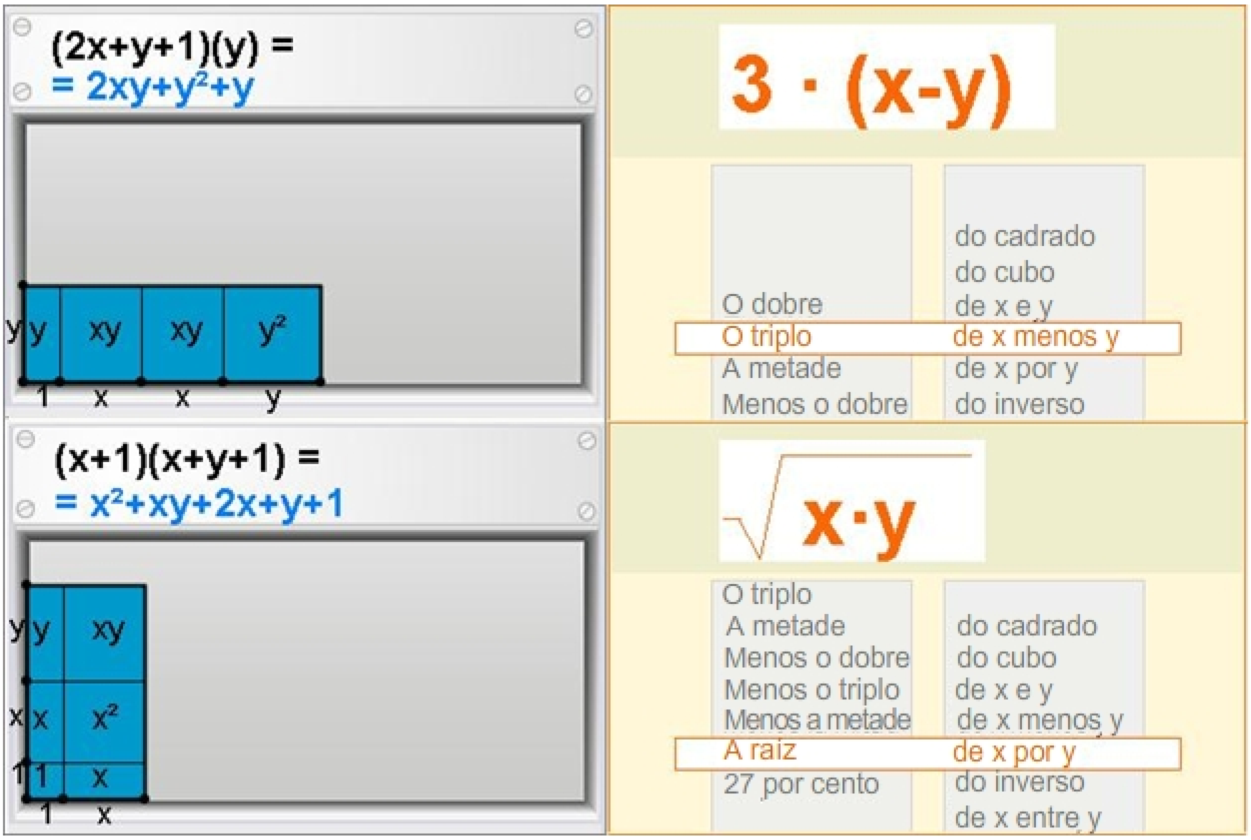
5 Expresións alxébricas

Obxectivos

- Crear expresións alxébricas a partir dun enunciado.
- Atopar o valor numérico dunha expresión alxébrica.
- Clasificar unha expresión alxébrica como monomio, binomio,... polinomio.
- Operar con monomios (sumar, restar e multiplicar).
- Operar con polinomios (sumar, restar e multiplicar por un monomio).

Antes de empezar



Expresións alxébricas

Na imaxe da esquerda pódense ver dous exemplos nos que se aplica a propiedade distributiva do produto respecto da suma, o gráfico explica esta propiedade que se utilizará neste tema. Observa atentamente as áreas dos rectángulos e constrúe figuras similares para aplicar esta propiedade.

Á dereita móstranse dúas expresións alxébricas, saberías construír as diferentes expresións que se obteñen ao mover as listas grises? Por exemplo, o 27 por cento do cadrado será

$$0,27\ x^2$$

1. Expresións alxébricas

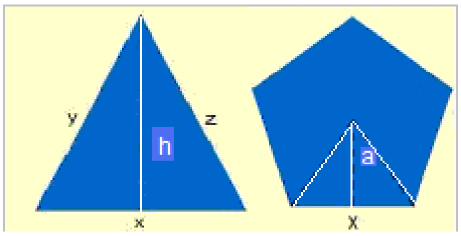
Que son?

Unha **expresión alxébrica** é un conxunto de números e letras unidos entre si polas operacións de sumar, restar, multiplicar, dividir e por paréntese. Por exemplo:

$$3+2\cdot x^2-x \quad \text{o} \quad x\cdot y-32\cdot(x\cdot y^2-y)$$

As letras representan valores que non coñecemos e podemos consideralas como a xeneralización dun número. Chamarémolas **variables**.

> **Nota**
> O signo de multiplicar sobreentándese diante dunha letra ou unha paréntese. Así, 3·a é equivalente a 3a, e 3·(2+x) é equivalente a 3(2+x).



O perímetro do triángulo é x+y+z

A área do triángulo é $\frac{x\cdot h}{2}$

O perímetro do pentágono 5 x

A área do pentágono $\frac{5xa}{2}$

Como as obtemos?

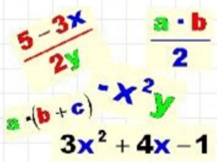
Pretendemos transformar un enunciado, onde hai un ou varios valores que non coñecemos, nunha **expresión alxébrica.**

Cada un dos valores (**variables**) que non coñecemos representarémolo por unha letra diferente.

Enunciado

A quinta parte da suma de dous números menos oito.

Expresa alxébricamente o enunciado



Necesitaremos dúas variables que chamaremos x e y

A diferenza entre os dous números: $x - y$

A décima parte $\frac{x-y}{10}$

máis nove $\frac{x-y}{10}+9$

Valor numérico

Se nunha expresión alxébrica substituímos as letras (variables) por números, o que teremos será unha expresión numérica. O resultado desta expresión é o que chamamos **valor numérico** da expresión alxébrica para eses valores das variables.

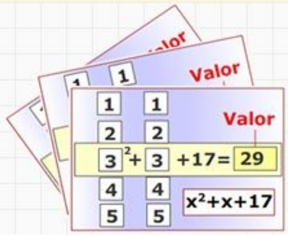
> É importante que teñas en conta a **prioridade das operacións**
> 1. Potencias
> 2. Produtos e cocientes
> 3. Sumas e restas

Enunciado

Acha o valor numérico da expresión alxébrica

$-y^2-2x\cdot y+x+3y$

substituíndo a **x por 7 e a y por 1**



Cambiamos a x polo seu valor:

$-y^2-2\cdot 7\cdot y+7+3\cdot y$

Cambiamos a y polo seu valor:

$-1^2-2\cdot 7\cdot 1+7+3\cdot 1$

Comenzamos a operar:

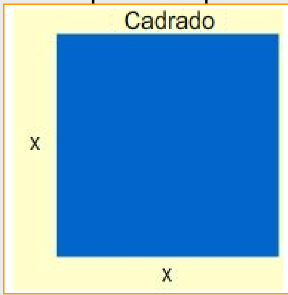
1. Potencias $-1\ -2\cdot 7\cdot 1\ +7\ +3\cdot 1$

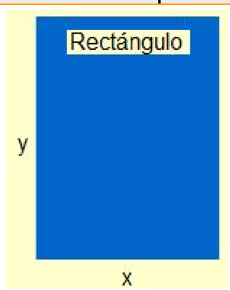
2. Produtos $-1\ -14\ +7\ +3$

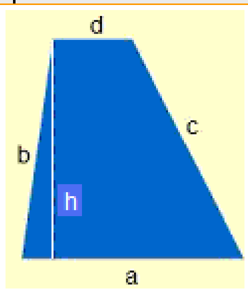
Valor numérico = -5

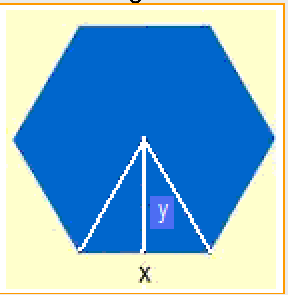
EXERCICIOS resoltos

1. Atopa as expresións alxébricas que dan o perímetro e a área de cada figura









Solucións

Perímetro = 4 x Área = x^2	Perímetro = 2 (x + y) Área = x y	Perímetro = a+b+c+d Área = $\frac{(a+d)h}{2}$	Perímetro = 6 x Área= 3 x y

2. Escolle a expresión alxébrica en cada caso

1 O triplo dun número máis seis	2 A quinta parte dun nº máis 10.	3 Un cuarto da suma dun nº máis 7.	4 A semisuma de dous números.	5 A metade do produto de 2 nºs.
(A) $6x+3$	(A) $\frac{x}{5}+10$	(A) $\frac{x+7}{4}$	(A) $\frac{x\cdot y}{2}$	(A) $\frac{x}{2}\cdot y$
(B) $3x+6$	(B) $\frac{x+10}{5}$	(B) $\frac{x}{4}+7$	(B) $\frac{x+y}{2}$	(B) $\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}$
(C) $3(x+6)$	(C) $10x+5$	(C) $\frac{14+7}{4}$	(C) $\frac{x}{2}+y$	(C) $\frac{x-y}{2}$
(D) $\frac{x}{3}+6$	(D) $5x+10$	(D) $\frac{7}{4}+x$	(D) $\frac{x-y}{2}$	(D) $\frac{x\cdot 7}{2}$
6 A raíz cadrada da suma de dous cadrados.	7 O 40% dun número.	8 O cadrado da suma de dous números.	9 O cadrado da semisuma de dous números.	5 A media aritmética de tres números
(A) $x+y$	(A) $0.4\,x$	(A) $(z+y)^2$	(A) $\frac{x^2+y^2}{4}$	(A) $0.5x+0.5y+0.5z$
(B) x^2+y^2	(B) $\frac{40}{100\,x}$	(B) x^2+y^2	(B) $\frac{x+y^2}{2}$	(B) $\left(\frac{x+y}{2}+z\right)/2$
(C) $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$	(C) $\frac{40}{10}x$	(C) $x+y^2$	(C) $\frac{(x+y)^2}{4}$	(C) $\frac{x+y+z}{3}$
(D) $\sqrt{x^2+y^2}$	(D) $\frac{100\,x}{40}$	(D) $(12+y)^2$	(D) $\frac{(x+y)^2}{2}$	(D) $\frac{x+y+z}{2}$

Solucións: 1 B; 2 A; 3 A; 4 B; 5 A; 6 D; 7 A; 8 A; 9 C; 10 C.

3. Atopa os valores numéricos indicados en cada caso.

$2-7\cdot x^2$ en (-2)	$3+5\cdot x^3$ en $\frac{2}{3}$	$3\sqrt{x}-3\cdot x^3$ en 9	$\frac{x^5}{y^3}+4$ en $x=-2$, $y=3$	$\frac{x^5}{y^4}+1$ en $x=4$, $y=4$
$2-7\cdot(-2)^5$	$3+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$3\sqrt{9}-3\cdot 9^3$	$\frac{(-2)^5}{3^3}+4$	$\frac{4^5}{4^4}+1$
$2-7\cdot -32$	$3+5\cdot\frac{8}{27}$	$3\cdot 3-3\cdot 729$	$\frac{-32}{27}+4$	4^1+1
$2+224$	$3+\frac{40}{27}$	$9-2187$	$\frac{76}{27}$	$4+1$
226	$\frac{121}{27}$	-2178		5

2. Monomios

Que son?

Un monomio é unha expresión alxébrica formada polo produto dun número e unha ou máis variables. Ao número chamarémoslle **coeficiente** e ao conxunto das variables, **literal**.

Chamaremos **grao** do monomio á suma dos expoñentes da súa parte literal. E **grao respecto dunha variable**, ao expoñente desa variable.

Dous monomios son **semellantes** se os seus literais son iguais.

Dous monomios son **opostos** se son semellantes e os seus coeficientes son opostos.

Identifica os elementos dos monomios

$-12x^5y^3$ $2x^5y^3$

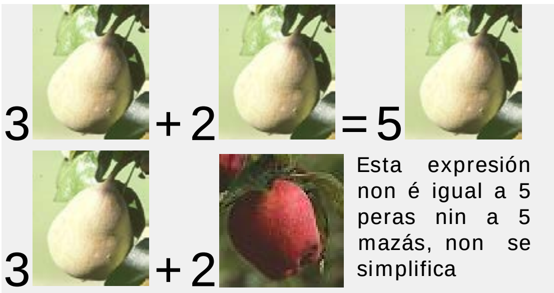
Monomio	Coeficiente	Literal	Grao
$-12x^5y^3$	-12	x^5y^3	8
$2x^5y^3$	2	x^5y^3	8

Son semellantes, pois teñen igual o literal

Non son opostos, pois os coeficientes non o son

Sumar e restar monomios

Tres peras e dúas peras son 5 peras. Pero 3 peras e 2 mazás non son 5 peras ni 5 mazás, son 3 peras + 2 mazás.



O mesmo ocorre cos monomios. Se dous monomios son semellantes, sumamos ou restamos os coeficientes e deixamos o mesmo literal. Se non son semellantes, esta operación non pode expresarse de maneira máis simplificada.

$3x+2x=5x$, pero as expresións $3x^2+2x$ o $2x+7y$ non se poden simplificar.

$2x^7y^3 + 6x^7y^3$
Monomios semellantes, polo tanto súmanse os coeficientes
$8x^7y^3$

$2x^7y^3 - 6x^7y^3$
Para restalos procédese de forma similar,
$-4x^7y^3$

$2x^7y^3 + 6x^5y^3$
Monomios non semellantes, polo tanto a expresión non se pode simplificar, o resultado é
$2x^7y^3 + 6x^5y^3$

Analogamente
$2x^7y^3 - 6x^5y^3$
é
$2x^7y^3 - 6x^5y^3$

Multiplicar monomios

O produto de dous monomios é un monomio que ten por coeficiente o produto dos coeficientes e por parte literal o produto das partes literais (recorda a propiedade: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$).

Así,
$(3x^2y)\cdot(2x)=(3\cdot 2)x^2yx=6x^{2+1}y=6x^3y$

$\left(-\frac{3}{2}x^2y^3\right)\cdot\left(\frac{3}{2}y^2\right)$

Multiplicamos os coeficientes: $\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$

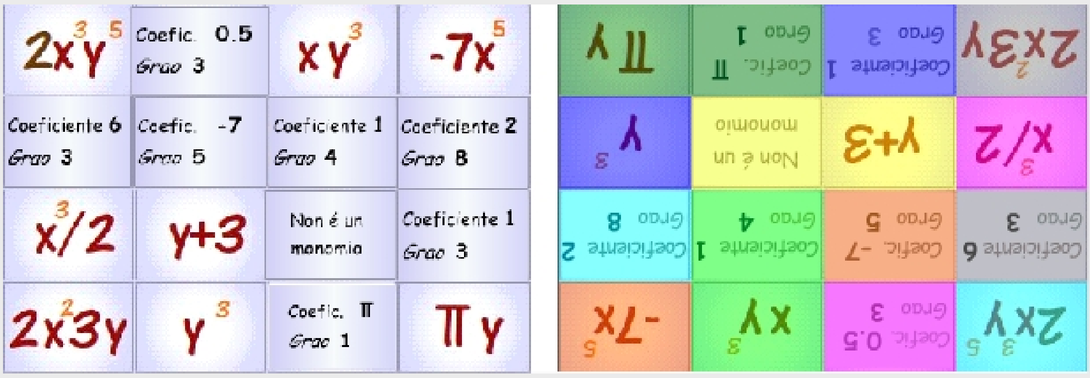
Multiplicamos os literais: $\left(x^2y^3\right)\cdot\left(y^2\right) =$

$= x^2y^5$

Resultado
$-\frac{9}{4}x^2y^5$

EXERCICIOS resoltos

4. Emparella os rectángulos da esquerda, á dereita está a solución.



5. Suma e resta as seguintes parellas de monomios

a) $3/2\ x^3y$, $2\ x^3y$ b) $2xy$, x^3y c) x^2y^3, $-7/4\ x^2y^3$ d) πx, $6x$

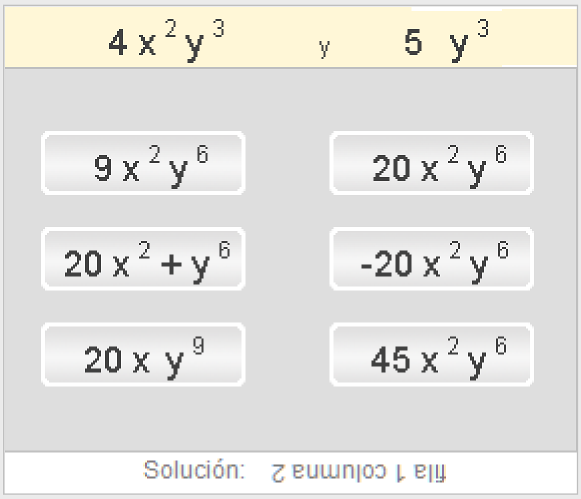
Solucións suma:

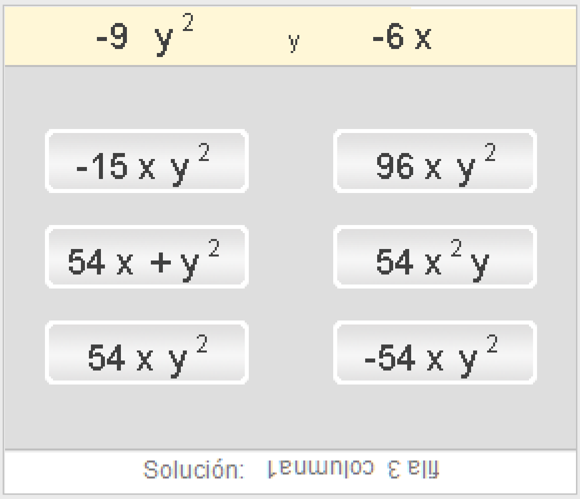
a) $7/2\ x^3y$ b) $2xy + x^3y$ c) $-3/4\ x^2y^3$ d) $(\pi+6)x$

Solucións resta:

a) $-1/2\ x^3y$ b) $2xy - x^3y$ c) $11/4\ x^2y^3$ d) $(\pi-6)x$

6. Escolle a etiqueta que da o resultado correcto do produto dos monomios indicados en cada caso.

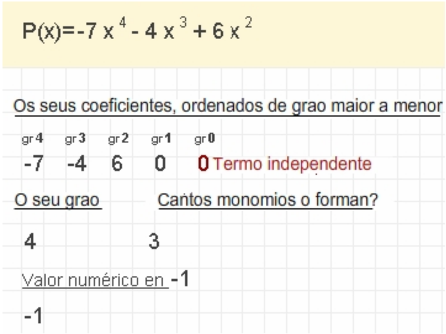


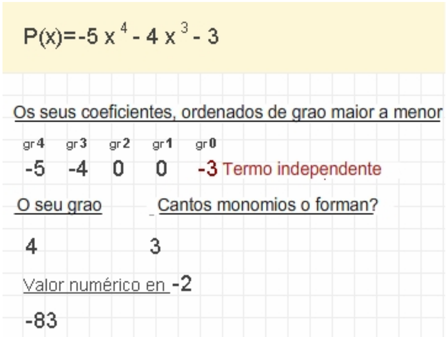


3. Polinomios

Que son?

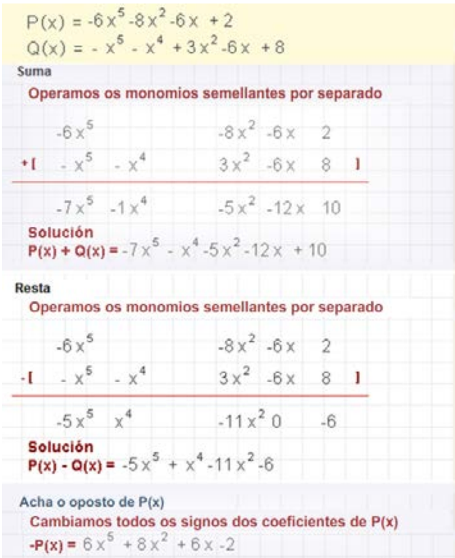
A suma de varios monomios non semellantes é un polinomio, o conxunto dos polinomios está formado por monomios ou sumas de monomios non semellantes.
Se un dos monomios non ten parte literal, chámase **termo independente.**
O maior grao de todos os seus monomios, é o **grao do polinomio**.
Nomeamos os polinomios cunha letra maiúscula e entre paréntese as variables que o integran, pero nesta páxina restrinxirémonos a unha soa variable.
É importante que saibas identificar os **coeficientes** dun polinomio segundo o seu grao, se $\mathbf{P(x)=x^3+2x-4}$, o seu **grao é 3** e o seu coeficiente de grao tres é 1, o seu coeficiente de grao un é 2 e o termo independente ou coeficiente de grao cero é -4.





Sumar e restar polinomios

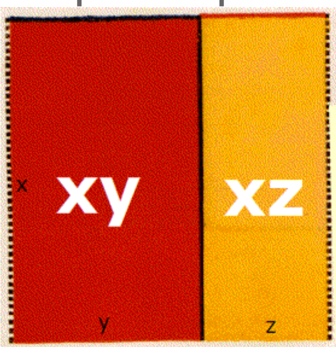
Para sumar ou restar dous polinomios, operamos os seus monomios semellantes. Se non os teñen, deixamos a operación indicada.
Así, se $P(x)=3x^2+4x$ e $Q(x)=4x-1$,
$P(x)+Q(x)=[3x^2+4x]+[4x-1]=3x^2+8x-1$
$P(x)-Q(x)=[3x^2+4x]-[4x-1]=3x^2+1$



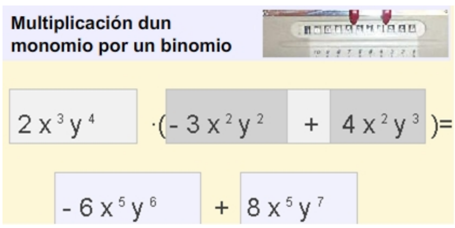
Polinomios opostos

Dous polinomios son opostos se ao sumalos todos os seus termos se anulan.
Así, se $P(x)=3x^2+4$ e $Q(x)=-3x^2-4$,
entón: $\mathbf{P(x)+Q(x)}=[3x^2+4]+[-3x^2-4]=$
$=3x^2+4-3x^2-4\mathbf{=0}$, **Q(x) é o oposto de P(x).**
Para conseguir o polinomio oposto de P(x), só temos que cambiar os signos dos seus coeficientes. O representaremos por -P(x).

Multiplicar un polinomio por un monomio



Nos Elementos de Euclides ilústranse con imáxenes as operacións de polinomios x(y+z)=xy+xz na esquerda. Este libro escribiuse no Século III a.d. C. , e segue interesando nos nosos días. Na páxina de saber máis poderás ver outras ilustracións.



O seguinte exemplo axudarache a dominar esta operación.
$P(x)=3x^2+4x$ $\qquad Q(x)=3x$:
$P(x)\cdot Q(x) = [5x^2+4x]\cdot[3x] =$
$= [5x2]\cdot[3x] + [4x]\cdot[3x] = 15x^3+12x^2$

EXERCICIOS resoltos

7. Cos elementos da esquerda, escribe o polinomio P(x) que cumpra as condicións da dereita.

$+5$	O grao de P(x) é **7**
-3 $\quad -4$	O coeficiente de maior grao é **-4**
x^7	O coeficiente de grao 5 é **5**
x^5	O coeficiente de grao 3 é **3**
x^3 $\quad -5$	O coeficiente de grao 0 é **-5**
	Os demais coeficientes son todos cero.

$P(x) =$

Solución: $P(x) = -4x^7 + 5x^5 - 3x^3 - 5$

8. Atopa P(x)-Q(x)

$$P(x) = -x^3 + 3x^2 - \frac{4}{3}x$$

$$Q(x) = -x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{2}x - 4$$

$$P(x)-Q(x) = \frac{8}{3}x^2 - \frac{23}{6}x + 4$$

Atopa P(x)+Q(x)

$$P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x$$

$$Q(x) = \frac{2}{5}x^3 - x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$P(x)+Q(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{29}{20}x - \frac{5}{4}$$

9. Atopa a expresión en coeficientes dos seguintes produtos

Multiplica o polinomio

$P(x) = -9x^4 + 8x$

por -4 $\quad$ por $11x^4$

Multiplicamos, por separado, todos os termos de P(x)

$[-9x^4]\cdot[-4] = 36x^4$

$[8x]\cdot[-4] = -32x$

Solución

$P(x)\cdot(-4) = 36x^4 - 32x$

Multiplicamos, por separado, todos os termos de P(x)

$[-9x^4][11x^4] = -99x^8$

$[8x][11x^4] = 88x^5$

Solución

$P(x)\cdot(11x^4) = -99x^8 + 88x^5$

Para practicar

1. Atopa a expresión alxébrica que da as unidades dun número de tres cifras.

2. O meu paso é de 69 cm. Cantos pasos darei para dar tres voltas a un circuíto de a metros?

3. Se fai tres horas estaba no quilómetro 26 dunha estrada e vou a unha velocidade media de x km/h En que punto quilométrico da mesma estrada me atopo?

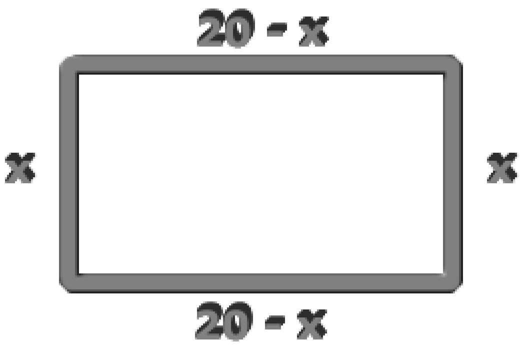
4. En tres cuartos de hora hai 45 minutos Sabes cantos minutos hai en 2·r/s horas?

5. A expresión alxébrica que define o prezo dun artigo de y € se nos rebaixan un x% é (100 – x) / 100 · y. Atopa o prezo dun artigo de 52€ se se rebaixa un 25%.

6. Atopa o valor numérico de P(x)= $6x^2+7x+3$ en x=10 e en x=0,1.

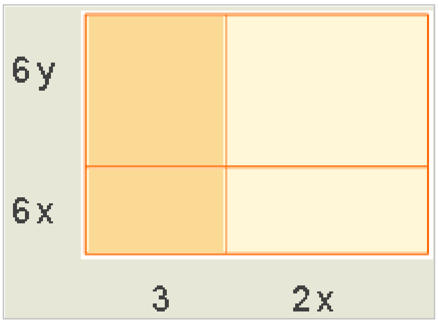
7. Atopa o valor numérico de (10x+y)/99 en x=6 y=8.

8. Dobrando un arame de 40 cm formamos un rectángulo. Atopa a expresión alxébrica que define a área do rectángulo e calcula o seu valor para x=4. (Ver figura)



9. Cal é o grao do polinomio $-3x^4+9x^2$? Cal é o seu coeficiente de grao dous? e o de grao un? Calcula o seu valor numérico en x=2.

10. Multiplica 3·(6x+6y) e 2x·(6x+6y). Completa as áreas dos rectángulos.



11. Opera $[4x^3y^3]+[5x^4y^2]$ e $[-7x^3]+[5x^3]$

12. Opera $[-8x^2]-[-3x^2]$

13. Multiplica os monomios $[2x^5y^3]$ e $[-3xy^2]$

14. Atopa o oposto de $[-2x^2y^4]$

15. Suma os polinomios

$$-\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-5x-\frac{4}{5}$$ e

$$x^3+x+\frac{3}{5}$$

16. Resta os polinomios

$$-\frac{3}{4}x^3+\frac{3}{5}x-2$$ e

$$\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{5}x^2+4$$

17. Multiplica o monomio

$-4x^7y^2$

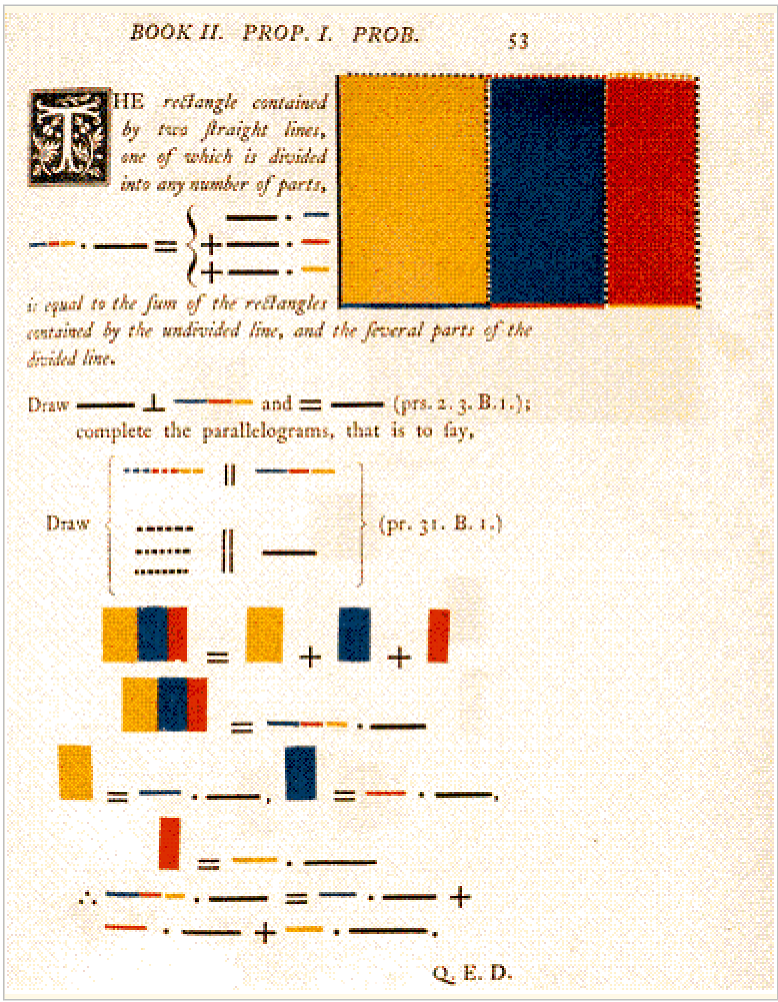
polo binomio

$-4x^8y^7-x^4y^4$

Para saber máis

Euclides

No S. III Euclides escribiu Os Elementos en 13 volumes. A obra é a segunda en número de edicións publicadas despois da Biblia (máis de 1000).
As imaxes corresponden á edición de Byrne publicada en 1847. Son gráficos das cinco primeiras proposicións do libro II e representan algunhas operacións de polinomios.


BOOK II. PROP. I. PROB. 53

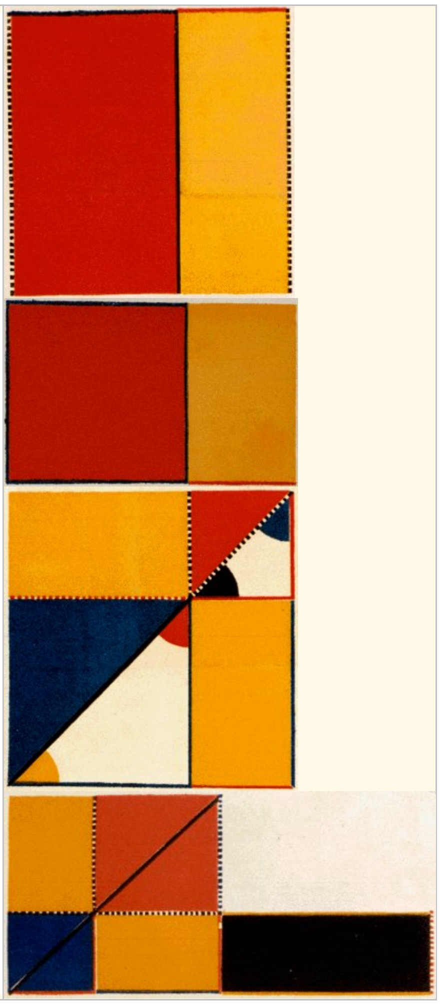
THE rectangle contained by two straight lines, one of which is divided into any number of parts,

is equal to the sum of the rectangles contained by the undivided line, and the several parts of the divided line.

Draw ⊥ and = (prs. 2. 3. B.1.); complete the parallelograms, that is to say,

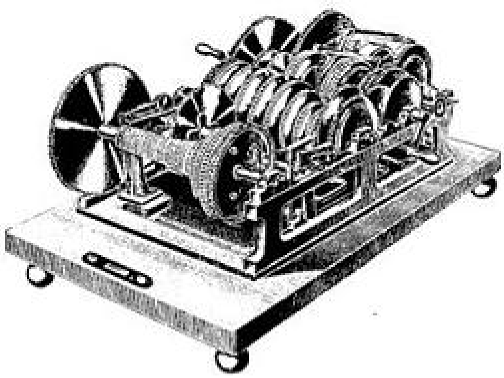
Draw (pr. 31. B. 1.)

Q. E. D.



A Máquina Alxébrica de Torres Quevedo

Son moitas as máquinas precursoras dos ordenadores. Nas imaxes vemos unha achega española a este desenvolvemento. Esta máquina calculaba valores numéricos de polinomios.



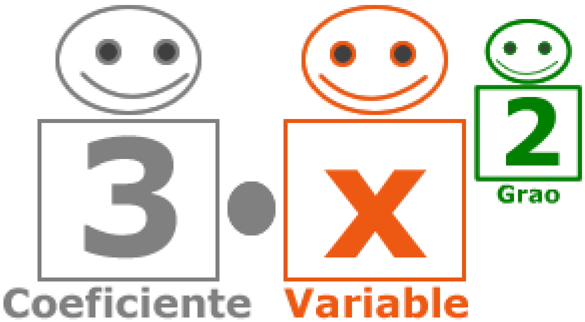
Lembra o máis importante

Expresións alxébricas e os seus valores numéricos

O número de rodas se hai 80 coches e 20 motos, é o **valor numérico** de **4x + 2y** en x=80, y=20:
$4\cdot\mathbf{80} + 2\cdot\mathbf{20} = 360$

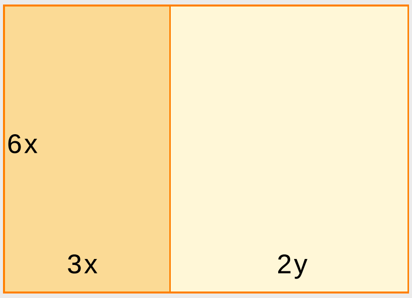
A **expresión** que da o prezo das rodas se a dun coche é z € e a de unha moto t €, é **4xz + 2yt**

O custo das rodas de 2 coches e unha moto se a do coche é de 80€ e a da motocicleta de 50€ é o **valor numérico** de **4xz + 2yt** en x=2, y=1; z=80, t=50, que da
$4\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{80} + 2\cdot\mathbf{1}\cdot\mathbf{50} = 740$



Monomios	Polinomios
Suma e resta monomios	Suma e resta polinomios
$7x^3 + 2x = 7x^3 + 2x$ $7x^3 + 2x^3 = 9x^3$ $7x^3 - 2x^3 = 5x^3$	$P(x) = 4x^3 + x - 5$ $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 4$ $P(x)+Q(x) = 6x^3 + x^2 + 3x - 1$ $P(x)-Q(x) = 2x^3 - x^2 - x - 9$
Multiplica monomios	Multiplica un monomio por un polinomio
$7x^3 \cdot 2x = 14x^4$ $7x^3 \cdot 2x^3 = 14x^6$ $3x^3y^2 \cdot 2x^3y = 6x^6y^3$	$7x^3 \cdot (2x^2+3) =$ $= 7x^3 \cdot 2x^2 + 7x^3 \cdot 3 =$ $= 14x^5 + 21x^3$

Autoavaliación



1. Atopa a expresión alxébrica que da as unidades do triplo dun número de tres cifras x y z.

2. Atopa a área do rectángulo da esquerda.

3. Valor numérico de $5x^3-4/5x^2+5x+5$ en $x=-2$

4. Cal é o grao do polinomio $P(x,y)=3x^3y^3-5x^2y^3$?

5. Cal é o coeficiente de grao 2 de $P(x)=-5x^3+4x^2-3$?

6. P(x) é un polinomio de grao 1 tal que $P(10)=234$, $P(0,1)=6,3$ Sabes se $P(x)=23x+4$ ou $P(x)=2x^2+3x+4$ ou ningún dos dous casos?

7. Suma os monomios $2x^6y^5+3x^6y^5$

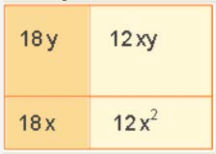
8. Atopa o valor numérico en $x=10$ da resta dos polinomios $P(x)=6x^2+4x+1$ e $Q(x)=2x^2+5x+4$

9. Cal é a suma de $\sqrt{3}x^8+4x$ e $5x^8+3x$?

10. Cal é o grao do produto de $-6x^4y^3$ por $2x^6y^3+3x^8y^6$?

Solucións dos exercicios para practicar

1. $100x + 10y + z$
2. $100a/23$
3. $26+3x$
4. $120 \cdot r/s$ minutos
5. 39€
6. en 10, 673; en 0,1, 3,76
7. 0.686868....
8. $20x-x^2$; 64
9. 4; 9; 0; -12
10. $18x+18y$; $12x^2+12xy$



11. $4x^3y^3 + 5x^4y^2$; $-2x^3$
12. $-5x^2$
13. $-6x^6y^5$
14. $2x^2y^4$
15. $\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{1}{5}$
16. $-x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}x - 6$
17. $16x^{15}y^9 + 4x^{11}y^6$

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. $300x+30y+3z$
2. $18x^2+12xy$
3. $-241/5$
4. 6
5. 4
6. $P(x)=23x+4$
7. $5x^6y^5$
8. 387
9. $(\sqrt{3}+5)x^8+7x$
10. 21