

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Distinguir entre magnitudes directa e inversamente proporcionais.
- Resolver distintas situacións sobre proporcionalidade directa e inversa con dúas ou máis magnitudes.
- Facer reparticións directa e inversamente proporcionais.
- Calcular porcentaxes.
- Calcular directamente aumentos e diminucións porcentuais.
- Resolver distintos exercicios sobre porcentaxes.

Antes de empezar

1. Proporción numérica.....páx. 4
Razón entre dous números
Proporción numérica
2. Proporcionalidade directa..... páx. 6
Razón de proporcionalidade
Regra de tres directa
Redución á unidade
3. Proporcionalidade inversa..... páx. 8
Razón de proporcionalidade
Regra de tres inversa
Redución á unidade
4. Proporcionalidade composta..... páx. 10
Proporcionalidade composta
5. Repartos proporcionais..... páx. 12
Directamente proporcionais
Inversamente proporcionais
6. Porcentaxes páx. 14
Tanto por cento dunha cantidade
Tanto por cento correspondente a unha proporción
7. Variacións porcentuais páx. 16
Aumentos porcentuais
Diminucións porcentuais
Encadeamento de aumentos e diminucións porcentuais.

Exercicios para practicar

Para saber máis

Resumo

Autoavaliación

Actividades para enviar ao titor

Antes de empezar



Elaborar una receita de cociña é unha actividade de magnitudes directamente proporcionais



Calcular o prezo dunha excursión é unha actividade de magnitudes inversamente proporcionais



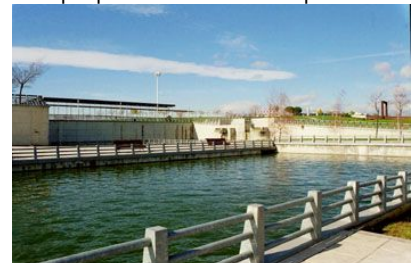
Planificar un traballo para acabalo a tempo é unha actividade de proporcionalidade composta



Repertir os beneficios dun traballo entre os realizadores é unha repartición directamente proporcional



Repertir diñeiro entre persoas segundo as súas necesidades é unha repartición inversamente proporcional



Para medir a capacidade dun encoro ou dun depósito utilízanse porcentaxes



Para calcular a subida salarial dos traballadores aplícase un aumento porcentual



As rebaixas en supermercados e comercios calcúlanse aplicando unha diminución porcentual



As variacións no prezo da vivenda exprésanse tamén mediante porcentaxes

Algunhas aplicacións: ofertas de supermercados

Continuamente vemos distintas ofertas en supermercados e comercios que intentan atraer a atención do consumidor:

- Leve 3 e pague 2.
- A segunda unidade a metade de prezo.
- Catro polo prezo de tres.
- 15% de desconto en todos os produtos.

Nesta unidade obterás os coñecementos necesarios para saber a que máis che interesa.



Proporcionalidade

1. Proporción numérica

Razón entre dous números

Lembrando o visto no curso anterior, unha **razón** entre dous números a e b é o cociente entre a e b.

$$\text{Razón entre a e b} = \frac{a}{b}.$$

Proporción numérica

Unha proporción numérica é unha igualdade entre dúas razóns numéricas.

En calquera proporción o produto dos extremos é igual ao produto dos medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

a e d chámanse **extremos**, b e c **medios**.

Na miña clase hai 18 mozas e 12 mozos. Cal é a razón entre mozas e mozos? E entre mozos e mozas?

Razón entre mozas e mozos

$$\frac{\text{mozas}}{\text{mzos}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Por cada tres mozas hai dous mozos.

Razón entre mozos e mozas

$$\frac{\text{mzos}}{\text{mzas}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Por cada dous mozos hai tres mozas.

A seguinte táboa indica a cantidade de auga rexistrada en dúas cidades A e B, nun ano completo e nun mes. Comparar as razóns da auga do mes de xaneiro e de todo o ano.

	Año	Xaneiro
Cidade A	1200	150
Cidade B	480	80

$$\text{Cidade A: } \frac{\text{xaneiro}}{\text{ano}} = \frac{150}{1200} = \frac{1}{8}$$

$$\text{Cidade B: } \frac{\text{xaneiro}}{\text{ano}} = \frac{80}{480} = \frac{1}{6}$$

As razóns obtidas para ámbalas dúas cidades son distintas, polo tanto a expresión:

$$\frac{150}{1200} = \frac{80}{480}$$

non é unha proporción.

Non se verifica que:

$$150 \cdot 480 = 1200 \cdot 80 \\ 72000 \neq 96000$$

EXERCICIOS resoltos

1. Un equipo marcou 68 goles e encaixou 44. Cal é a razón entre as dúas cantidades?

Razón entre goles marcados e goles encaixados: $\frac{68}{44} = \frac{17}{11} = 1,55$

Razón entre goles encaixados e goles marcados: $\frac{44}{68} = \frac{11}{17} = 0,65$

2. Calcular o valor de "x" para que as cantidades de auga rexistradas nun ano completo e nun mes en ámbalas dúas cidades sexan proporcionais.

	Ano	Xaneiro
Cidade A	x	150
Cidade B	480	80

$$\frac{150}{x} = \frac{80}{480} \Rightarrow 150 \cdot 480 = 80 \cdot x \Rightarrow x = \frac{150 \cdot 480}{80} = 900$$

3. Calcular o valor de "x" para que as cantidades de auga rexistradas nun ano completo e nun mes en ámbalas dúas cidades sexan proporcionais.

	Año	Xaneiro
Cidade A	1200	x
Cidade B	480	80

$$\frac{x}{1200} = \frac{80}{480} \Rightarrow x \cdot 480 = 1200 \cdot 80 \Rightarrow x = \frac{1200 \cdot 80}{480} = 200$$

4. Calcular o valor de "x" para que as cantidades de auga rexistradas nun ano completo e nun mes en ámbalas dúas cidades sexan proporcionais.

	Ano	Xaneiro
Cidade A	1200	150
Cidade B	x	80

$$\frac{150}{1200} = \frac{80}{x} \Rightarrow 150 \cdot x = 1200 \cdot 80 \Rightarrow x = \frac{1200 \cdot 80}{150} = 640$$

5. Calcular o valor de "x" para que as cantidades de auga rexistradas nun ano completo e nun mes en ámbalas dúas cidades sexan proporcionais.

	Ano	Xaneiro
Cidade A	1200	150
Cidade B	480	x

$$\frac{150}{1200} = \frac{x}{480} \Rightarrow 150 \cdot 480 = 1200 \cdot x \Rightarrow x = \frac{150 \cdot 480}{1200} = 60$$

Proporcionalidade

2. Proporcionalidade directa

Constante de proporcionalidade

Dúas magnitudes son **directamente proporcionais** se ao multiplicar (ou dividir) unha delas por un número, a outra queda multiplicada (ou dividida) polo mesmo número.

Se a un valor m_1 da primeira magnitude lle corresponde un valor m_2 da segunda magnitude, pódese comprobar que o cociente ou razón entre estes dous valores é sempre constante. A esta cantidade chámase **constante ou razón de proporcionalidade directa**.

$$\text{Razón de proporcionalidade: } r = \frac{m_2}{m_1}.$$

Regra de tres directa

Unha forma moi fácil de resolver unha actividade de proporcionalidade directa é un procedemento chamado **regra de tres**.

Consiste en aproveitar a razón ou constante de proporcionalidade directa para calcular o cuarto termo.

Redución á unidade

Sen embargo a regra de tres convértese nun procedemento mecánico, que aínda que permite resolver de forma fácil calquera actividade, non se razoa de forma conveniente a súa resolución.

Outro procedemento que podemos chamar de **redución á unidade**, consiste en calcular o valor da segunda magnitude correspondente á unidade da primeira. Este valor é o que chamamos anteriormente constante de proporcionalidade directa. A partir de aquí é máis fácil calcular o valor final da segunda magnitude.

Se 1 quilogramo de mazás vale 1,80 euros, cal será o prezo da merca segundo o peso?

Número de quilos	Prezo	Razón de proporcional.
1	1,80	$1,80/1=1,80$
2	3,60	$3,60/2=1,80$
3	5,40	$5,40/3=1,80$
4	7,20	$7,20/4=1,80$
5	9,00	$9,00/5=1,80$

Ao dividir calquera valor da segunda magnitude polo valor da primeira magnitude obtense o mesmo cociente.

Si 8 quilos de mazás valen 10,40 euros, canto custarán 13 quilos?

Regra de tres directa

1ª magnitude Nº quilos	2ª magnitude euros
8	10,40
13	x

$$\frac{10,40}{8} = \frac{x}{13} \Rightarrow x = \frac{10,40 \cdot 13}{8} = 16,90$$

Solución: **16.90 euros.**

Si 8 quilos de mazás valen 10,40 euros, canto custarán 13 quilos?

Redución á unidade

1ª magnitude Nº quilos	2ª magnitude euros
8	10,40
↓ : 8	↓ : 8
1	1,30
↓ x 13	↓ x 13
13	16,90

Solución: **16.90 euros.**

EXERCICIOS resoltos

6. Un coche dou 60 voltas a un circuíto en 105 minutos. Calcula o tempo que tardará en percorrer no mesmo circuíto 40 voltas.

Regra de tres directa

1ª magnitude Nº voltas	2ª magnitude minutos
60 -----	105
40 -----	x
$\frac{105}{60} = \frac{x}{40} \Rightarrow x = \frac{105 \cdot 40}{60} = 70$	

Solución: 70 minutos.

Redución á unidade

1ª magnitude Nº voltas	2ª magnitude minutos
60 -----	105
↓ : 60	↓ : 60
1 -----	1,75
↓ x 40	↓ x 40
40 -----	70

Solución: 70 minutos.

7. Se 12 bólas de aceiro iguais teñen un peso de 7200 gramos, canto pesarán 50 bólas iguais ás anteriores?

Regra de tres directa

1ª magnitude Nº bólas	2ª magnitude gramos
12 -----	7200
50 -----	x
$\frac{7200}{12} = \frac{x}{50} \Rightarrow x = \frac{7200 \cdot 50}{12} = 30000$	

Solución: 30000 gramos = 30 kg.

Redución á unidade

1ª magnitude Nº bólas	2ª magnitude gramos
12 -----	7200
↓ : 12	↓ : 12
1 -----	600
↓ x 50	↓ x 50
50 -----	30000

Solución: 30000 gramos = 30 kg.

8. A certa hora do día un pau de 1,5 metros de longo proxecta unha sombra de 60 centímetros. Canto mide unha árbore que á mesma hora proxecta unha sombra de 2,40 metros?

Regra de tres directa

1ª magnitude sombra m.	2ª magnitude altura m.
0,60 -----	1,5
2,40 -----	x
$\frac{1,5}{0,60} = \frac{x}{2,40} \Rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 2,40}{0,60} = 6$	

Solución: 6 metros.

Redución á unidade

1ª magnitude sombra m.	2ª magnitude altura m.
0,60 -----	1,5
↓ : 0,60	↓ : 0,60
1 -----	2,5
↓ x 2,40	↓ x 2,40
2,40 -----	6

Solución: 6 metros.

Proporcionalidade

3. Proporcionalidade inversa

Constante de proporcionalidade

Dúas magnitudes son **inversamente proporcionais** se ao multiplicar (ou dividir) unha delas por un número, a outra queda dividida (ou multiplicada) polo mesmo número.

Se a un valor m_1 da primeira magnitude lle corresponde un valor m_2 da segunda magnitude, pódese comprobar que o produto destes dous valores é sempre constante. A este produto chámasele **constante de proporcionalidade inversa**.

Razón de proporcionalidade: $m_1 \cdot m_2$.

Regra de tres inversa

Unha forma moi fácil de resolver unha actividade de proporcionalidade inversa é un procedemento chamado regra de tres.

Consiste en aproveitar a constante de proporcionalidade inversa para calcular el cuarto termo.

Redución á unidade

Sen embargo a regra de tres convértese nun procedemento mecánico, que aínda permite resolver de forma fácil calquera actividade, non se razoa de forma conveniente a súa resolución.

Outro procedemento que podemos chamar de redución á unidade, consiste en calcular o valor da segunda magnitude correspondente á unidade da primeira. Este valor é o que lle chamamos anteriormente constante de proporcionalidade inversa. A partir de aquí é máis fácil calcular o valor final da segunda magnitude.

Unha alumna merca un agasallo de 72 € para unha compañeira da clase. Canto terán que pagar segundo o número de compañeiros que participen?

Nº de persoas	Prezo	Constante de proporcional.
1	72	$1 \cdot 72 = 72$
2	36	$2 \cdot 36 = 72$
3	24	$3 \cdot 24 = 72$
4	18	$4 \cdot 18 = 72$
5	14,40	$5 \cdot 14,40 = 72$

Ao multiplicar os valores correspondentes ás dúas magnitudes obtense o mesmo produto.

18 alumnos pagaron 6 € cada un para mercar un regalo a unha compañeira, canto terá que pagar cada un se ao final participan 24 alumnos?

Regra de tres directa

1ª magnitude **2ª magnitude**
Nº persoas euros

18 ----- 6

24 ----- x

$$18 \cdot 6 = 24 \cdot x \Rightarrow x = \frac{18 \cdot 6}{24} = 4,50$$

Solución: **4,50 euros.**

18 alumnos pagaron 6 euros cada un para mercar un regalo a unha compañeira, canto terá que pagar cada un si ao final participan 24 alumnos?

Redución á unidade

1ª magnitude **2ª magnitude**
Nº persoas euros

18 ----- 6

↓ : 18 ↓ x 18

1 ----- 108

↓ x 24 ↓ : 24

24 ----- 4,50

Solución: **4,50 euros.**

EXERCICIOS resoltos

9. Un coche circulando a 90 km/h tardou 12 horas en realizar unha viaxe. Canto tempo tardará no mesmo traxecto a unha velocidade de 80 km/h?

Regra de tres inversa

1ª magnitude Km/h	2ª magnitude horas
90 -----	12
80 -----	x

$$90 \cdot 12 = 80 \cdot x \Rightarrow x = \frac{90 \cdot 12}{80} = 13,5$$

Solución: 13,5 horas.

Redución á unidade

1ª magnitude Km/h	2ª magnitude horas
90 -----	12
↓ : 90	↓ x 90
1 -----	1080
↓ x 80	↓ : 80
80 -----	13,5

Solución: 13,5 horas.

10. Seis fotocopiadoras tardan 6 horas en realizar un gran número de copias, canto tempo tardarían 4 fotocopiadoras en realizar o mesmo traballo?

Regra de tres inversa

1ª magnitude fotocopiadoras	2ª magnitude horas
6 -----	6
4 -----	x

$$6 \cdot 6 = 4 \cdot x \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 6}{4} = 9$$

Solución: 9 horas.

Redución á unidade

1ª magnitude fotocopiadoras	2ª magnitude horas
6 -----	6
↓ : 6	↓ x 6
1 -----	36
↓ x 4	↓ : 80
4 -----	9

Solución: 9 horas.

11. Ao repartir unha cantidade de euros entre 7 persoas cada unha recibe 12 euros. Canto recibirían se o reparto se fixese entre 6 persoas?

Regra de tres inversa

1ª magnitude persoas	2ª magnitude euros
7 -----	12
6 -----	x

$$7 \cdot 12 = 6 \cdot x \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 12}{6} = 14$$

Solución: 14 euros.

Redución á unidade

1ª magnitude persoas	2ª magnitude euros
7 -----	12
↓ : 7	↓ x 7
1 -----	84
↓ x 6	↓ : 6
6 -----	14

Solución: 14 euros.

4. Proporcionalidade composta

Proporcionalidade composta

Unha actividade de proporcionalidade composta relaciona máis de dúas magnitudes que poden ser directa ou inversamente proporcionais.

Para resolver unha actividade de proporcionalidade composta faise de forma ordenada co procedemento de redución á unidade.

Tres motores iguais funcionando 6 horas necesitan 9000 litros de auga para refrixerarse. Cantos litros de auga necesitarán 5 motores funcionando 8 horas?

1 ^a magnitude motores	-----	2 ^a magnitude horas	-----	3 ^a magnitude litros
3	-----	6	-----	9000
↓ : 3		↓		↓ : 3
1	-----	6	-----	3000
↓ x 5		↓		↓ x 5
5	-----	6	-----	15000
↓		↓ : 6		↓ : 6
5	-----	1	-----	2500
↓		↓ x 8		↓ x 8
5	-----	8	-----	20000

Solución: 20000 litros de auga.

Procedemento de resolución:

En primeiro lugar déixase fixa a segunda magnitude e relaciónase a primeira coa terceira.

En segundo lugar déixase fixa a primeira magnitude e relaciónase a segunda coa terceira.

- 1^a magnitude: número de motores.
- 2^a magnitude: número de horas.
- 3^a magnitude: número de litros.

Déixase fixa a segunda magnitude.

A primeira e a terceira magnitude son directamente proporcionais. Máis motores necesitarán máis litros de auga para refrixerarse.

Déixase fixa a primeira magnitude.

A segunda e a terceira magnitude son directamente proporcionais. Se funcionan durante máis horas necesitarán máis litros de auga para refrixerarse.

Tres obreiros traballando 8 horas diarias realizan un traballo en 15 días. Cantos días tardarán en facer o traballo 5 obreiros traballando 9 horas?

1 ^a magnitude obreiros	-----	2 ^a magnitude horas	-----	3 ^a magnitude días
3	-----	8	-----	15
↓ : 3		↓		↓ x 3
1	-----	8	-----	45
↓ x 5		↓		↓ : 5
5	-----	8	-----	9
↓		↓ : 8		↓ x 8
5	-----	1	-----	72
↓		↓ x 9		↓ : 9
5	-----	9	-----	8

Solución: 8 días.

- 1^a magnitude: número de obreiros.
- 2^a magnitude: número de horas.
- 3^a magnitude: número de días.

Déixase fixa a segunda magnitude.

A primeira e a terceira magnitude son inversamente proporcionais. Máis obreiros tardarán menos días en realizar o traballo.

Déixase fixa a primeira magnitude.

A segunda e a terceira magnitude son inversamente proporcionais. Se traballan máis horas diarias tardarán menos días en realizar o traballo.

EXERCICIOS resoltos

12. Tres billas enchen un depósito de 10 m^3 en 5 horas. Canto tardarán en encher un depósito de 8 m^3 dúas billas iguais as anteriores?

A primeira e a terceira magnitude son inversamente proporcionais. Máis billas tardarán menos tempo en encher o depósito.

A segunda e a terceira magnitude son directamente proporcionais. Se o depósito é máis grande tardarase máis tempo en enchelo.

1ª magnitude billas	2ª magnitude metros cúbicos	3ª magnitude horas
3 -----	10 -----	5
↓ : 3	↓	↓ x 3
1 -----	10 -----	15
↓ x 2	↓	↓ : 2
2 -----	10 -----	7,5
↓	↓ : 10	↓ : 10
2 -----	1 -----	0,75
↓	↓ x 8	↓ x 8
2 -----	8 -----	6

Solución: 6 horas.

13. Con 12 quilos de penso 9 coellos comen durante 6 días. Cantos días tardarán 4 coellos en comerse 8 quilos de penso?

A primeira e a terceira magnitude son directamente proporcionais. Máis quilos de penso supón alimento para máis días.

A segunda e a terceira magnitude son inversamente proporcionais. Máis coellos comendo tardarán menos días en comerse o penso.

1ª magnitude quilos de penso	2ª magnitude coellos	3ª magnitude días
12 -----	9 -----	6
↓ : 12	↓	↓ : 12
1 -----	9 -----	0,5
↓ x 8	↓	↓ x 8
8 -----	9 -----	6
↓	↓ : 9	↓ x 9
8 -----	1 -----	36
↓	↓ x 4	↓ : 4
8 -----	4 -----	9

Solución: 9 días.

5. Reparticións proporcionais

Directamente proporcionais

Vaise repartir unha cantidade en varias partes cunhas condicións determinadas.

Cada unha das partes debe recibir unha cantidade directamente proporcional a uns valores iniciais.

A maior valor inicial dunha parte corresponderalle maior cantidade no reparto.

1. En primeiro lugar hai que sumar os valores iniciais de cada unha das partes.
2. A continuación divídese a cantidade a repartir entre a suma obtida.
3. Por último multiplícase o cociente obtido polos valores iniciais de cada unha das partes.

Inversamente proporcionais

Vaise repartir unha cantidade en varias partes cunhas condicións determinadas.

Cada unha das partes debe recibir unha cantidade inversamente proporcional a uns valores iniciais.

A maior valor inicial dunha parte corresponderalle menor cantidade no reparto.

Facer unha repartición inversamente proporcional a uns valores iniciais é igual que facer unha repartición directamente proporcional aos inversos de ditos valores iniciais.

1. En primeiro lugar calcúlanse os inversos dos valores iniciais de cada unha das partes.
2. Despois hai que sumar os inversos dos valores iniciais que se calcularon.
3. A continuación divídese a cantidade a repartir entre a suma obtida.
4. Por último multiplícase o cociente obtido polos inversos dos valores iniciais de cada unha das partes.

Dúas amigas xuntan 1,20 e 1,80 euros que tiñan para mercar un paquete de adhesivos dunha serie de debuxos animados. O paquete contén 120 adhesivos. Como deben repartilas de forma xusta?

1. Súmanse os valores iniciais:

$$1,20 + 1,80 = 3$$

2. Divídese 120 entre 3

$$120 : 3 = 40$$

3. Multiplícanse os valores iniciais por 40.

$$1,20 \cdot 40 = \mathbf{48 \text{ adhesivos}}$$

$$1,80 \cdot 40 = \mathbf{72 \text{ adhesivos}}$$

Comprobación:

$$48 + 72 = 120$$

Os dous camareiros dun bar repártense un bote con 136 euros de propina de forma inversamente proporcional ao número de días que faltaron, que foron respectivamente 3 e 5 días. Canto corresponde a cada un?

1. Súmanse os inversos dos valores iniciais:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$

2. Divídese 136 entre 8/15

$$136 : \frac{8}{15} = \frac{2040}{8} = 255$$

3. Multiplícanse os inversos dos valores iniciais por 255.

$$255 \cdot \frac{1}{3} = 85 \quad 255 \cdot \frac{1}{5} = 51$$

Comprobación:

$$85 + 51 = 136$$

EXERCICIOS resoltos

14. Por unha reportaxe fotográfica tres fotógrafos cobraron 6720 euros. Da reportaxe, 14 fotos eran do primeiro fotógrafo, 18 do segundo e 24 do terceiro. Que cantidade de euros lle corresponde a cada un?

1. Súmanse os valores iniciais: $14 + 18 + 24 = 56$

2. Divídese 6720 entre 56: $6720 : 56 = 120$

3. Multiplícanse os valores iniciais por 120.

$120 \cdot 14 = 1680 \text{ euros}$

$120 \cdot 18 = 2160 \text{ euros}$

$120 \cdot 24 = 2880 \text{ euros}$

15. Repartir 540 caramelos entre catro nenos de forma directamente proporcional ás idades de cada un deles, que son 3, 4, 5 e 6 anos.

1. Súmanse os valores iniciais: $3 + 4 + 5 + 6 = 18$

2. Divídese 540 entre 18: $540 : 18 = 30$

3. Multiplícanse os valores iniciais por 30.

$30 \cdot 3 = 90 \text{ caramelos}$

$30 \cdot 4 = 120 \text{ caramelos}$

$30 \cdot 5 = 150 \text{ caramelos}$

$30 \cdot 6 = 180 \text{ caramelos}$

16. Segundo un testamento unha fortuna de 65000 euros repátese entre tres persoas en partes inversamente proporcionais ao soldo de cada unha que é 900, 1350 e 1800 euros. Canto corresponde a cada unha?

1. Súmanse os inversos dos valores iniciais: $\frac{1}{900} + \frac{1}{1350} + \frac{1}{1800} = \frac{13}{5400}$

2. Divídese 65000 entre 13/5400: $65000 : \frac{13}{5400} = 27000000$

3. Multiplícanse os inversos dos valores iniciais por 27000000.

$27000000 \cdot \frac{1}{900} = 30000 \quad ; \quad 27000000 \cdot \frac{1}{1350} = 20000 \quad ; \quad 27000000 \cdot \frac{1}{1800} = 15000$

17. Repartir 114 caramelos entre catro nenos de forma inversamente proporcional ás idades de cada un deles, que son 3, 4, 5 e 6 años.

1. Súmanse os inversos dos valores iniciais: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20}$

2. Divídese 114 entre 19/20: $114 : \frac{19}{20} = 120$

3. Multiplícanse os inversos dos valores iniciais por 120.

$120 \cdot \frac{1}{3} = 40 \quad ; \quad 120 \cdot \frac{1}{4} = 30 \quad ; \quad 120 \cdot \frac{1}{5} = 24 \quad ; \quad 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$

6. Porcentaxes

Tanto por cento dunha cantidade

Calcular o $r\%$ dunha cantidade C equivale a resolver unha actividade de magnitudes directamente proporcionais: "Se ao valor 100 da primeira magnitude lle corresponde o valor C da segunda, entón ao valor r da primeira magnitude correspóndelle o valor buscado $r\%$ de C ".

$$\begin{array}{r} 100 \text{ ----- } C \\ r \text{ ----- } r\% \text{ de } C \end{array}$$

Con todo ao desenvolver este procedemento pódese comprobar que para calcular o $r\%$ de C multiplícase C por r e divídese por 100.

$$r\% \text{ de } C = \frac{r \cdot C}{100}$$

Tanto por cento correspondente a unha proporción

Calcular a $\%$ que representa unha cantidade P dun total C equivale a resolver unha actividade de magnitudes directamente proporcionais: "Se ao valor C da primeira magnitude lle corresponde o valor 100 da segunda, entón ao valor P da primeira magnitude correspóndelle a porcentaxe buscada.

$$\begin{array}{r} C \text{ ----- } 100 \\ P \text{ ----- } ? \end{array}$$

Con todo ao desenvolver este procedemento pódese comprobar que para calcular a $\%$ divídese P por C e multiplícase por 100.

$$\frac{P}{C} \cdot 100\%$$

A capacidade dun encoro é de 53 Hm^3 . Cantos litros de auga ten se está cheo nun 15% ?

Regra de tres directa

$$\begin{array}{r} 1^{\text{a}} \text{ magnitude} \quad 2^{\text{a}} \text{ magnitude} \\ \text{Porcentaxe} \quad \quad \text{Hm}^3 \\ 100 \text{ ----- } 53 \\ 15 \text{ ----- } x \end{array}$$

$$\frac{53}{100} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{53 \cdot 15}{100} = 7,95$$

$$\text{Solución: } 7,95 \text{ Hm}^3 = \\ = 795000000 \text{ litros}$$

Directamente:

$$15\% \text{ de } 53 = \frac{15 \cdot 53}{100} = 7,95$$

Na miña clase hai 32 estudantes. Se hai 20 alumnas, que porcentaxe do total representan as alumnas e os alumnos?

Regra de tres directa

$$\begin{array}{r} 1^{\text{a}} \text{ magnitude} \quad 2^{\text{a}} \text{ magnitude} \\ \text{Estudantes} \quad \quad \text{Porcentaxe} \\ 32 \text{ ----- } 100 \\ 20 \text{ ----- } x \end{array}$$

$$\frac{100}{32} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 20}{32} = 62,5$$

Directamente:

$$\frac{20}{32} \cdot 100 = 62,5\%$$

Solución:

Alumnas: 20 de 32 \rightarrow 62,5 %
Alumnos: 12 de 32 \rightarrow 37,5 %

EXERCICIOS resoltos

18. a) Calcular o 32 % de 125. b) Calcular o 78 % de 4960.

$$32\% \text{ de } 125 = \frac{32 \cdot 125}{100} = 125 \cdot 0,32 = 40$$

$$78\% \text{ de } 4960 = \frac{78 \cdot 4960}{100} = 4960 \cdot 0,78 = 3868,8$$

19. a) Que porcentaxe representa 396 dun total de 600?
b) Que porcentaxe representa 3576 dun total de 4622?

$$\frac{396}{600} \cdot 100 = 66\%$$

$$\frac{3576}{4622} \cdot 100 = 77,37\%$$

20. a) O 83 % dunha cantidade é 9130. Calcular dita cantidade.
b) O 12 % dunha cantidade é 8,4. Calcular dita cantidade.

$$C \cdot 0,83 = 9130 \Rightarrow C = \frac{9130}{0,83} = 11000$$

$$C \cdot 0,12 = 8,4 \Rightarrow C = \frac{8,4}{0,12} = 70$$

21. O censo electoral dunha poboación é de 24600 persoas. Nunhas eleccións un partido político obtivo o 42,5 % dos votos. Cantas persoas o votaron?

$$42,5\% \text{ de } 24600 = \frac{42,5 \cdot 24600}{100} = 24600 \cdot 0,425 = 10455 \text{ persoas}$$

22. Unha máquina fabrica ao día 450 pezas das que 18 presentan algún defecto e refúganse. Que porcentaxe de pezas defectuosas fabrica a máquina?

$$\frac{18}{450} \cdot 100 = 4\%$$

23. O 34% das persoas asistentes a un congreso son españois. Sabendo que hai 85 españois, cantas persoas asisten ao congreso?

$$C \cdot 0,34 = 85 \Rightarrow C = \frac{85}{0,34} = 250$$

7. Variacións porcentuais

Aumentos porcentuais

Para aumentar unha cantidade C , un r %, calcúlase o r % de C e súmase o resultado á cantidade C .

Tamén se pode calcular directamente. Para elo calcúlase o aumento que corresponde a unha unidade, chamado **índice de variación**:

$$\text{Índice de variación: } I.V. = 1 + \frac{r}{100}$$

Para calcular o aumento que corresponde a unha cantidade inicial C , bastará multiplicar C polo índice de variación.

Diminucións porcentuais

Para diminuír unha cantidade C , un r %, calcúlase o r % de C e réstase o resultado á cantidade C .

Tamén se pode calcular directamente. Para elo calcúlase a diminución que corresponde a unha unidade, chamada **índice de variación**:

$$\text{Índice de variación: } I.V. = 1 - \frac{r}{100}$$

Para calcular o aumento que corresponde a unha cantidade inicial C , bastará multiplicar C polo índice de variación.

Encadeamento de aumentos e diminucións porcentuais

Trátase agora de aplicar de forma consecutiva dous ou máis aumentos ou diminucións porcentuais a unha cantidade.

O primeiro aumento ou diminución aplicarase á cantidade inicial e o segundo á cantidade resultante despois da primeira variación.

O prezo dunha bicicleta era de 240 euros. A este prezo hai que engadirle o 16% de I.V.E. Cal é o prezo final?

Paso a paso:

$$16\% \text{ de } 240 = \frac{16 \cdot 240}{100} = 38,40$$

$$240 + 38,40 = \mathbf{278,40 \text{ euros}}$$

Directamente:

$$I.V. = 1 + \frac{16}{100} = 1 + 0,16 = 1,16$$

$$240 \cdot 1,16 = \mathbf{278,40 \text{ euros}}$$

Solución: 278,40 euros

O prezo dun ordenador era de 1200 euros, pero fixéronme un 15% de desconto. Cal é o prezo final?

Paso a paso:

$$15\% \text{ de } 1200 = \frac{15 \cdot 1200}{100} = 180$$

$$1200 - 180 = \mathbf{1020 \text{ euros}}$$

Directamente:

$$I.V. = 1 - \frac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$$

$$1200 \cdot 0,85 = \mathbf{1020 \text{ euros}}$$

Solución: 1020 euros

Para aplicar un encadeamento de aumentos e diminucións porcentuais calcúlase o índice de variación de cada variación porcentual. **A cantidade final calcúlase multiplicando a cantidade inicial polos índices de variación:**

$$\mathbf{CF = CI \cdot IV1 \cdot IV2}$$

EXERCICIOS resoltos

24. Ao subir o prezo dunha bicicleta un 20%, o prezo final é agora de 360 euros. Cal era o prezo inicial?

$$\text{Índice de variación: } I.V. = 1 + \frac{20}{100} = 1 + 0,20 = 1,20$$

$$C.I. \cdot I.V. = C.F. \Rightarrow C.I. \cdot 1,20 = 360 \Rightarrow C.I. = \frac{360}{1,20} = 300 \text{ euros}$$

25. Ao aumentar o prezo dunha bicicleta pasou de 450 a 504 euros. Que tanto por cento subiu?

$$C.I. \cdot I.V. = C.F. \Rightarrow 450 \cdot I.V. = 504 \Rightarrow I.V. = \frac{504}{450} = 1,12 = 1 + \frac{12}{100} \Rightarrow 12\%$$

26. Despois de rebaixar o prezo dun ordenador un 8%, custoume 1196 euros. Cal era o seu prezo inicial?

$$\text{Índice de variación: } I.V. = 1 - \frac{8}{100} = 1 - 0,08 = 0,92$$

$$C.I. \cdot I.V. = C.F. \Rightarrow C.I. \cdot 0,92 = 1196 \Rightarrow C.I. = \frac{1196}{0,92} = 1300 \text{ euros}$$

27. Ao rebaixar o prezo dun ordenador pasou de 1100 euros a 957 euros. Que tanto por cento baixou?

$$C.I. \cdot I.V. = C.F. \Rightarrow 1100 \cdot I.V. = 957 \Rightarrow I.V. = \frac{957}{1100} = 0,87 = 1 - \frac{13}{100} \Rightarrow 13\%$$

28. Un xoguete vale nunha xoguetería 40 euros. Durante as festas de Nadal sube un 22% e unha vez que as festas pasaron, baixa un 9%. Calcular o seu prezo final.

$$\text{Aumento do 22\%: } \text{Índice de variación: } I.V.1 = 1 + \frac{22}{100} = 1 + 0,22 = 1,22$$

$$\text{Diminución do 9\%: } \text{Índice de variación: } I.V.2 = 1 - \frac{9}{100} = 1 - 0,09 = 0,91$$

$$C.F. = C.I. \cdot I.V.1 \cdot I.V.2 = 40 \cdot 1,22 \cdot 0,91 = 44,41 \text{ euros}$$

29. O prezo dun móbil era de 420 euros. Rebaixáronme un 16%, pero despois cargaron o 16% de I.V.E. Canto me custou?

$$\text{Diminución do 16\%: } \text{Índice de variación: } I.V.1 = 1 - \frac{16}{100} = 1 - 0,16 = 0,84$$

$$\text{Aumento do 16\%: } \text{Índice de variación: } I.V.2 = 1 + \frac{16}{100} = 1 + 0,16 = 1,16$$

$$C.F. = C.I. \cdot I.V.1 \cdot I.V.2 = 420 \cdot 0,84 \cdot 1,16 = 409,25 \text{ euros}$$



Para practicar

- Pagáronse 255 euros pola merca de 3 calculadoras. Canto valen 7 calculadoras? E 30? E 23?
- Un automóbil consume 56 litros de gasolina ao percorrer 800 quilómetros, cantos litros de gasolina consumirá nunha viaxe de 500 quilómetros?
- Unha tubaxe ten unha fuga de auga e perde 322 litros de auga cada 7 minutos. En canto tempo perderá 2300 litros?
- Disponse de 420 litros de auga almacenados en 7 depósitos iguais. Cantos litros de auga conterán 13 depósitos iguais aos anteriores?
- Unha máquina envasa 1200 latas de refresco nunha xornada de 8 horas. Cantas latas de refresco envasará nun día que traballe 5 horas?
- Completar a táboa sabendo que as dúas magnitudes son directamente proporcionais:

24	8	b	40	d	6,6	f
60	a	30	c	75	e	0,25
- Nove persoas realizan un traballo en 16 días. Canto tempo tardarán en realizar o mesmo traballo 8 persoas?
- Unha billa bota 20 litros de auga por minuto e tarda en encher un depósito unha hora e 30 minutos. Canto tempo tardará en encher o mesmo depósito unha billa que bote 30 litros de auga por minuto?
- Catro persoas tardan 40 días en pintar a parede exterior dun campo de fútbol, cantos días tardarán 5 persoas en facer o mesmo traballo?
- Un tren circulando a 120 km/h tardou 6 horas en facer un percorrido. Canto tempo tardarán en facer o mesmo percorrido un tren que circula a unha velocidade de 90 km/h?
- Un rectángulo ten 25 centímetros de base e 18 centímetros de altura. Que altura deberá ter un rectángulo de 15 centímetros de base para que teña a mesma superficie?
- Completar a táboa sabendo que as dúas magnitudes son directamente proporcionais:

15	40	b	180	d	0,5	f
24	a	60	c	120	e	0,01
- Seis obreiros lousan 1200 m² de chan en 4 días. Cantos metros cadrados de chan lousarán 12 obreiros en 5 días?
- Nunha campaña publicitaria 6 persoas reparten 5000 folletos en 5 días. Cantos días tardarán 2 persoas en repartir 3000 folletos?
- Para construír 4 casas iguais en 30 días fan falta 60 albaneis. Cantos albaneis se necesitarán para construír 6 casas en 90 días?
- Para imprimir uns folletos publicitarios, 9 impresoras funcionaron 8 horas diarias durante 40 días. Cantos días tardarán en imprimir o mesmo traballo 6 impresoras funcionando 10 horas diarias?
- Vinte obreiros colocaron durante 6 días 400 metros de cable traballando 8 horas diarias. Cantas horas diarias terán que traballar 24 obreiros durante 14 días para poñer 700 metros de cable?
- Repartir 2100 euros de forma directamente proporcional a:
 - 1 e 2
 - 1, 2 e 3
 - 1, 2, 3 e 4
 - 1, 2, 3, 4 e 5
 - 1, 2, 3, 4, 5 e 6

19. Cinco concursantes participan nunha competición na que teñen que atopar obxectos no fondo dunha piscina. Por orde de actuación conseguen respectivamente 8, 12, 13, 7 e 10 obxectos. O premio da proba consiste en 150 puntos repartidos de forma proporcional aos obxectos que atopan. Cantos puntos corresponden a cada participante?
20. Tres socios puxeron en marcha un negocio aportando, 5000 euros o primeiro, 25000 euros o segundo e 20000 euros o terceiro. O primeiro ano obtense 60000 euros de beneficio, como deben repartilos?
21. Realizar as seguintes reparticións inversamente proporcionais:
 - a) Repartir 144 entre 1 e 2
 - b) Repartir 132 entre 1, 2 e 3
 - c) Repartir 175 entre 1, 2, 3 e 4
 - d) Repartir 137 entre 1, 2, 3, 4 e 5
 - e) Repartir 294 entre 1, 2, 3, 4, 5 e 6
22. Tres amigos reparten unha pizza de forma inversamente proporcional aos seus pesos que son respectivamente 60, 72 e 90 quilogramos. Que parte de pizza debe comer cada un?
23. Un profesor entrega unha relación de 86 exercicios a catro alumnos para que os repartan coa condición de que cada un resolva unha cantidade inversamente proporcional ás cualificacións obtidas nun exame. As cualificacións foron 2, 4, 5 e 8. Cantos exercicios debe resolver cada un?
24. A factura de dous meses de luz dunha familia é de 65 euros, a falta de engadir o 16 % de I.V.E. Canto supón o I.V.E.? Cal é o prezo final da factura?
25. O 45 % dos alumnos dun instituto aprobou todas as materias ao final do curso. Sabendo que aprobaron 234 alumnos, cantos estudantes hai no instituto?
26. Un traballo realizado nun taller de automóviles vale 80 euros. Por pagalo ao contado fanme un desconto do 7 %. Canto me descontaron? Canto teño que pagar?
27. Un reloxo valía 32 euros, pero o reloxeiro rebaixoumo e paguei finalmente 28.80 euros. Que % me rebaixou?
28. Durante un incendio ardeu o 40 % das árbores dun bosque. Se despois do incendio contamos 4800 árbores, cantas árbores había ao principio?
29. O prezo dun traxe é de 360 euros. Nas rebaixas aplicáronlle un primeiro desconto do 30% e despois volvérono rebaixar un 20%. Cal é o prezo final?
30. O prezo dun coche é de 11400 euros. Ao mercalo fixéronme un desconto do 22 %, pero despois había que pagar un 17% de impostos de matriculación. Cal é o prezo final?
31. Un artigo que vale 50 euros ten os seguintes cambios de prezo: primeiro sube un 30 %, a continuación baixa un 15 %, volve baixar un 25 %, e por último ten unha subida do 10 %. Cal é o seu prezo final? Que porcentaxe variou respecto do prezo inicial?
32. Un empregado tivo dúas subidas de soldo nun ano por unha porcentaxe dun 5 % e un 4 % respectivamente. O soldo final é de 2184. Cal era o soldo a principios de ano?
33. En distintos supermercados atopamos as seguintes ofertas. Decidir razoadamente cal é a que máis lle interesa ao consumidor:
 - a) Pague dous e leve tres.
 - b) Pague 3 e leve catro.
 - c) A segunda a metade de prezo.



Son moitas as situacións da vida cotiá e as aplicacións a calquera rama do saber da Proporcionalidade e as Porcentaxes. Por poñer algún exemplo citamos a Lei de Gravitación Universal:



Sir Isaac Newton, (4 de xaneiro de 1643 – 31 de marzo de 1727).

Foi un científico, físico, filósofo, inventor, alquimista e matemático inglés, autor dos *Philosophiae naturalis principia mathematica*, máis coñecidos como os *Principia*, onde describiu a **Lei de Gravitación Universal** e estableceu as bases da Mecánica Clásica mediante as leis que levan o seu nome.

Di así:

A forza que exerce un obxecto dado con masa (m_1) sobre outro con masa (m_2) é **directamente proporcional** ao produto das masas, e **inversamente proporcional** ao cadrado da distancia (d) que separa os seus centros de gravidade.

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

G é a constante de gravitación.

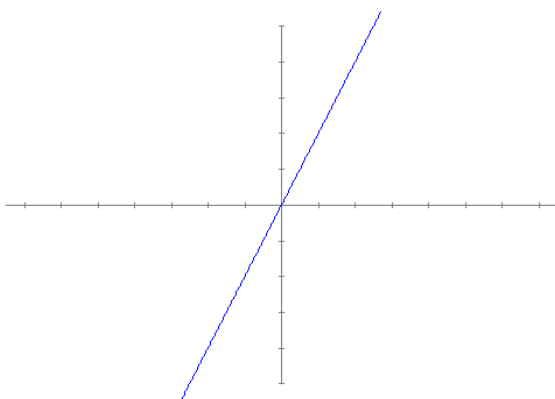
O seu valor é: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Ademais neste curso estudarás a **función de proporcionalidade directa** e a **función de proporcionalidade inversa** na unidade 11.

A función de proporcionalidade directa é da forma **$f(x) = m \cdot x$** , onde **m** é a constante de proporcionalidade directa.

Para $m=2$, unha táboa de valores é:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
e	2	4	6	8	10	12	14	16	18



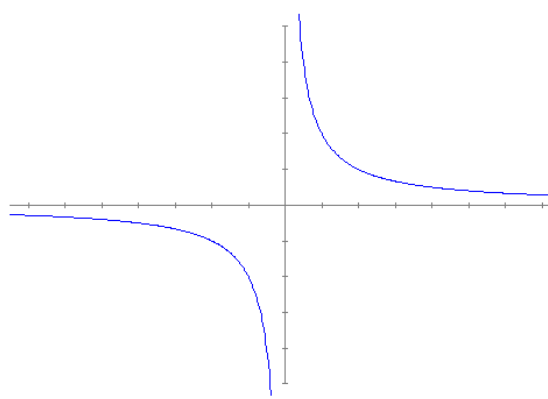
A gráfica é unha liña recta.



A función de proporcionalidade inversa é da forma **$f(x) = k/x$** , onde **k** é a constante de proporcionalidade inversa.

Para $k=2$, unha táboa de valores é:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	1	0,67	0,5	0,4	0,33	0,29	0,25	0,22



A gráfica é unha curva chamada hipérbole.



Lembra o máis importante

1. Proporción numérica.

Chámase **razón** entre a e b ao cociente $\frac{a}{b}$.

Unha **proporción numérica** é unha igualdade entre dúas razóns numéricas.

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ cúmprese que } a \cdot d = b \cdot c$$

3. Proporcionalidade inversa.

Magnitudes inversamente proporcionais.

Se se multiplica (ou divide) unha delas por un número, a outra queda dividida (ou multiplicada) polo mesmo número.

O produto entre cada parella de valores de ambas magnitudes é constante. Chámase **razón de proporcionalidade inversa**.

5a. Reparticións directamente proporcionais

Consiste en dividir unha cantidade entre varias partes de forma que cada unha delas reciba unha cantidade directamente proporcional a un valor inicial de cada parte.

Divídese a cantidade a repartir pola suma dos valores iniciais de cada parte e multiplícase o resultado obtido por cada valor inicial.

6. Tanto por cento.

Para aplicar unha **porcentaxe r%** a unha cantidade **C**, pódese facer coma unha actividade de magnitudes directamente proporcionais

$$r\% \text{ de } C = \frac{C \cdot r}{100} = C \cdot \frac{r}{100}$$

Con esta última fórmula pódese deducir que para calcular unha porcentaxe, basta multiplicar a cantidade **C** polo número **r/100**.

(Pódese aplicar a fórmula inferior substituíndo índice de variación por r/100)

$$\text{Cantidade inicial} \times \text{Índice de variación} = \text{Cantidade final}$$

2. Proporcionalidade directa.

Magnitudes directamente proporcionais.

Se se multiplica (ou divide) unha delas por un número, a outra queda multiplicada (ou dividida) polo mesmo número.

O cociente entre cada parella de valores de ambas magnitudes é constante. Chámase **razón de proporcionalidade directa**.

4. Proporcionalidade composta.

A proporcionalidade composta consiste en relacionar tres ou máis magnitudes.

Ao resolver unha actividade de proporcionalidade composta relaciónanse as magnitudes de dúas en dúas e mantéñense constantes as demais.

5b. Reparticións inversamente proporcionais

Consiste en dividir unha cantidade entre varias partes de forma que cada unha delas reciba unha cantidade inversamente proporcional a un valor inicial de cada parte.

Faise o reparto de forma directamente proporcional aos inversos dos valores iniciais de cada unha das partes.

7. Variacións porcentuais.

Para aumentar ou diminuír unha porcentaxe **r%** a unha cantidade **C**, pódese calcular o r% de C e sumar ou restar esta cantidade á cantidade inicial C.

Pódese calcular directamente a cantidade final calculando a variación correspondente a cada unidade, chamada **índice de variación**, e multiplícalo pola cantidade inicial.

$$\text{Para un aumento: } I.V. = 1 + \frac{r}{100}$$

$$\text{Para unha diminución: } I.V. = 1 - \frac{r}{100}$$

Autoavaliación



1. Nunha canle pérdense por fugas 96 litros de auga cada 15 minutos. En canto tempo se perderán 288 litros?
2. Doce persoas realizan un traballo en 30 días. Canto tempo tardarán en realizar o mesmo traballo 18 persoas?
3. Nunha campaña publicitaria 10 persoas reparten 5000 folletos en 12 días. Canto tempo tardarán 6 persoas en repartir 2500 folletos?
4. Repartir 344 obxectos de forma directamente proporcional a 10, 14 e 19.
5. Repartir 70 obxectos de forma inversamente proporcional a 6 e 8.
6. A unha reunión asisten 340 persoas. Delas, o 70 % son mulleres. Cantas mulleres hai na reunión?
7. O 75 % das árbores dun bosque son piñeiros. Sabendo que hai 900 piñeiros, cantas árbores hai no bosque?
8. O pasado curso había no instituto 750 alumnos e este ano aumentou un 12 %. Cantos alumnos hai agora?
9. A poboación do meu pobo pasou nun ano de 2600 a 2678 habitantes. Que tanto por cento aumentou?
10. O prezo dunha bicicleta era de 360 euros. En primeiro lugar aplicaselle un aumento do 25% e despois unha rebaixa do 15%. Cal é o seu prezo final?

Soluciones dos exercicios para practicar

1. 595 €, 2550 €, 1955 €
2. 35 litros
3. 50 minutos
4. 780 litros
5. 750 latas
6. $a=20$, $b=12$, $c=100$,
 $d=30$, $e=16,5$, $f=0,1$
7. 18 días
8. 60 minutos
9. 32 días
10. 8 horas
11. 30 centímetros
12. $a=9$, $b=6$, $c=2$, $d=3$,
 $e=720$, $f=36000$
13. 3000 metros²
14. 9 días
15. 30 albaneis
16. 48 días
17. 10 horas
18. a) 700 e 1400 €
b) 350, 700 e 1050 €
c) 210, 420, 630 e 840 €
d) 140, 280, 420, 560 e 700 €
e) 100, 200, 300, 400, 500 e 600 €
19. 24, 36, 39, 21 e 30 puntos
20. 6000, 30000 e 24000 euros
21. a) 96 e 48
b) 72, 36 e 24
c) 84, 42, 28 e 21
d) 60, 30, 20, 15 e 12
e) 120, 60, 40, 30, 24 e 20
22. $2/5$, $1/3$ y $4/15$ de pizza
23. 40, 20, 16 y 10 exercicios
24. I.V.E.: 10,40 €.
Prezo final: 75,40 €
25. 520 estudantes
26. Desconto: 5,6 €
Prezo final: 74,4 €
27. 10 %
28. 8000 árbores
29. 201,60 €
30. 10403,64 €
31. Prezo final: 45,58 €
Desconto: 8,8375 %
32. 2000 euros
33. a) paga: 66,67%, rebaixa: 33,33%
b) paga: 75%, rebaixa: 25%
c) paga: 75%, rebaixa: 25 %

Soluciones AUTOAVALIACIÓN

1. 45 minutos
2. 20 días
3. 10 días
4. 80, 112 e 152 obxectos respectivamente
5. 40 e 30 obxectos respectivamente
6. 238 mulleres
7. 1200 árbores
8. 840 alumnos
9. 3 %
10. 382,5 euros