és menor de 7° 30' el quocient és la diferència de fusos horaris de cada ciutat amb el meridià 0°. Si el residu és major llavors s'ha de sumar una unitat al quocient:

$170° = 15° \cdot 11 + 5°$ per tant la ciutat A està 11 fusos horaris a l' Est del merid. de Greenwic

$102° = 15° \cdot 6 + 12°$ per tant la ciutat B està 7 fusos horaris a l' Oest del merid. de Greenwic

Per tant, la diferència horària entre A i B és de -18 hores,

així a B són les 16 hores del día anterior.

5. Mapes

Projeccions de l'esfera sobre un pla

Un mapa és una representació de l'esfera terrestre sobre un pla.

Com sabem que l'esfera no és una superfície desenvolupable arribem a la conclusió que els mapes no poden ser més que representacions aproximades de la realitat i mai exactes.

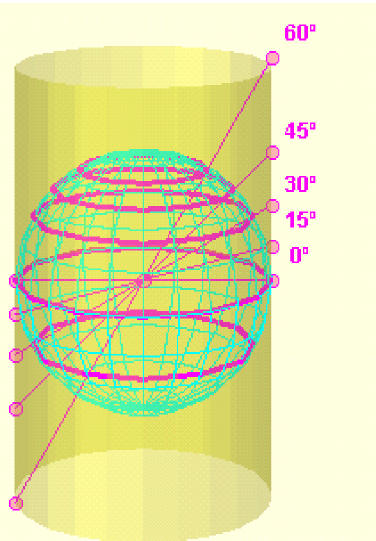
En aquest apartat anem a analitzar algunes de les tècniques emprades per construir mapes. Totes elles consisteixen en projectar els punts de l'esfera sobre un pla i totes elles tenen avantages i inconvenients.

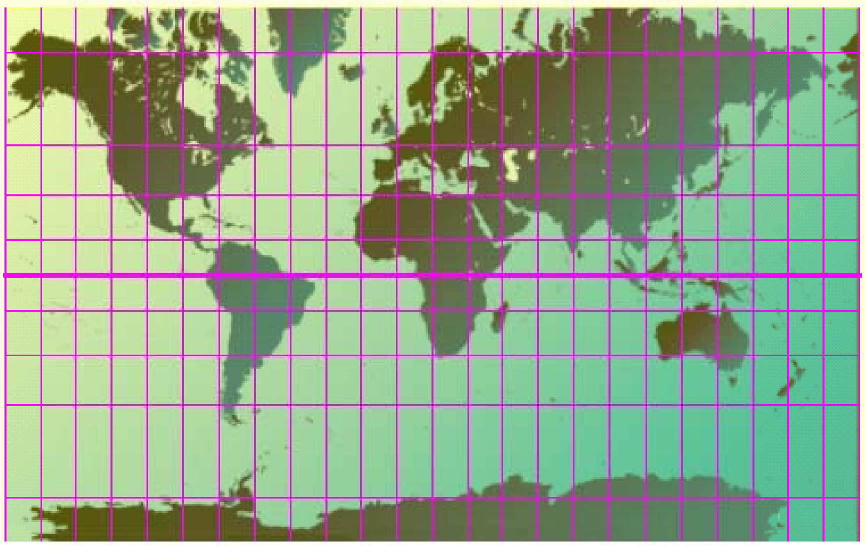
Veurem en cada cas quins són aquests avantatges i inconvenients i descriurem la seva construcció.

En l'actualitat se solen emprar tècniques més complexes per reduir els inconvenients tant com es pugui. Aquestes tècniques solen barrejar unes quantes de les descrites aquí però, malgrat tot, no aconsegueixen eliminar completament els errors.

Projecció de Mercator

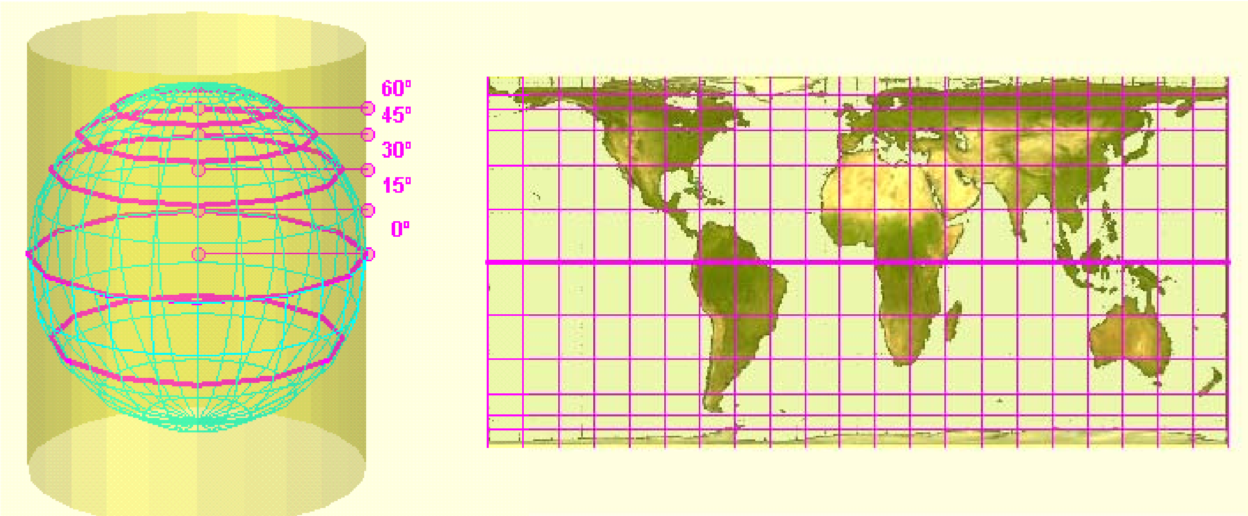
Projecció cilíndrica des del centre de la Terra, inventada per Gerardus Mercator en 1569.
Característiques: Els meridians es representen mitjançant rectes verticals separades per distàncies iguals. Els paral·lels es representen mitjançant rectes horizontals més separades a mesura que ens alllunyem de l'Equador.
Avantatges: Manté la forma real dels continents i facilita l'establiment de rumbs constants de navegació.
Inconvenients: Disminueix la seva precisió a mesura que ens allunyem de l'Equador, el que fa que la superfície dels països d'Europa i Amèrica del Nord sembli molt més gran del que és en realitat.





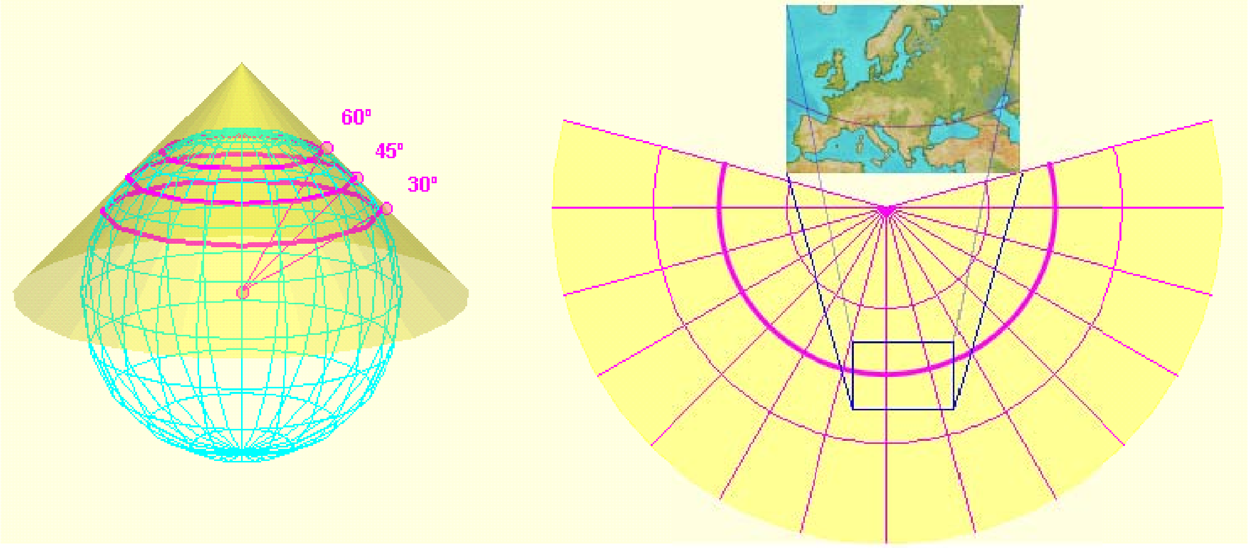
Projecció de Gall-Peters

Projecció cilíndrica des de l'infinit.
Característiques: Els meridians es representen mitjançant rectes verticals separades per distàncies iguals. Els paral·lels es representen mitjançant rectes horizontals més juntes a mesura que ens allunyem de l'Equador.
Avantatges: Aquest tipus de projecció conserva les àrees, és a dir, la superfície dels continents tal com es veu en el mapa és la correcta d'acord amb l'escala del mapa.
Inconvenients: A diferència de la projecció de Mercator, en aquest cas no es manté la forma correcta dels continents. Per mantenir les àrees, les zones properes a l'Equador es veuen més estretes i llargues de l'habitual i les zones properes als pols es veuen més amples i aplanades.



Projecció Cònica

Projecció sobre un con tangent a l'esfera al llarg d'un paral·lel.
Característiques: El mapa apareix en el desenvolupament del con. Els meridians es representen mitjançant generatrius del con separades per distàncies angulars iguals. Els paral·lels es representen mitjançant arcs de circumferència perpendiculars als meridians.
Avantatges: És molt adequat per representar mapes zonals. És molt precís a prop del paral·lel de tangència.
Inconvenients: Igual que en els casos anteriors, les distorsions augmenten en allunyar-nos del paral·lel de tangència.



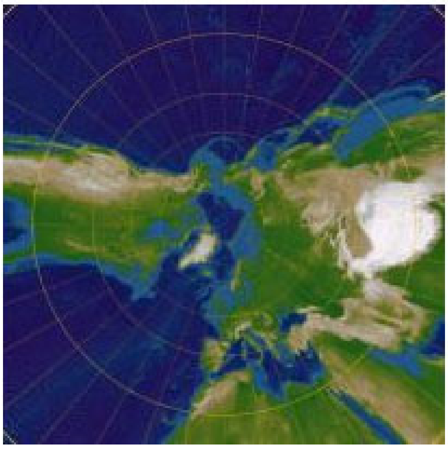
Projecció Azimutal

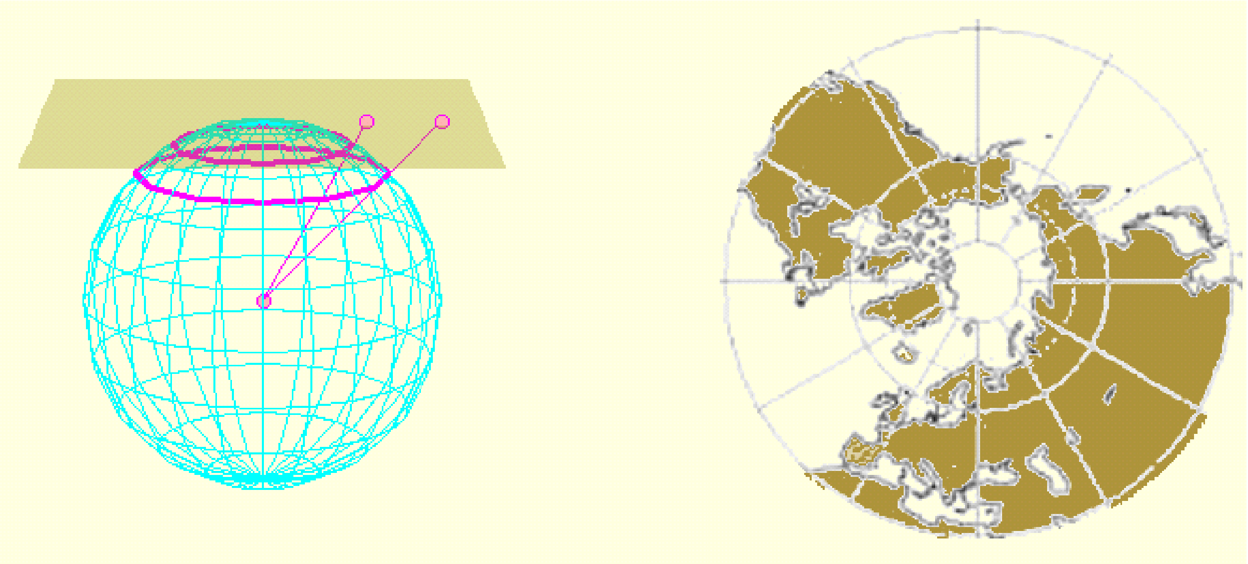
Projecció sobre un pla tangent a l'esfera en un dels pols.

Característiques: El mapa és circular. Els meridians es representen com radis del cercle separats per distàncies angulars iguals. Els paral·lels són circumferències concèntriques més separades a mida que ens allunyem del pol.

Avantatges: És molt adequat per representar mapes polars. És molt precís a prop del pol.

Inconvenients: Les distorsions augmenten en allunyar-nos del pol.





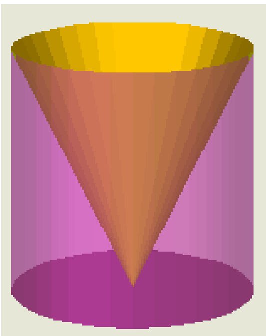
Per practicar

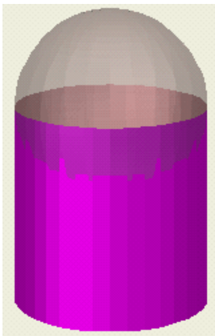
1. Calcula l'àrea total del tetraedre truncat sabent que la seva aresta mesura 12 cm.

2. Calcula l'àrea total d'un prisma recte sabent que les seves bases són rombes de diagonals D=26cm i d=14cm i la seva altura de h=26cm.

3. Calcula l'àrea lateral d'un tronc de piràmide quadrangular regular sabent que el costat de base major és B=26cm. El costat de base menor és b=14cm i l'aresta lateral és a=13cm.

4. Calcula l'àrea total del recipient de la figura esquerra sabent que el radio de la base és r=7cm i l'altura és h=13cm.

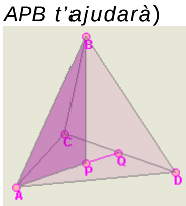




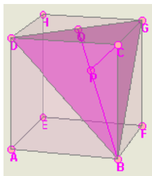
5. Quants litres de pintura es necessiten per pintar la paret exterior d'un observatori astronòmic (figura de dalt) sabent que té un radi de 5m, que l'altura del cilindre és de 9m i que amb cada litre es poden pintar 10 metres quadrats?

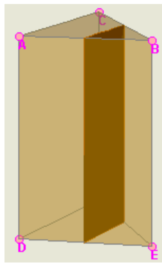
6. Una bola de Nadal de 3cm de radi es vol cobrir parcialment amb pa d'oro de forma que la franja coberta tingui una amplitud de 60º des del centre de la bola. Calcula la superfície de la bola que es pintarà.

7. Calcula el volum del tetraedre regular de la figura sabent que la seva aresta AB=10cm. (*El triangle APB t'ajudarà*)



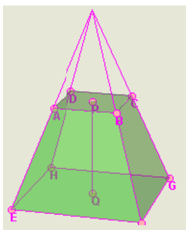
8. El cub de la figura té 10 cm d'aresta. Calcula el volum del tetraedre de vèrtexs BCDG i comprova que és la sisena part del volum del cub.

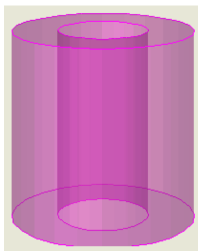




9. Calcula el volum dels dos prismes en que queda dividit el prisma regular triangular de la figura al ser tallat per un pla perpendicular a les bases que passa pels punts mitjans de las arestas. AD=20m i AC=15m.

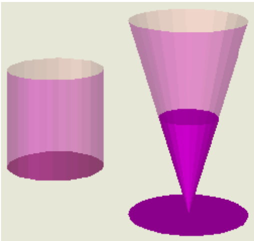
10. Calcula el volum d'un tronc de piràmide quadrangular sabent que l'aresta de la base major és EF=20cm, l'aresta de la base menor és AB=8cm i l'altura del tronc és PQ=15cm.



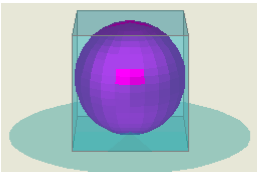


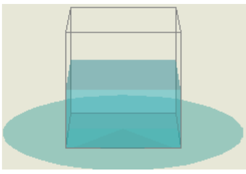
11. Calcula el volum de la peça de dalt sabent que el diàmetre de la circumferència exterior és de 10cm, el diàmetre de la circumferència interior és de 5 cm i l'altura és de 10 cm.

12. Les figures representen un vas cilíndric de 6cm de diàmetre i 8 cm d'altura i una copa amb forma de tronc de con amb 7cm de diàmetre major, 5 cm de diàmetre menor i 8 cm de generatriu. Quin té més capacitat?

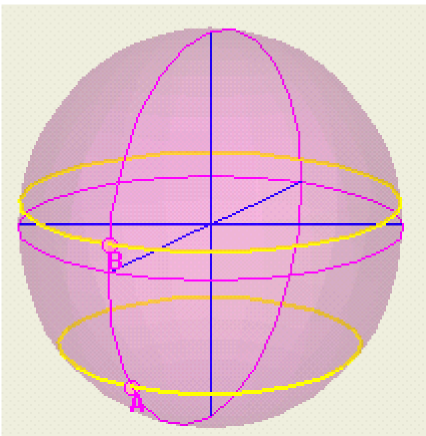


13. Un recipient cúbic de 10 cm d'aresta està ple d'aigua. S'introdueix en ell amb compte una bola de vidre de 5 cm de radi i després es treu amb compte. Calcula el volum de l'aigua que s'ha vessat i l'altura a la que queda l'aigua quan es treu la bola.

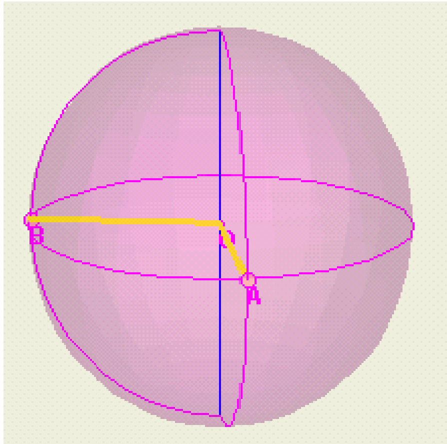




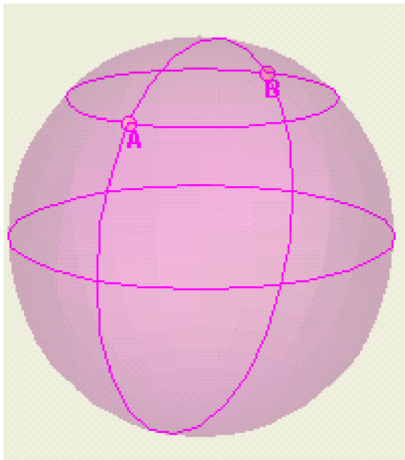
14. Calcula la distància entre dos punts de la Terra, A i B, situats al mateix meridià, si la latitud de A és de 38º 5' S i la de B és de 7º 28' N.



15. El punt A es troba en el meridià 7ºE i el punt B en el meridià 94ºO. Si a A són les 23 hores, quina hora és a B?



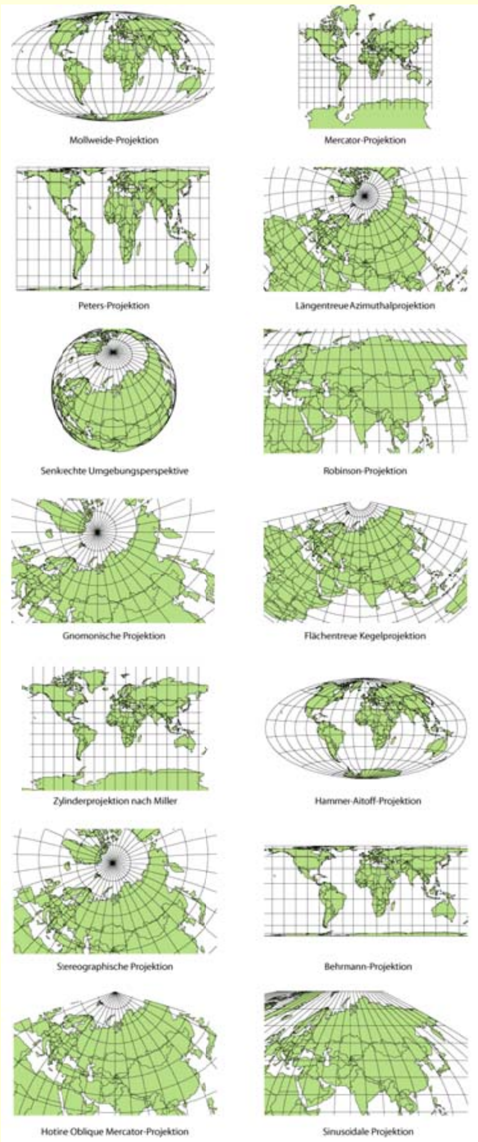
16. Els punts A i B es troben sobre el paral·lel 45ºN i les seves longituds es diferencien en 180º. Un avió ha d'anar des de A fins B, quina ruta és més curta: seguint el paral·lel o seguint el meridià pel Pol Nord?



Per saber-ne més

Altres tipus de mapa

Com hem vist hi ha diferents tipus de mapes basats en projeccions disferents de l'esfera sobre diferents tipus de superfície. Aquí et mostrem alguns altres tipus:

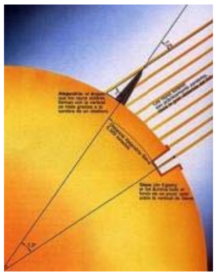


La mesura de la Terra

La mida aproximada del nostre planeta es coneix des d'antic.

En el segle III a C. Eratòstenes va calcular el radi de la Terra amb una precisió molt bona.

Sabia que les ciutats egípcies de Siena i Alexandria estaven en el mateix meridià i que el dia del solstici d'estiu la llum del Sol arribava al fons d'un pou a Siena i, el mateix dia, a Alexandria els obeliscos projectaven ombra amb un angle de 7º.



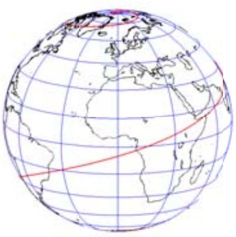
Al dibuix pots veure que l'angle de l'ombra coincideix amb la diferència de latitud entre les dues ciutats.

Eratòstenes va contractar un home per a que mesurés la distància entre ambdues ciutats que va resultar ser d'uns 800 km.

Si 7º de meridià tenen una longitud de 800 km, el meridià sencer de 360º mesurarà 800/7·360 = 41143 km, d'on el radi de la Terra seria:

$$R = 41143/(2\pi) = 6548 \text{ km.}$$

¡Una excel·lent aproximació per l'època! El radi mig real és d'uns 6400 km.



Geodèsiques i loxodromes.

Una **geodèsica** és una línia que uneix dos punts d'una superfície pel camí més curt. Sobre la Terra les geodèsiques són els cercles màxims. Una **loxodroma** és una trajectòria sobre la Terra que talla a tots els meridians amb un ángle constant. Es fan servir molt a la navegació aérea i marítima. En l'enllaç adjunt pots veure una loxodroma de 72º.

Recorda el més important

Poliedres

Regulars: Les seves cares són polígons regulars iguals i en cada vèrtex concorre el mateix nombre de cares.
Semiregulars: les cares són polígons regulars diferents i amb el mateix nombre i tipus de cares en cada vèrtex.
Prismes: les bases són polígons regulars iguals i els costats són paral·lelograms.
Piràmides: la base és un polígon regular i els costats són triangles concurrents en un vèrtex comú. Tots es poden desenvolupar.

Cossos de revolució

Cilindre: generat per un rectangle en girar al voltant d'un dels seus cotats.
Con: generat per un triangle rectangle en girar al voltant d'un dels seus catets.
El cilindre i el con són desenvolupables.
Esfera: generada per una circumferència en girar sobre un dels seus diàmetres.
L'esfera no és desenvolupable.

Àrees i volums

	A. lat.	A. total	Volum
Prismes	p·h	B+p·h	B·h
Piràmides	(p·a)/2	B+(pa)/2	(B·h)/3
Cilindres	$2\pi rh$	$2\pi r^2+2\pi rh$	πr^2h
Cons	πgr	$\pi r^2+\pi gr$	$(\pi r^2h)/3$
Esferes		$4\pi R^2$	$(4\pi R^3)/3$

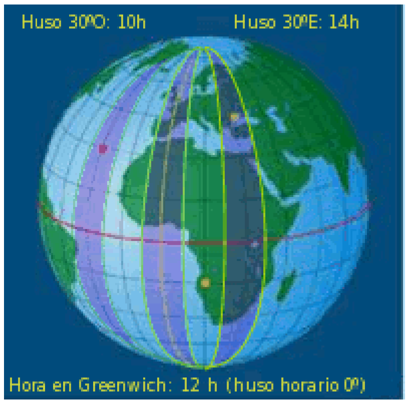
p = perímetre de la base,
B = àrea de la base,
h = altura, a = apotema (piràmide),
r = radi de la base (cons i cilindres),
R = radi (esfera), g = generatriu (con)

Poliedres:

L'àrea d'un poliedre és sempre igual a la suma de les àrees dels polígons que formen les seves cares. El volum es calcula descomponent el poliedre en prismes i/o piràmides i sumant els seus volums.

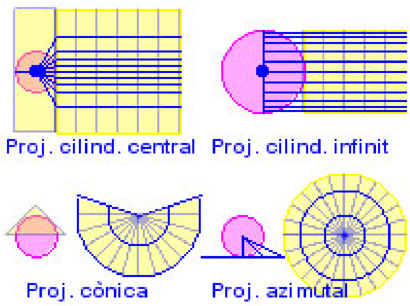
L'esfera terrestre

Meridians: cercles màxims que passen pels pols. Es numeren de 0º a 180º Est i Oest a partir del *Meridià de Greenwich*. El meridià d'un indret és la seva longitud.
Paral·lels:cercles perpendiculars a l'eix de la Terra. Es numeren de 0º a 90º Nord i Sud a partir de l'*Equador*. El paral·lel d'un indret és la seva latitud.
Fusos horaris: la Terra es divideix en 24 fusos horaris de 15º d'amplitut amb una hora de diferència entre ells.

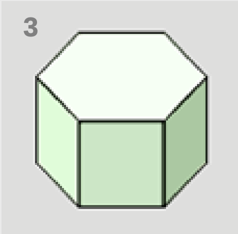


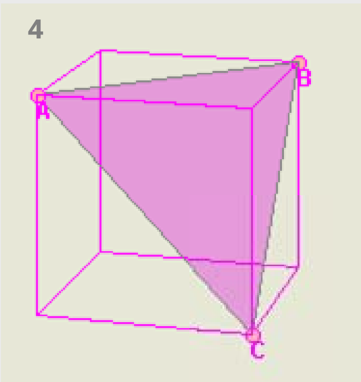
Mapes

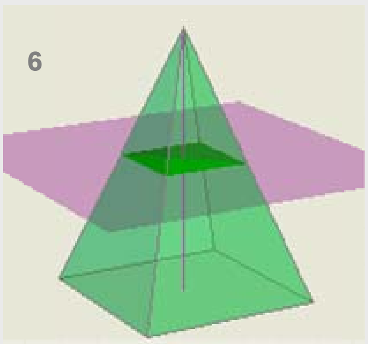
Un mapa és una representació de l'esfera terrestre sobre un plan, obtinguda mitjançant alguna forma de projecció. Les més habituals són les següents:



Autoavaluació







10

a) Mapa de Mercator
1) Els paral·lels són cercles i els meridians radis.

b) Mapa de Gall-Peters
2) Els meridians i paral·lels són rectes perpendiculars i els paral·lels estan més separats com més lluny de l'Equador.

c) Mapa azimutal
3) Els paral·lels són arcs de circumferència i els meridians són rectes convergents.

d) Mapa cònic
4) Els meridians i paral·lels són rectes perpendiculars i els paral·lels estan més junts com més lluny de l'Equador.

1. Indica quin poliedre s'obté al truncar les arestas d'un dodecaedre per la meitat i indica el nombre de cares arestes i vèrtexs que té.

2. Els catets d'un triangle rectangle mesuren 12 cm i 16 cm. Troba quin con té major àrea total: el que s'obté fent girar el triangle al voltant del primer catet o el que s'obté al girar sobre el segon.

3. Calcula l'àrea total del poliedre semiregular de la imatge sabent que la seva aresta és a. (Expressa el resultat en funció d'a)

4. Calcula l'àrea del triangle de la figura sabent que l'aresta del cub és a. (Expressa el resultat en funció d'a)

5. La "zona tropical" de la Terra està situada, aproximadament, entre els paral·lels 30º N i 30º S. Quin percentatge de la superfície de la Terra està situada en la zona tropical?

6. Una piràmide de base quadrada es talla amb un plano paral·lel a la base per la meitat de l'altura de la piràmide, obtenint una piràmide més petita i un tronc de piràmide Quantes vegades es més gran el volum del tronco amb respecte al volum de la piràmide petita?

7. Es talla una semiesfera de radi R amb un pla paral·lel a la base de la semiesfera, a una altura de 2/3 del radi. Troba el volum de la major de les dues zones en que queda dividida. (Expressa el resultat en funció de R)

8. Una milla nàutica és la distancia entre dos punts situats sobre el Equador amb una diferència de longituds de 1' ¿A quants km equival una milla nàutica si el radi de la Terra és de 6366 km?

9. Boston està al meridià 71º O i Frankfurt en el meridià 9ºE. Un avió surt de Frankfurt a las 23 hores i triga 8 hores en arribar a Boston. Quina hora és a Boston quan arriba?

10. Associa els diferents tipus de mapa amb les seves característiques.

Solucions dels exercicis per practicar

1. 1745,9 cm^2
2. 1899,54 cm^2
3. 922,6 cm^2
4. 1050,4 cm^2
5. 43,98 litres
6. 56,54 cm^2
7. 117,85 cm^3
8. 500/3 cm^3
9. El petit 162,37 m^3 i el gran 487,13 cm^3.
10. 3120 cm^3.
11. 589,04 cm^3
12. La copa té un volum de 226,49 cm^3 i el vas de 226,19 cm^3. Tenen pràcticament la mateixa capacitat.
13. S'han vessat 523, 59 cm^3 d'aigua. L'altura final de l'aigua és de 4,76 cm
14. 5061 km.
15. A B són les 17 hores.
16. Pel meridià són 10.000 km i pel paral·lel són 14.172 km.

Solucions AUTOEVALUACIÓ

1. És un icosidodecaedre amb 32 cares, 60 arestes i 30 vèrtexs.
2. El que gira sobre el primer: 576π cm^2 en front a 384π cm^2.
3. $6a^2 + 3a^2\sqrt{3}$
4. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
5. 50%
6. El tronc és 7 vegades major que la piràmide petita.
7. $\frac{46\pi R^3}{81}$
8. 1,85 km
9. És la 1 de la matinada del dia següent.
10. a2, b4, c1, d3