Funcions

Objectius

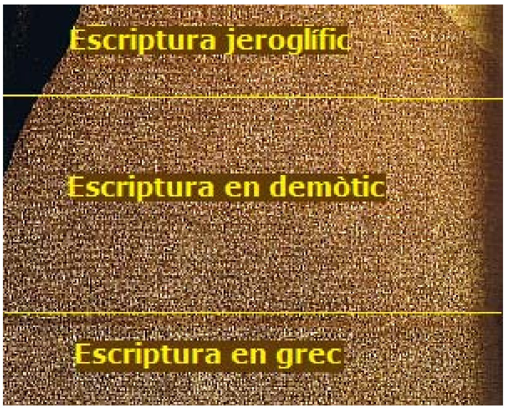
En aquesta quinzena aprendràs a:

- Comprendre, distingir i valorar el concepte de funció
- Distingir els conceptes de variable dependent i independent, domini i recorregut
- Interpretar i relacionar taula, gràfica i fórmula d'una relació funcional
- Apreciar i interpretar sobre una gràfica les primeres propietats generals d'una funció
- Distingir, formular i representar situacions mitjançant una funció de proporcionalitat directa i inversa.

Abans de començar

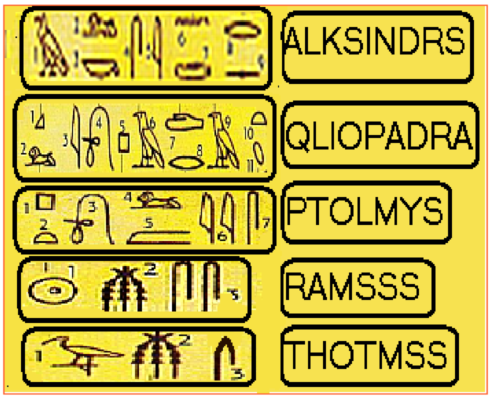
La Pedra Roseta conté un document escrit de tres formes diferents. A la part superior (jeroglífics), a la central, (demòtic) dues formes d'escriptura d'una llengua morta, l'egipci. A la part inferior apareix la mateixa inscripció en grec. Aquesta última i la genialitat de Champollión va permetre trobar les claus de la correspondència entre els signes jeroglífics i les seves imatges fonètiques.

Pedra Roseta



Detall de l'escriptura jeroglífica

Algun dels "blocs" que ajudaren a desxifrar els equivalents fonètics de l'escriptura egípcia.



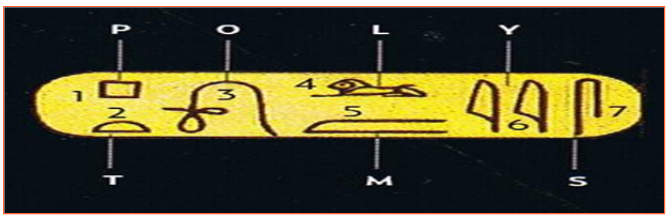
Clau Alexandre

Clau Cleopatra

Clau Ptolomeu

Clau Ramses

Clau Thumosis



Continguts

1. Relacions funcionals

Expressió d'una relació funcional.

Es diu que una correspondència entre dos conjunts és una relació funcional, si a cada element del primer conjunt se li fa correspondre de forma única un element del segon.

Observa les exemples d'aquestes situacions.

Exemple

Taula de valors

La lliura és una mesura de pes d'origen anglosaxó. A la següent taula es dóna l'equivalència en quilograms de diferents mesures en lliures.

Pes en lliures	Pes en quilograms
2	0'90
3	1'35
4	1'80
x	f(x)

A cada valor en el pes de lliures, el primer conjunt, li correspon un **únic** valor en el pes de quilograms, el segon conjunto.

De forma general direm que a x pes de lliures li correspon f(x) pes de quilograms.

A l'exemple anterior hem vist la taula de valors com una forma d'expressar una relació funcional. Vegem-ne d'altres.

Entre les diferents formes d'expressar una relació funcional, podem assenyalar:

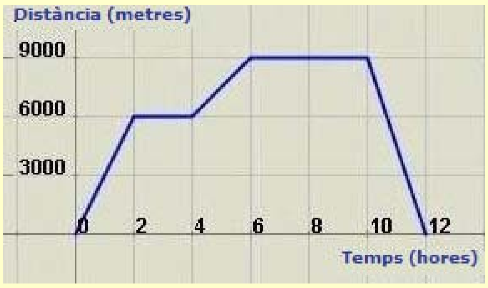
- Mitjançant una taula.
- Mitjançant una gràfica.
- Mitjançant una fórmula.

La taula de valors, la representació gràfica i la formulació mitjançant una expressió algebraica constitueix les formes habituals d'expressar la dependència entre dues magnituds.

Exemple

La representació gràfica

La gràfica següent representa la distància a la que es troba en Joan de casa seva al llarg del dia. En Joan agafa el cotxe, va durant un temps, esmorza i llegeix la premsa segueix una estona fins a la casa d'uns amics que l'han convidat a menjar. Després d'un temps torna ràpid ja que s'ha fet una mica tard.



Si va sortir a les 9 del matí, ha estat fora 12 hores, així que va tornar a les 21:00 hores.
Podem també afirmar que a casa dels seus amics va ser-hi 4 hores, des de l'hora 6 a l'hora 10 del temps transcorregut, és a dir, des de les 15:00 hores fins les 19:00 hores.
També que la casa d'en Joan és a 9000 metres.

Novament observa que per a cada valor a l'eix *Temps*, existeix un únic valor a l'eix de *Distància*.

Exemple

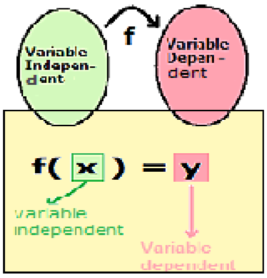
Expressió algebraica.

Una fórmula ens fa pensar sempre en un secret, una sèrie de caràcters capaços de contenir una gran quantitat d'informació disponible per al que la desxifri.
A les matemàtiques una fórmula és una expressió algebraica que descriu la relació funcional i que permet mitjançant una simple substitució calcular el transformat d'un determinat valor.

f(x)= 3x-1	f(-2)=-7
	f(-1)=-4
	f(2)=5
	f(3)=8

Variable dependent i independent.

En una relació funcional, a la magnitud que depèn de l'altra se l'anomena *variable dependent*, a la segona magnitud se l'anomena *variable independent.*



Exemple

La gràfica representa la distància en metres a la que es troba una persona de casa seva al llarg de 6 hores de temps.

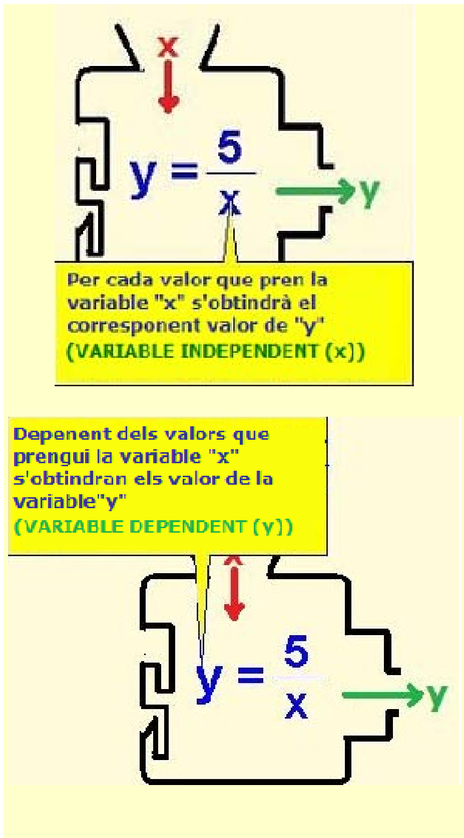
Exemple

Les "taules de preus" constitueixen una de les aplicacions més habituals de les Funcions definides mitjançant una taula.
A l'Exemple es pot observar la identificació de la variable independent i la dependent.

Temps (minuts)	Preu (euros)
<= 30	0.50
entre 31 i 60	1
entre 61 i 90	1.20
entre 91 i 120	1.50

Per cada temps en minuts haurem de pagar una quantitat. (VARIABLE INDEPENDENT: TEMPS. VARIABLE DEPENDENT: TEMPS)

La fórmula es una expressió algebraica que relaciona dues variables.

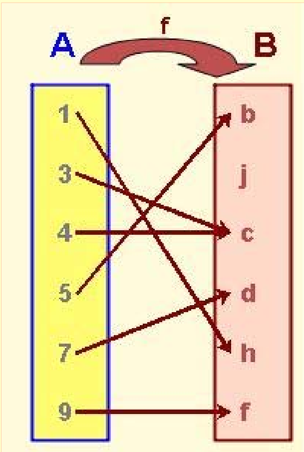


Domini i recorregut

El *domini* o *camp d'existència* d'una funció és el conjunt de tots els valors que agafa la variable independent.

El *recorregut*, *imatge* o *rang* d'una funció és el conjunt de valors que agafa la variable dependent.

Vegem el següent Exemple entre dos conjunts.



Domini: Tots els elements de A que estan relacionats

{1,3,4,5,7,9,}

Recorregut: Tots els elements de B que són imatge d'algun element de A

{b,c,d,h,f,}

Observa como hi ha un element del conjunt B, l'element j, que no pertany al recorregut, ja que no és imatge de cap element del domini.

Poden haver elements de B que siguin imatge de més d'un element de A.

Exercici resolt

1. La taula representa valors d'una funció. Completa els forats que falten.

SOLUCIÓ:

Observa que les imatges de cada valor es van obtenint multiplicant per 2 i sumant després 5.

x	f(x)
4	13
5	15
6	17
8	21
9	23

Pera calcular la imatge de 8:

$2 \cdot 8 + 5 = 21$

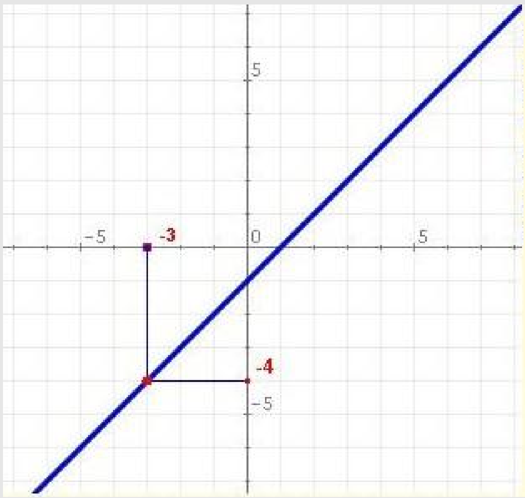
Per calcular l'antiimatge de 23:

$$\frac{23-5}{2} = 9$$

Exercicis resolts

2. Calcula en la següent gràfica f (– 3).

SOLUCIÓ:



Per calcular la imatge d'un determinat valor de a sobre la gràfica de la funció, tracem una perpendicular a OX que passi per x = a, fins que talli la gràfica. L'ordenada del punt de tall serà el valor de la imatge de a, (f(a)).

$$f(-3) = -4$$

3. Fes una taula de valors per a la funció f(x) = x+1, i després dibuixa la seva gràfica de punts.

SOLUCIÓ:

Si una funcióté per fórmula f(x) = 1 x + 1, les imatges dels valors de la taula s'obtenen com s'indica:

$f(2)=1.2+1 = 3$

$f(3)=1.3+1 = 4$

$f(4)=1.4+1 = 5$

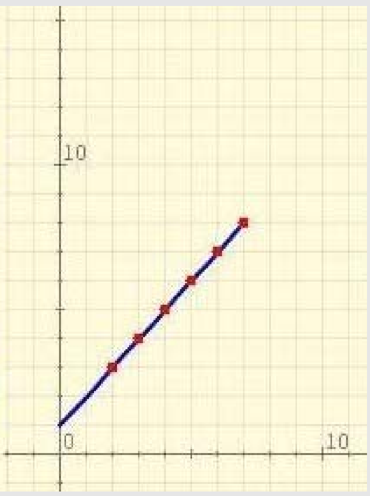
$f(5)=1.5+1 = 6$

$f(6)=1.6+1 = 7$

Per últim, per l'antiimatge, si 1 x + 1 = 8, 1 x = 8 - 1:

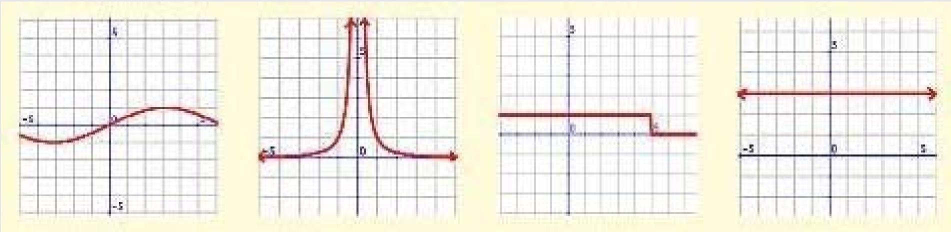
$$x = \frac{8-1}{1} = 7$$

x	f(x)
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8



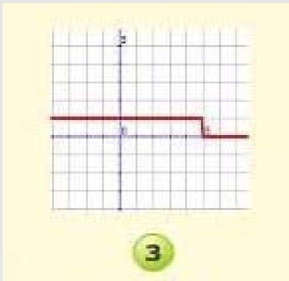
Exercicis resolts

4. Entre les següents representacions gràfiques n'hi ha una que no correspon a una funció.



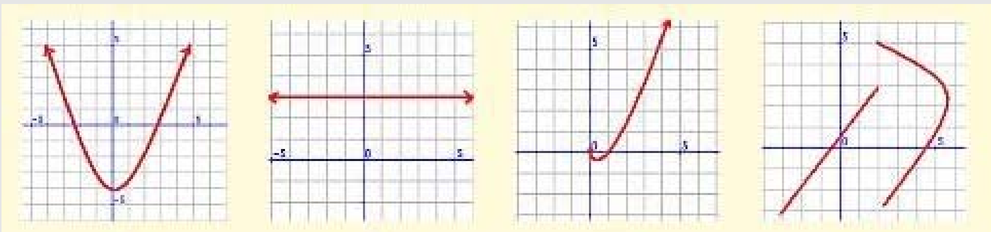
SOLUCIÓ:

Hi ha almenys un valor de *x* al que correspon més d'una imatge, i per tant no és



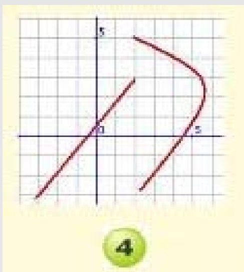
funció.

5. Entre les següents representacions gràfiques n'hi ha una que no correspon a una funció.



SOLUCIÓ:

Hi ha almenys un valor de *x* al que li correspon més d'una imatge, i per tant no és funció.



Exercicis resolts

6. Troba el domini de $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x^2+2}$

SOLUCIÓ:

$$f(x) = \frac{3x+4}{2x^2+2}$$

L'únic problema de la fórmula està en el denominador. Es pot dividir entre qualsevol nombre, excepte el 0. És a dir, $(2x^2+2)$ ha de ser diferent de zero.
Per tant:
El domini serà el CONJUNT DELS NOMBRES REALS EXCEPTE ELS VALORS QUE AN·NULEN EL DENOMINADOR.

$2x^2+2 \rightarrow 2x^2 = -2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{-2}{2}}$

NO EXISTEIX L'ARREL QUADRADA D'UN NOMBRE NEGATIU. Per tant:

Domf = $\mathbb{R}$

7. Troba el domini de $f(x) = \dfrac{4x+4}{x+5}$

SOLUCIÓ:

$$f(x) = \frac{4x+4}{x+5}$$

L'únic problema de la fórmula està en el denominador. Es pot dividir entre qualsevol nombre excepte el 0. És a dir, x + 5 ha de ser diferent de zero. Per tant:
El domini serà el CONJUNT DELS NOMBRES REALS EXCEPTE ELS VALORS QUE ANUL·LEN EL DENOMINADOR

$x+5 = 0 \rightarrow x = -5 \rightarrow$ Domf = $\mathbb{R} - \{-5\}$

Exercicis resolts

8. Troba el recorregut de f(x)=2x+1

SOLUCIÓ:

$$f(x) = 2x+1$$

Anem a veure quan té sentit $2x+1 = r$ *(essent r un element genèric del recorregut)*

$2x+1 = r \rightarrow 2x = r-1 \rightarrow x = \frac{r-1}{2}$ Aquesta expressió té sentit sempre, per tant:

El recorregut de la funció és $\mathbb{R}$

9. Troba el recorregut de $f(x) = \dfrac{4}{x-4}$

SOLUCIÓ:

$$f(x) = \frac{4}{x-4}$$

Anem a veure quan té sentit $\frac{4}{x-4} = r$ *(essent r un element genèric del recorregut)*

$\frac{4}{x-4} = r \rightarrow 4 = r\,(x-4) \rightarrow \frac{4}{r} = x - 4$

$\frac{4}{r} + 4 = x \rightarrow$ L'expressió té sentit quan r és diferent de zero, per tant:

El recorregut de la funció és $\mathbb{R} - \{0\}$

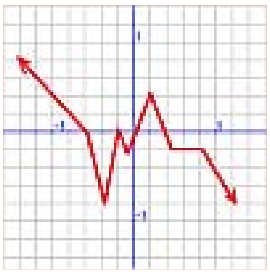
2. Representació gràfica

Gràfica d'una funció

Per representar gràficament una funció, es forma la taula de valors corresponent. Cada parella s'identifica amb un punt del pla cartesià de forma que:

- La variable independent x es representa a l'eix d'abscisses.
- La variable dependent y es representa a l'eix d'ordenades.

Segons el tipus de funció podràs unir els punts obtinguts.



O no unir-los, segons el plantejament de la situació tractada.

La representació gràfica d'una funció és una ajuda fonamental per a l'estudi de propietats de la mateixa que no són evidents en una taula o una fórmula. Parlem de conceptes tan visuals com creixement, decreixement, màxims i mínims.

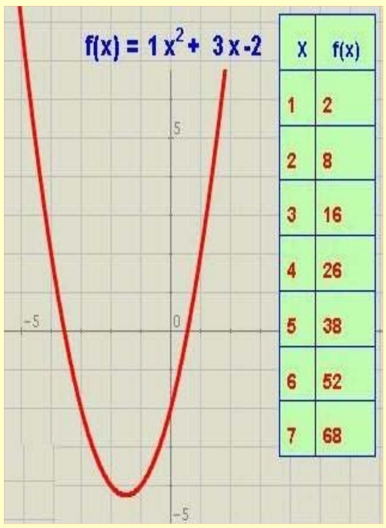
Aquests conceptes, que veurem més endavant, tenen una aplicació directa en la interpretació de l'evolució de molts processos.

A partir d'una taula:

Situem els punts sobre la gràfica, posteriorment els unim o no segons sigui el cas.

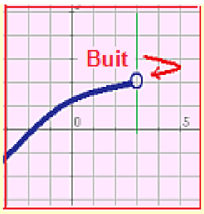
A partir d'una fórmula:

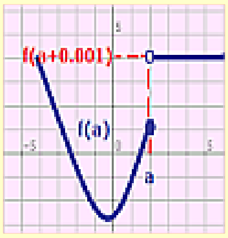
Calculem el valor d'alguns punts, i fem una taula de valors.



Uns símbols molt útils

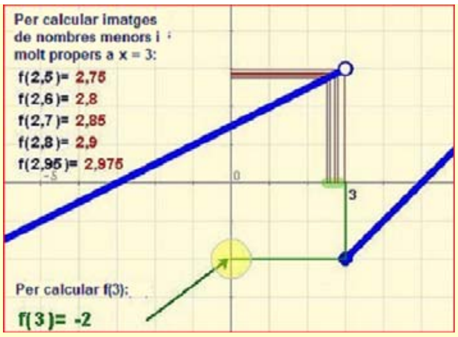
En la representació gràfica d'algunes funcions s'utilitzen símbols que ajuden a la comprensió del que passa en un punt, o a prop d'ell (en el seu entorn).
Està generalitzat l'ús d'*un punt en blanc* per indicar que aquest punt no forma part de la gràfica i un *punto ple* quan sí ho és.





En el següent exemple pots comprovar la utilitat dels símbols donats.

Agafem valors molt propers al punt del que volem saber el seu valor en f(x). Obtindrem dos valors laterals, un por la dreta i un altre per l'esquerra. Ara és quan s'ha d'estar atent al punt en blanc.



Observa que no s'obté el mateix resultat si aproximem apropant-nos per la dreta.

Exercici resolt

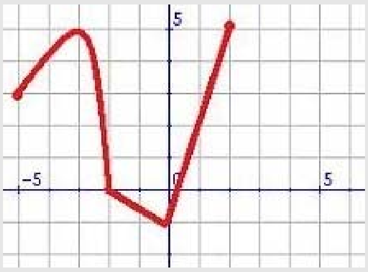
10. Representa la gràfica següent unint els seus punts.

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	2	2	1	2

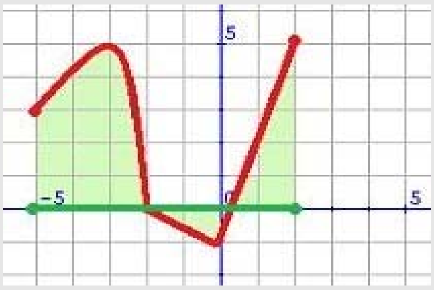
SOLUCIÓ:

Exercicis resolts

11. Expressa en forma d'interval i sobre la gràfica de la funció quin és el seu domini.

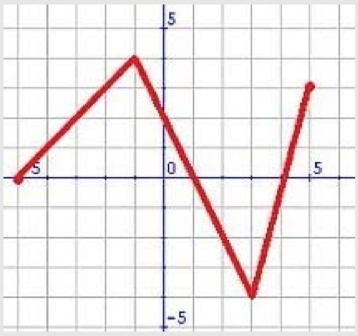


SOLUCIÓ:

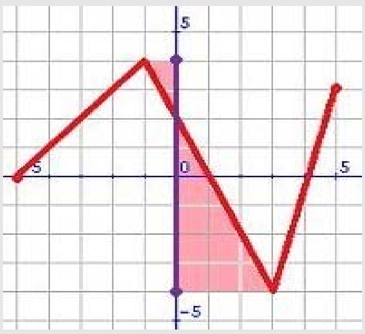


Tots els valors reals entre – 5 i 2,
tots dos inclosos, és a dir, – 5 ≤ x ≤ 2.

12. Expressa en forma d'interval i sobre la gràfica de la funció quin és el seu recorregut.



SOLUCIÓ:



Tots els valors reals entre – 5 i 4,
tots dos inclosos, és a dir, – 5 ≤ i ≤ 4.

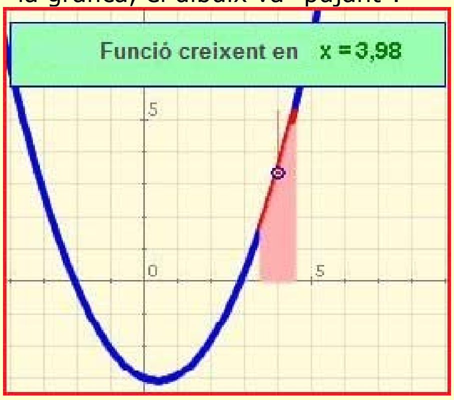
3. Propietats generals

Creixement i decreixement

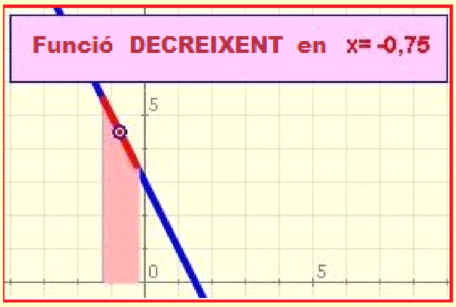
El creixement i decreixement d'una funció són conceptes *locals*. Una funció pot ser creixent en un punt i decreixent en un altre. Per això el que fem és fixar-nos en el que passa en la proximitat de cada punt, en el seu *entorn*.

Exemples

En un entorn de x=3,98, si veiem la gràfica, el dibuix va "pujant".



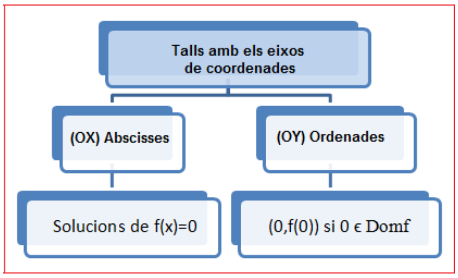
En un entorn de x=0,75, si veiem la gràfica, el dibuix va "baixant".



Tall amb els eixos

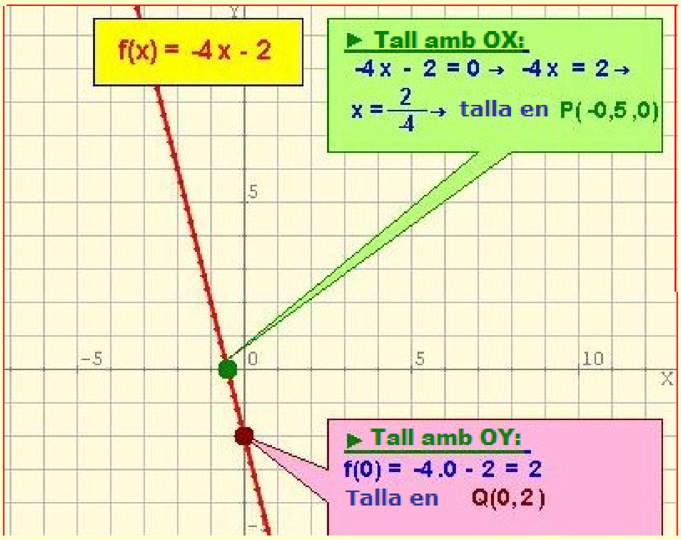
Es molt important i ajuda especialment en el coneixement de la gràfica d'una funció, localitzar els punts de talls amb els eixos de coordenades. Una funció talla com a màxim en un punt l'eix d'ordenades (0,f(0)) (en caso que x=0 pertanyi al domini de f).

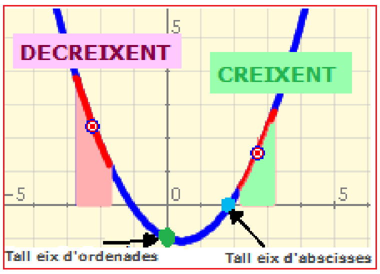
Una funció pot tallar l'eix d'abscisses qualsevol número de vegades (inclús infinites) tantes com solucions tingui f(x) = 0.



Exemple

Calcula els punts de tall con els eixos de la funció:
f (x) = − 4x − 2





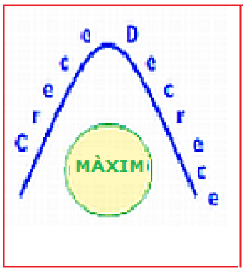
RESUM

Decreixent en un punt quan "baixa" en tots els punts del seu entorn.

Creixent en un punt quan "puja" en tots els punts del seu entorn.

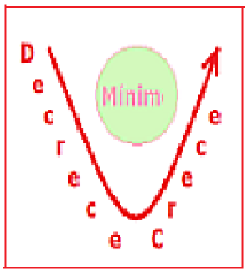
Màxims i mínims relatius

Una funció presenta un *màxim* en un punt si és creixent a l'esquerra d'aquest punt i decreixent a la dreta.



Un màxim és anàleg al cim d'una muntanya.

Una funció presenta un *mínim* en un punt si és decreixent a l'esquerra d'aquest punt i creixent a la dreta.



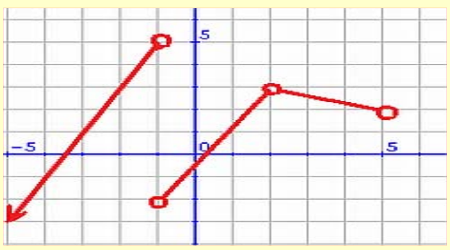
Un mínim es anàleg al punt més baix en un vall.

Una mateixa funció pot tenir varis màxims (anàleg per a mínims), per això es denominen *relatius*.
Al major dels màxims (al menor dels mínims) se l'anomena *màxim absolut (mínim absolut)*. Aquest és únic ja que és absolut a la funció.

*Tenim que un canvi de creixent a decreixent o l'inrevés és la característica per a un **possible** extrem, màxim o mínim.*

Exemple

Aquesta gràfica no té extrems.



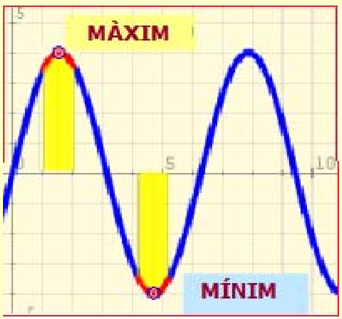
Exemple

En la següent gràfica de la funció podem observar els conceptes de màxims i mínims.

En el punt (1,5, 4) analitzem màxims.

Para x= 1,5, tenim que f(1,5) = 4. Tal i com apareix a la gràfica, en un entorn de x=1,5, els valors de la funció són menors a f(1,5) = 4, queda clar que en un voltant de (1,5 ,4) qualsevol punt es troba gràficament per sota d'aquest, tant a la dreta como a l'esquerra. Resulta ser un màxim.

Observa també que a l'esquerra del màxim la funció és creixent i a la seva dreta decreixent.



Anàleg com un mínim per al punt (4,5, – 4).
Qualsevol valor que donem en un entorn proper d'aquest punt aconsegueix valors de f(x) majors que –4, és a dir, el valor que aconsegueix en f(x), x= 4,5, és el menor en aquest entorn.

Observa també que a l'esquerra del mínim la funció és decreixent i a la seva dreta creixent.

Exercicis resolts

13. Calcula els punts de tall amb els eixos de les funcions següents:

a) $f(x)=4x+1$ b) $f(x)=x^2-8x+15$ c) $f(x)=\dfrac{5}{x}$

SOLUCIÓ:

a)

$f(x) = 4x+1$

Tall amb OX $\rightarrow 4x+1 = 0 \rightarrow 4x = -1 \rightarrow x = \dfrac{-1}{4}$

La funció talla a OX en el punt: $\left(\dfrac{-1}{4}, 0\right)$

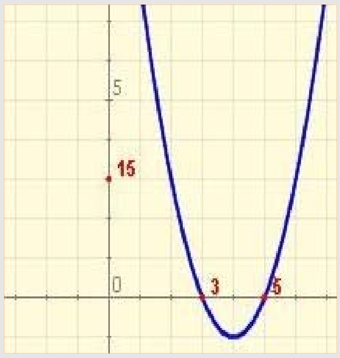
Tall amb OY $\rightarrow f(0) = 4 0+1 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow$ Per tant:
La funció talla a OY en $(0, 1)$

b)

$f(x) = x^2 - 8x+15$

Tall amb OX $\rightarrow x^2 - 8x+15 = 0 \rightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} \rightarrow$
$x = 5$, $x = 3$ La funció talla a OX en $(5, 0)$ i en $(3, 0)$

Tall amb OY $\rightarrow f(0) = 0^2 - 8.0 + 15 \rightarrow f(0) = 15 \rightarrow$ Per tant:
La funció talla a OY en $(0, 15)$

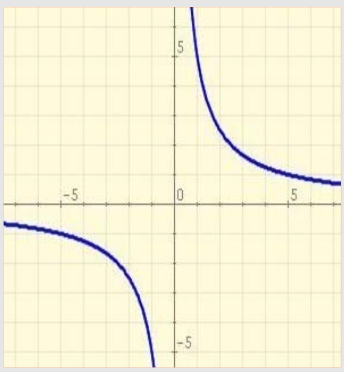


c)

$f(x) = \dfrac{5}{x}$

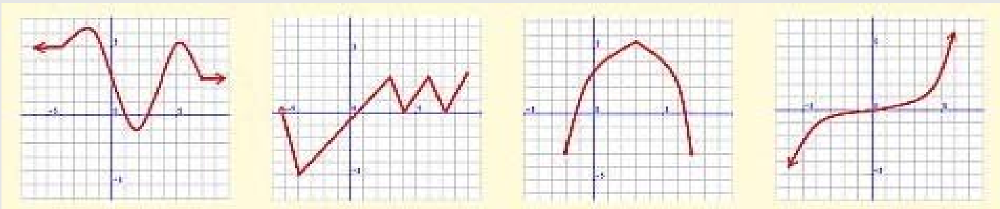
Tall amb OX $\rightarrow \dfrac{5}{x} = 0 \rightarrow 5 = 0 \rightarrow$ Impossible. Per tant:
La funció no talla a OX

Tall amb OY $\rightarrow f(0) = \dfrac{5}{0} \rightarrow f(0) =$ *No es pot calcular* $\rightarrow$ Per tant:
La funció no talla a OY

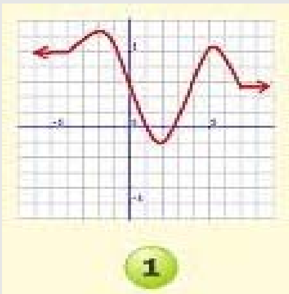


Exercicis resolts

14. Entre les següents funcions indica la que correspondria a una funció decreixent en el punt de abscissa x=0.

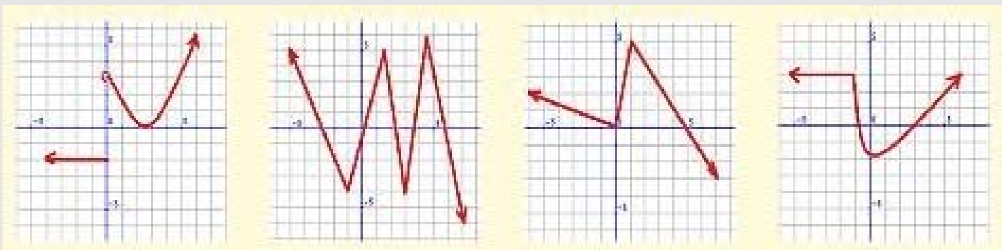


SOLUCIÓ:

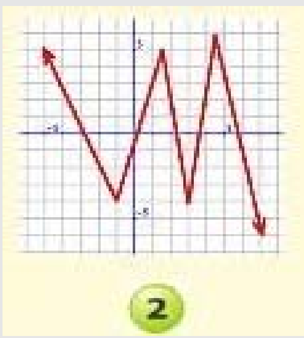


En un entorn del 0 la funció baixa

15. Entre les següents funcions indica la que correspondria a una funció creixent en el punt d'abscissa x=0.



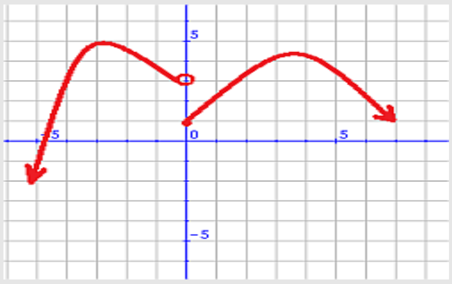
SOLUCIÓ:



En un entorn del 0, s'acompleix que la funció puja

Exercicis resolts

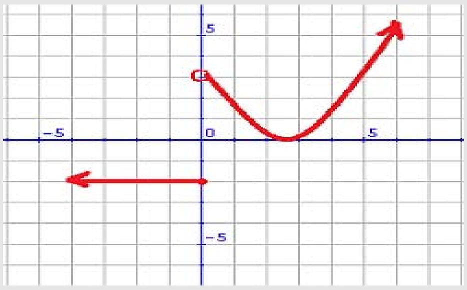
16. Indica les coordenades del punt en el que creguis que la funció assoleix un màxim.



SOLUCIÓ:

Hi ha dos màxims relatius, $M_1 = (-2{,}75\ ,5)$ i $M_2 = (3{,}5,\ 4{,}25)$

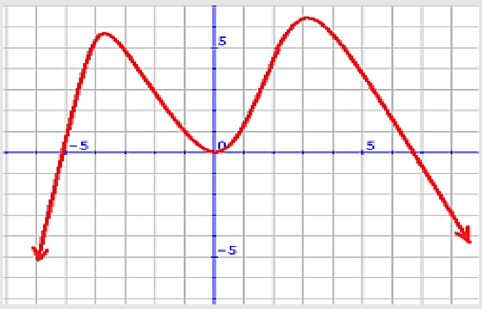
17. Indica les coordenades del punt en el que creguis que la funció assoleix un mínim.



SOLUCIÓ:

Hi ha un mínim, $m_1 = (2{,}5,\ 0)$.

18. Indica les coordenades del punt en el que creguis que la funció assoleix un extrem.



SOLUCIÓ:

Hi ha un mínim, $m_1 = (0{,}0)$, i dos màxims $M_1 = (-3{,}75\ ,5{,}75)$, $M_2 = (3{,}25\ ,6{,}25)$.

4. Primeres funcions elementals

Funció de proporcionalitat directa

En moltes situacions dues variables estan relacionades de manera que quan una augmenta l'altra ho fa també i anàlogament quan disminueix, guardant sempre la mateixa relació. Són magnituds directament proporcionals.

Exemple

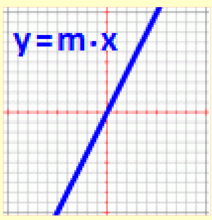
Imagina que aquest cap de setmana decideixes fer una excursió en bicicleta, amb una velocitat constant de 10 km/h, i que condueixes amb la teva bicicleta durant 2 hores, l'espai recorregut és de 20 km. Què passaria si fossis a més velocitat durant el mateix temps?

Per a un temps determinat:

A més velocitat, més espai recorregut.

A menys velocitat, menys espai recorregut.

Les funcions que relacionen aquest tipus de magnituds s'anomenen funcions de proporcionalitat directa. La seva gràfica segueix sempre un mateix patró: una recta que passa per l'origen de coordenades.

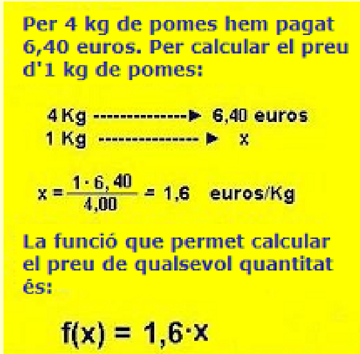


**A més, més
i
a menys, menys"**

El valor de "m" es correspon amb la constant de proporcionalitat directa.

Exemple

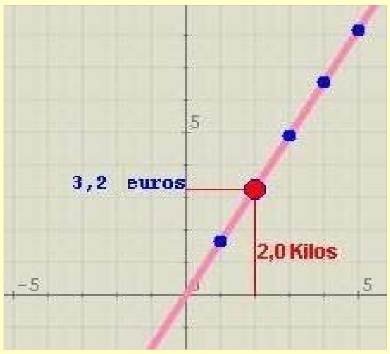
Plantegem el problema i el resolem de forma algebraica.



Podem construir una taula amb la constant de proporció m=1,6. A més quilograms més euros necessito.

x	f(x)
1,0	1,6
2,0	3,2
3,0	4,8
4,0	6,4
5,0	8,0

Si la representem gràficament, obtindrem una recta, de la que podem interpolar dades.

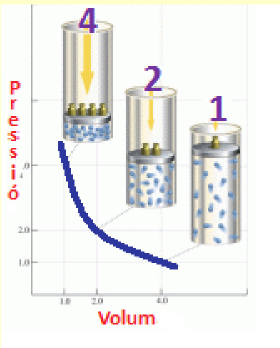


Funció de proporcionalitat inversa

En moltes situacions s'observa que dues variables estan relacionades de manera que quan una augmenta l'altra disminueix, però en tot moment el seu producte és constant. Són magnituds inversament proporcionals.

Exemple

Si vols pots fer la prova amb una bossa plena de papers, a major pressió que facis sobre els papers, aquests s'aniran esclafant i ocupant menys volum.



A temperatura constant:

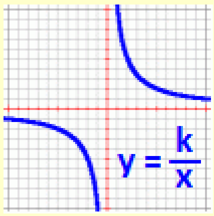
P V=k

A més pressió, menys volum

A menys pressió, més volum

Les funcions que relacionen aquest tipus de magnituds s'anomenen funcions de proporcionalitat inversa.

La seva gràfica segueix sempre un mateix patró: la hipèrbola.



"A més, menys i a menys, més"

El valor de "k" es correspon amb la constant de proporcionalitat inversa.

Exemple

Plantegem el problema i el resolem.

6 nàufrags disposen d'aigua per 10 dies. Si volem saber quant de temps tindria aigua un d'ells:

6 nàufrags -------------▶ 10 dies
1 nàufrag -------------▶ x

x = 60 dies

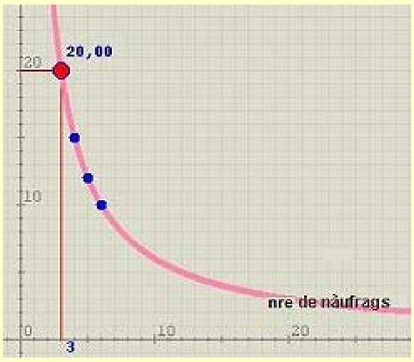
La funció que permet relacionar ambdues magnituds és:

$$f(x) = \frac{60}{x}$$

Podem construir una taula amb la constant de proporció k=60. A menys nàufrags, més dies.

f(x)	30	20	15	12	10
x	2	3	4	5	6

Si la representem gràficament, obtindrem la branca d'una hipèrbola.



Exercicis resolts

19. Classifica la relació entre les magnituds següents:

Velocitat i temps en fer un recorregut, despesa de llum i kilowatts consumits, radi i longitud de la circumferència, altura i pes d'una persona, pressió i volum que ocupa un gas, velocitat i espai en un temps fix.

SOLUCIÓ:

	Inversa	Directa	Cap
Velocitat i temps en fer el recorregut	X		
Despesa de llum i kilowatts consumits		X	
Radi i longitud de la circumferència		X	
Altura i pes d'una persona			X
Pressió i volum que ocupa un gas	X		
Velocitat i espai en un temps fix		X	

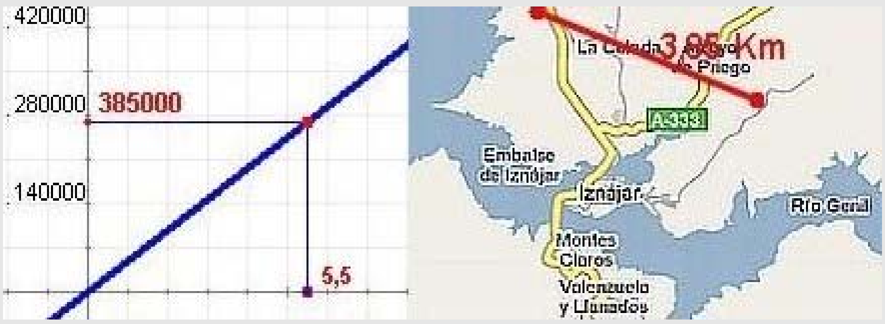
20. Un mapa té per escala 1:70000. Qualsevol distància en el mapa es tradueix en el seu corresponent realitat i a l'inrevés.

1. Escriu la funció que relaciona la distància i representa-la gràficament.
2. Calcula la distància corresponent a 5,50 cm en el mapa.

SOLUCIÓ:

a) LLa funció seria $f(x) = 70000 \cdot x$ (cada unitat en el mapa es converteix en 70000), a més cm en el mapa més distància en la realitat. Proporcionalitat directa.

b) LLa distància del mapa de 5,50 cm correspon amb $f(5{,}50)$, resulta:
$f(5{,}50) = 70000 \cdot 5{,}50 = 385000$ cm = 3,85 km



Exercicis resolts

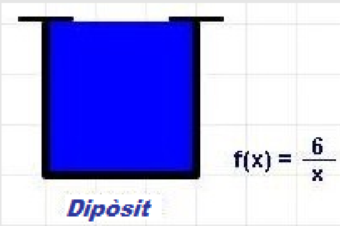
21. Una aixeta de cabal fix ompli un dipòsit en 6 hores. Si en lloc d'un hi hagués 4 aixetes.

a) Escriu i representa la funció que correspon a la relació entre el nombre d'aixetes i el temps que triga en omplir el dipòsit.
b) Quant temps trigaria?

SOLUCIÓ:

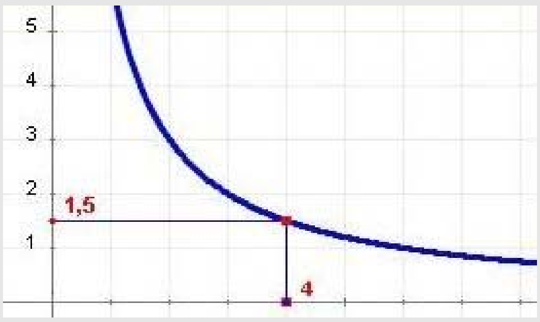
a) SHi ha més aixetes per omplir el dipòsit, trigarà menys temps en omplir-se, per tant, és una funció de proporcionalitat inversa.

La funció seria $f(x) = \frac{6}{x}$



b) El temps per a 4 aixetes, és el resultat que correspon a f (4).

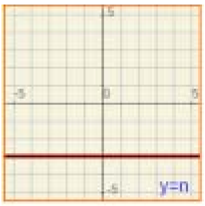
$$f(x) = \frac{6}{4} = 1{,}5 \text{ hores}$$



5. Funcions la gráfica de les quals és una recta

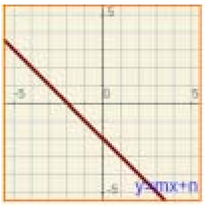
Les funcions la gráfica de les quals és una línia recta són totes de la forma f(x)=mx+n, és a dir, són polinomis de grau u, quan m és diferent de zero, o de grau zero si m=0.

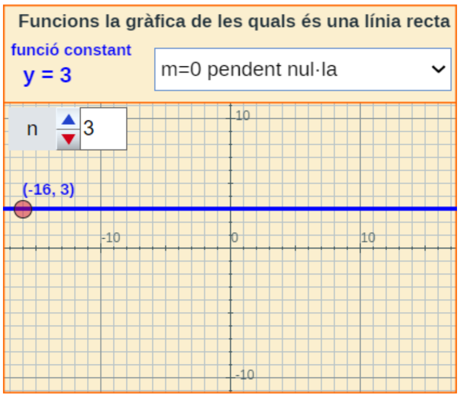
- **y=n** funció **constant**, la gràfica és una línia recta horitzontal.

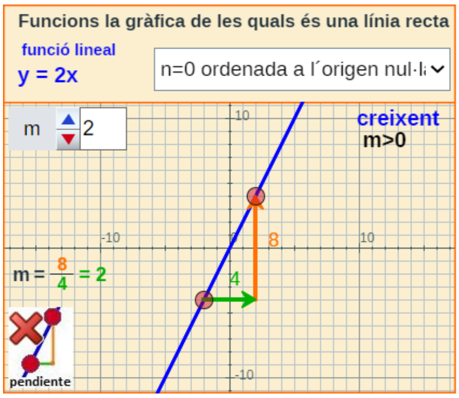


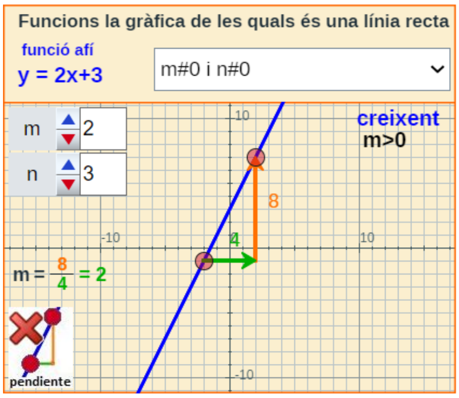
- **y=mx** amb m≠0
  És una funció de proporcionalitat directa o **lineal** i passa per l´origen de coordenades.

- **y=mx+n** amb m≠0 y n≠0
  És una funció **afí** i no passa per l´origen de coordenades



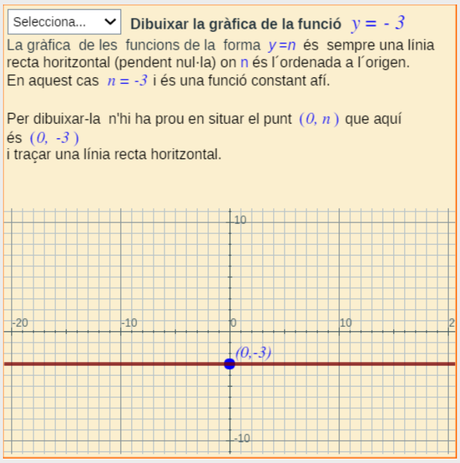


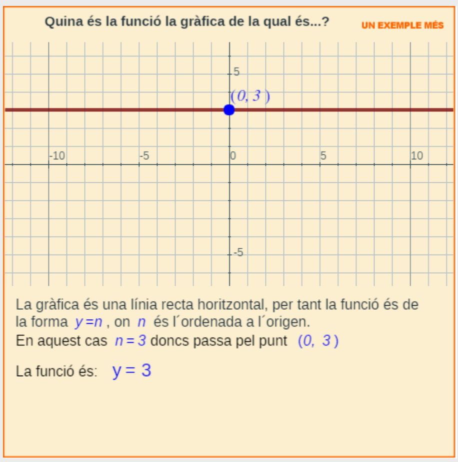




Exercicis resolts

22. Dibuixar la gràfica d’una funció del tipus y = n i esbrinar la funció la gràfica de la qual és una recta horitzontal.





Exercicis resolts

23. Dibuixar la gràfica d'una funció del tipus y = mx

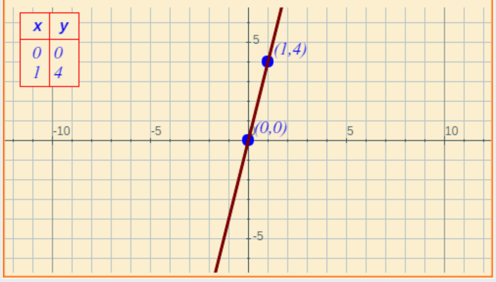
Selecciona... **Dibuixar la gràfica de la funció** $y = 4x$

La gràfica de les funcions de la forma $y = mx$ és sempre una línia recta. m és el pendent i l´ordenada a l´origen és zero. En aquest cas $m = 4$ i és una funció lineal.

Per dibuixar-la podem optar per: dibuixar dos punts

Un punt pot ser $(0, 0)$, doncs com que és lineal passa per l´origen. I l´altre la imatge del valor de x que vulguem. Per exemple si $x = 1$ llavors $y = 4 \cdot 1 = 4$. Dibuixem $(1, 4)$ i unim els dos punts en una línia recta.

x	y
0	0
1	4

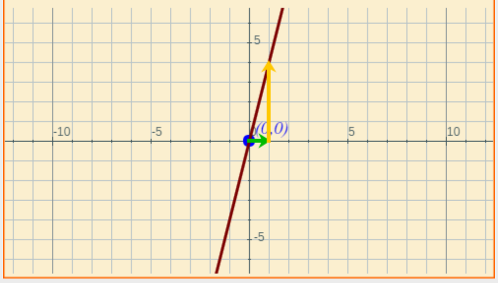


Selecciona... **Dibuixar la gràfica de la funció** $y = 4x$

La gràfica de les funcions de la forma $y = mx$ és sempre una línia recta. m és el pendent i l´ordenada a l´origen és zero. En aquest cas $m = 4$ i és una funció lineal.

Per dibuixar-la podem optar per: dibuixar un punt i el pendent

El punt pot ser $(0, 0)$, doncs com que és lineal passa per l´origen. A partir del punt ens desplacem una posició a la dreta i 4 cap amunt doncs el pendent $m = 4$ és positiu. Unim el punt al qual hem arribat amb l´anterior en una línia recta.



24. Dibuixar la gràfica d'una funció del tipus y = mx + n

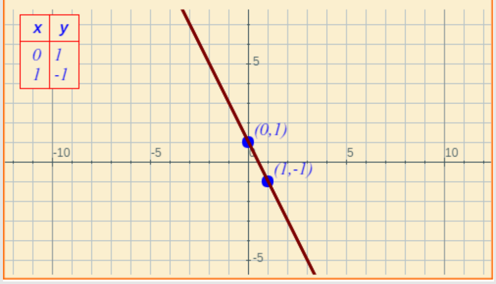
Selecciona... **Dibuixar la gràfica de la funció** $y = -2x + 1$

La gràfica de les funcions de la forma $y = mx + n$ és sempre una línia recta. m és el pendent i n és l´ordenada a l´origen. En aquest cas $m = -2$ i $n = 1$ i és una funció afí.

Per dibuixar-la podem optar per: dibuixar dos punts

Un pot ser $(0, n)$ correspondent a $x = 0$. Aquí seria $(0, 1)$. I l´altre la imatge del valor de x que vulguem. Per exemple si $x = 1$ llavors $y = -2 \cdot 1 + 1 = -1$. Dibuixem $(1, -1)$ i unim els dos punts en una línia recta.

x	y
0	1
1	-1

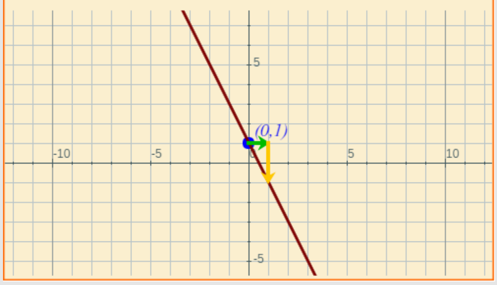


Selecciona... **Dibuixar la gràfica de la funció** $y = -2x + 1$

La gràfica de les funcions de la forma $y = mx + n$ és sempre una línia recta. m és el pendent i n és l´ordenada a l´origen. En aquest cas $m = -2$ i $n = 1$ i és una funció afí.

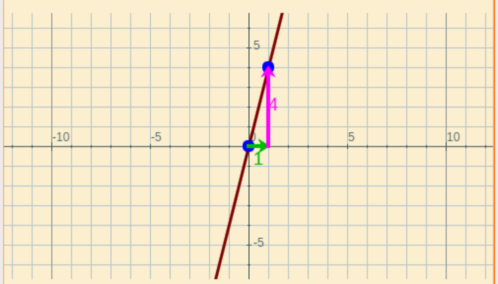
Per dibuixar-la podem optar per: dibuixar un punt i el pendent

El punt pot ser $(0, n)$ correspondent a $x = 0$. Aquí seria $(0, 1)$. A partir del punt ens desplacem una posició a la dreta i 2 cap avall doncs el pendent $m = -2$ és negatiu. Unim el punt al qual hem arribat amb l´anterior en una línia recta.



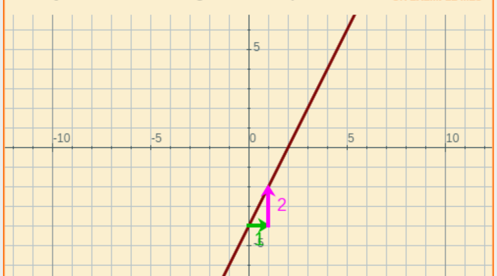
25. Esbrinar la funció la gràfica de la qual és...

Quina és la funció la gràfica de la qual és...? UN EXEMPLE MÉS



La gràfica és una línia recta que passa per l´origen de coordenades $(0,0)$, per tant la funció és de la forma $y = mx$. És lineal.
Per trobar el pendent n'hi ha prou en conèixer un altre punt. Per exemple, per $x = 1$, en aquest cas, tenim que $y = 4$.
Passa per $(1, 4)$.
Així doncs el pendent és $m = \frac{4}{1} = 4$.
La funció és: $y = 4x$

Quina és la funció la gràfica de la qual és...? UN EXEMPLE MÉS



La gràfica és una línia recta inclinada que no passa per l´origen de coordenades, per tant la funció és afí de la forma $y = mx + n$, on n és l´ordenada a l´origen i m és el pendent.
En aquest cas $n = -4$ doncs passa pel punt $(0, -4)$ i $y = mx - 4$
Per trobar el pendent n'hi ha prou en conèixer un altre punt. Per exemple, si $x = 1$, tenim que $y = -2$. Passa per $(1, -2)$.
Per tant ha de ser $-2 = m \cdot 1 - 4$ i en conseqüència
$m = \frac{-2 - (-4)}{1} = 2$ La funció és: $y = 2x - 4$

Per practicar

1. Completa els valors de la següent taula:

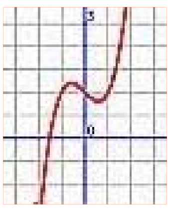
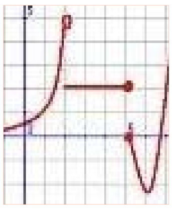
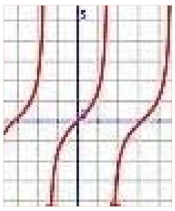
x	4	5	6	8	
f(x)	12	14	16		22

2. Amb la funció f(x)= 2x+1 calcula la imatge de – 5. Dibuixa la la gràfica d'aquesta funció.

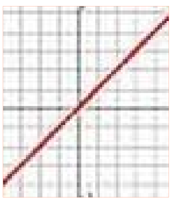
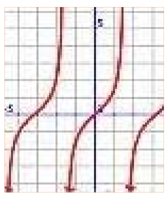
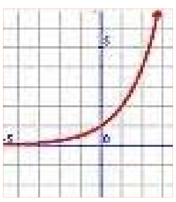
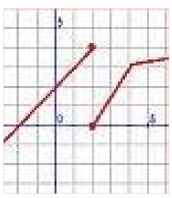
3. Completa la taula de valors corresponent a la funció f(x) = 4x+3. Dibuixa la gràfica d'aquesta funció.

x	2	3	4	5	
f(x)					31

4. Entre les següents gràfiques n'hi ha una que no correspon a la d'una funció. Justifica quina és la seva gràfica.

5. Entre les següents gràfiques n'hi ha una que no correspon a la d'una funció. Justifica quina és la seva gràfica.

6. Calcula el domini de la funció:

$$f(x)=2x^3 + x^2 + 5x + 5$$

7. Calcula el domini de la funció:

$$f(x)=\frac{4x+2}{x-3}$$

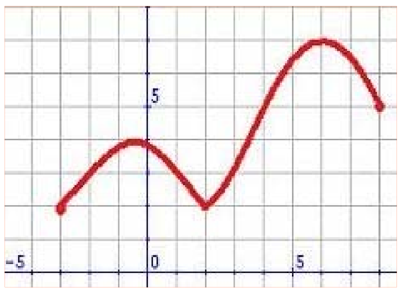
8. Calcula el recorregut de la funció:

$$f(x)=\frac{-5}{x}$$

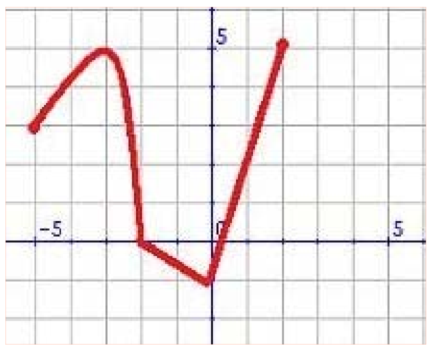
9. Calcula el recorregut de la funció:

$$f(x)=\frac{4}{x+5}$$

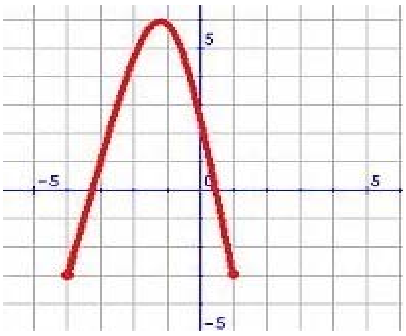
10. Determina de forma gràfica i amb intervals el domini de la següent gràfica:



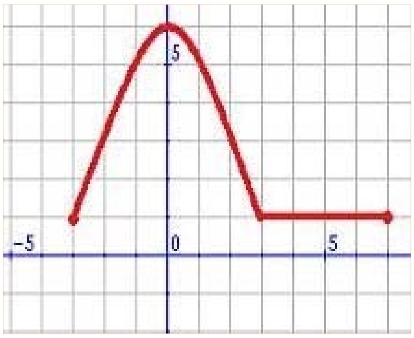
11. Determina de forma gràfica i amb intervals el domini de la següent gràfica:



12. Determina de forma gràfica i amb intervals el recorregut de la següent gràfica:



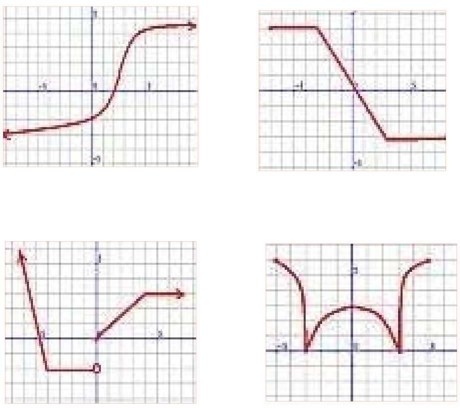
13. Determina de forma gràfica i amb intervals el recorregut de la següent gràfica:



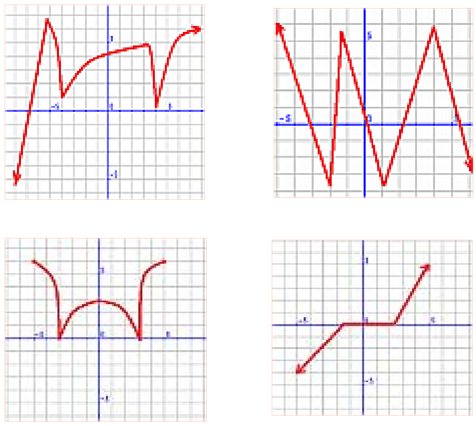
14. Calcula els punts de tall amb els eixos de la funció f(x)=x+5.

15. Troba els punts de tall amb els eixos de la funció f(x)=5 – 3x.

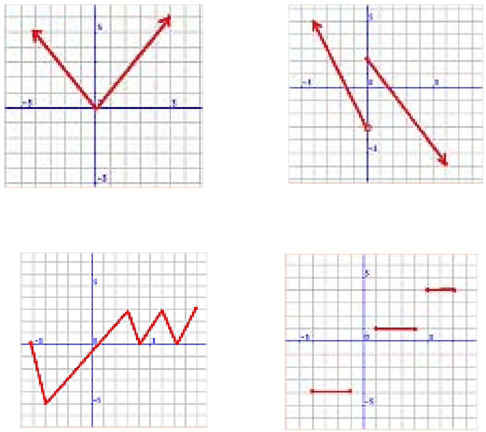
16. De les següents funcions indica la que es correspon amb una funció decreixent en el punt d'abscissa x=0.



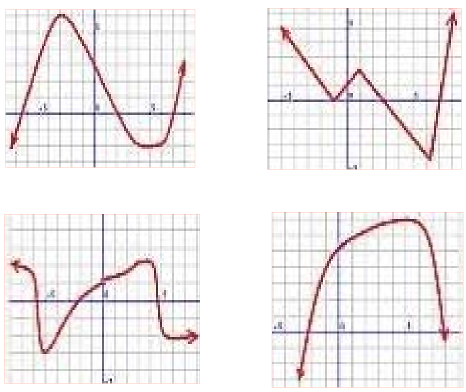
17. De les següents funcions indica la que es correspongui amb una funció creixent en el punt d'abscissa x=0



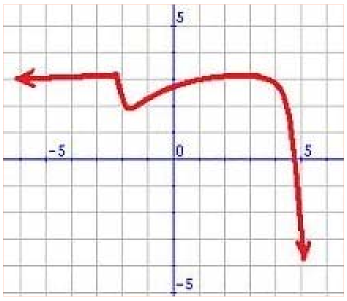
18. De les següents funcions indica la que es correspongui amb una funció creixent en el punt d'abscissa x=0



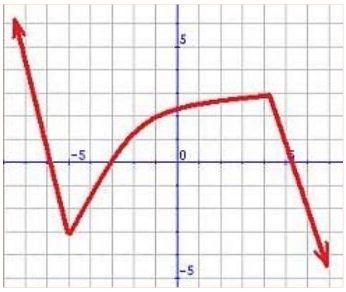
19. De les següents funcions indica la que es correspongui amb una funció decreixent en el punt d'abscissa x=0.



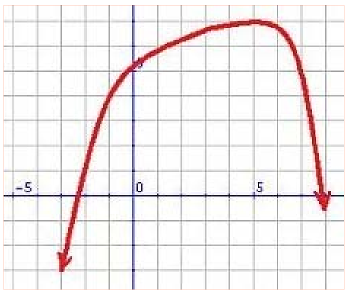
20. A la gràfica següent indica les coordenades del punt on s'assoleix un mínim.



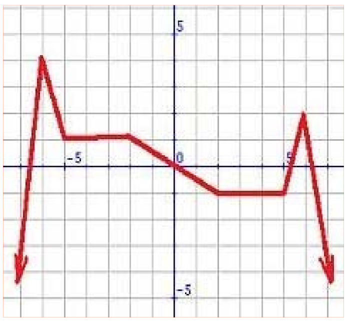
21. A la gràfica següent indica les coordenades del punt on s'assoleix un mínim.



22. A la gràfica següent indica les coordenades del punt on s'assoleix un màxim.



23. A la gràfica següent indica les coordenades del punt on s'assoleix un màxim.



24. Classifica la relació entre les magnituds següents:
- Calories i quantitat de pastís
- Velocitat i espai en un temps fix
- Costat d'un quadrat i perímetre
- Nombre d'entrades i recaptació
- Aficionats al cine i preu d'entrada
- Despesa en combustible i nombre de litres
- Nombre de persones i part de pastís
- Temps que està la llum encesa i cost
- Nombre de dies festius i hores de sol

25. Una aixeta de cabal fix omple un depòsit en 8 hores. Escriu la funció que relaciona el nombre d'aixetes i el temps. Si en lloc de un n'hi hagués 5, quan trigaria?

26. Una aixeta de cabal fix omple un depòsit en 5 hores. Escriu la funció que relaciona el nombre d'aixetes i el temps. Si en lloc de un n'hi hagués un més, quan trigaria?

27. Un mapa té per escala 1:90000. escriu la funció que correspon amb l'escala. Calcula la distància que correspondria amb 2 cm en un mapa.

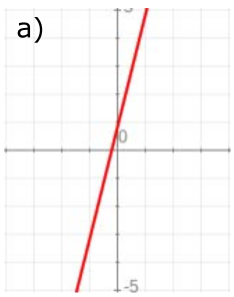
28. Un mapa té per escala 1:60000. escriu la funció que correspon amb l'escala. Calcula la distància que correspondria amb 4,5 cm en un mapa.

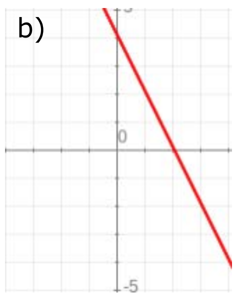
29. Dibuixa la gràfica de les funcions:

a) $y = 2x - 1$

b) $y = -2x - 4$

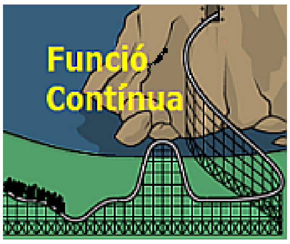
30. Determina l'expresió de la funció la gràfica de la qual és:





Per saber-ne més

Idea sobre continuïtat

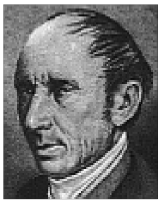


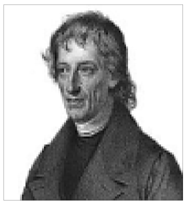
La primera idea que imaginem sobre continuïtat és la d'un traç que dibuixem sense aixecar el llapis del paper.

El pas del temps, el desplaçament d'un cotxe que es dirigeix cap a un lloc determinat, el creixement de las plantes, dels nens, de tots els essers vius, les diferents posicions del sol al cel durant el dia...multitud de situacions que s'associen intuïtivament cap a relacions funcionals on la continuïtat és característica comuna.

Des del punt de vista matemàtic; la continuïtat és un concepte "local", és a dir que per estudiar la continuïtat en un determinat valor s'ha d'observar com es comporta la funció al voltant d'aquest mateix valor (entorn d'aquest punt).

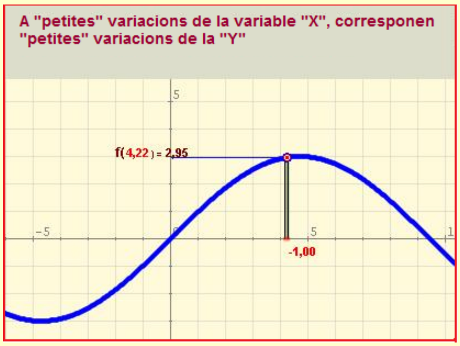
Per a que una funció sigui contínua en un punt del seu domini ha de comportar-se de forma regular a les proximitats del mateix. No han d'observar-se salts, en el sentit de què quan la variable independent varia molt poc, a la variable dependent no s'observen diferències significatives. La traducció al llenguatge matemàtic d'aquesta propietat no és fàcil; per a la perfecta definició de continuïtat en un punt s'ha d'anar a tot un invent matemàtic; el **concepte de límit** i als treballs, entre d'altres, de matemàtics com:

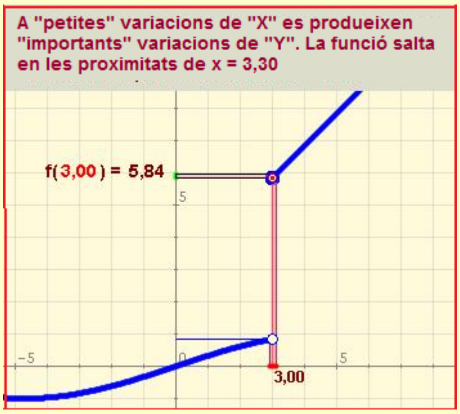

Cauchy


Bolzano


Weierstrass

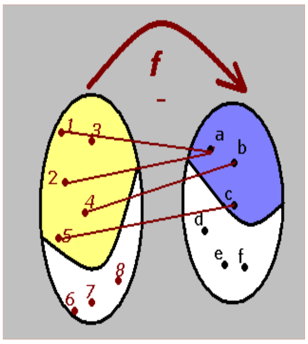
La imatge tradueix les conseqüències del que passa amb petites variacions de la variable independent en funcions contínues en un punt i funcions discontínues en un punt.





Recorda el més important

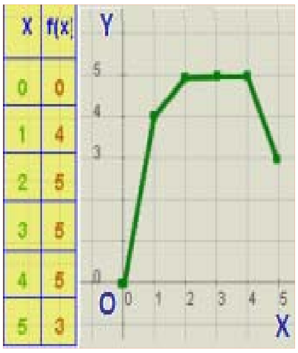
Es diu que una correspondència entre dos conjunts es una ***funció***, quan **a cada element del primer conjunt se li fa correspondre de forma única un element del segon** que anomenarem *imatge.*



Domini o camp d'existència és el conjunt de tots els valors que pren la variable independent.

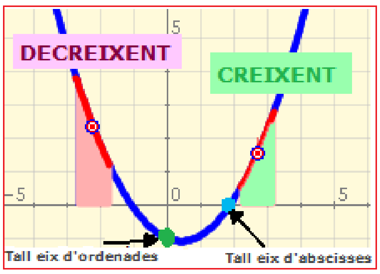
Recorregut, imatge o rang és el conjunt de valors que pren la variable dependent.

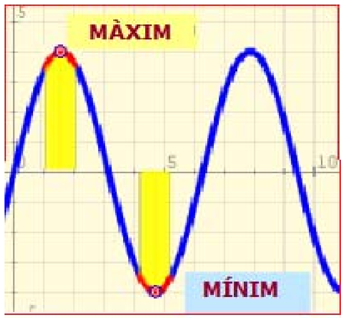
Per representar gràficament una funció, es forma la taula de valors corresponent. Cada parella s'identifica amb un punt del pla cartesià.



Representem a l'eix d'abscis-ses la variable independent.
Usualment es denota com x, i l'eix com OX.
La variable dependent es representa a l'eix d'ordena-des. Se'l acostuma a denotar com y.
I l'eix como OY.

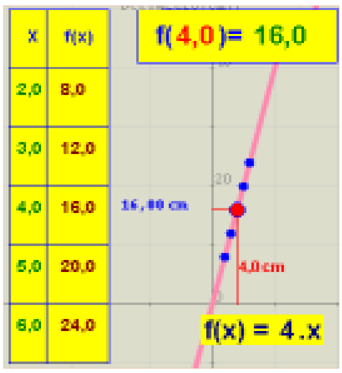
Punts de tall amb els eixos, creixement





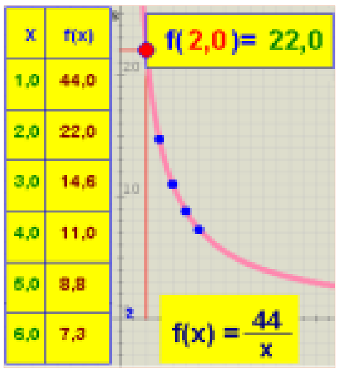
Extrems d'una funció

Funció de proporcionalitat directa



"A més... més i a menys... menys"
La gràfica és una **línia recta** que passa per l'origen de coordenades.

Funció de proporcionalitat inversa



"A més... menys i a menys... més"
La gràfica és una **hipèrbola equilàtera.**

Autoavaluació

1. Una funció associa a cada valor el resultat de multiplicar per 1 i restar 2. Quina és la imatge de 0?

2. Una funció associa a cada nombre el seu doble menys 8. Quin és el nombre que té com imatge – 8?

3. Una funció té per fórmula f(x)=7x+2. Indica quin és el valor f(5)?

4. Una funció té per fórmula $f(x)=\frac{4}{x}$. Indica quin és el valor de x en $f(x)=\frac{4}{8}$.

5. Un conductor va a una velocitat uniforme de 70 km/h. Indica la distància que haurà recorregut després de 5 hores.

6. De mitjana una persona inspira un cop cada 2 segons. Si per cada inspiració consumeix 3 litres d'aire, calcula el volum d'aire que ha consumit en 14 hores.

7. Si una funció té per fórmula $f(x)=\frac{x-12}{x-4}$. Quin valor no pertany al seu domini?

8. Indica el valor en el qual la funció f(x)=-3x+9 talla l'eix d'abscisses (OX).

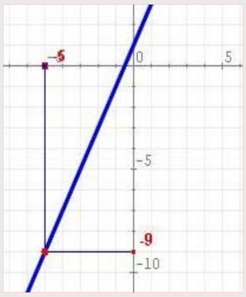
9. Indica el valor en el qual la funció f(x)=-6x-4 talla l'eix d'ordenades (OY).

10. Indica si la funció que relaciona: Costat d'un pentàgon i perímetre, és de proporcionalitat directa, inversa o cap de les dues.

Solucions dels exercicis per practicar

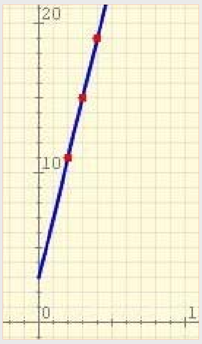
1. f(8)=20, f(9)=22

2. f(-5)=-9

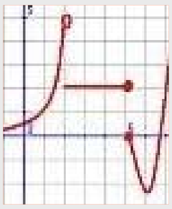


3.

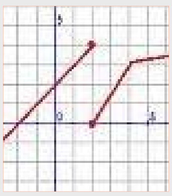
x	f(x)
2	11
3	15
4	19
5	23
7	31



4.



5.



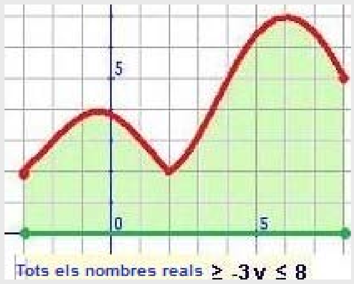
6. R= reals

7. R\{3}

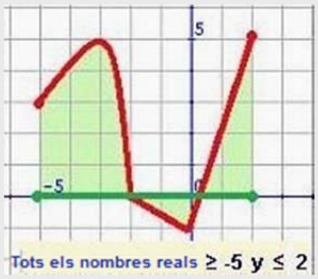
8. R\{0}

9. R\{0}

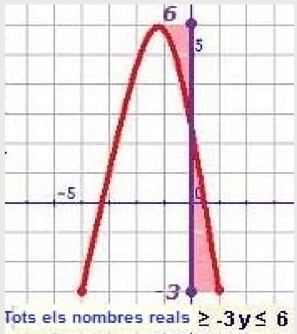
10.



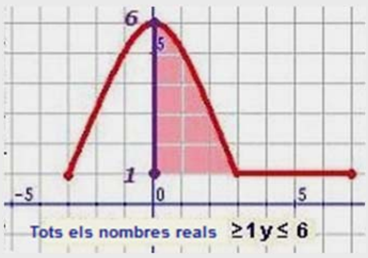
11.



12.



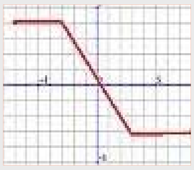
13.



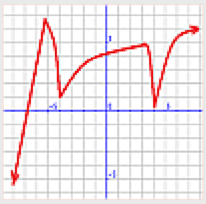
14. (− 5,0) , (0,5)

15. $(\frac{5}{3},0)$, (0,5)

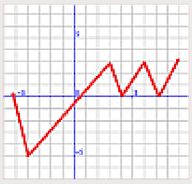
16.



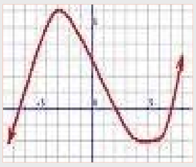
17.



18.



19.



20. (– 1,75 , 2)

21. (– 5,– 3)

22. (5,7)

23. (– 6,4) i (6,2)

24.

	Inversa	Directa	Cap
Calories i quantitat de pastís	X		
Velocitat i espai en un temps fix	X		
Costat d'un quadrat i perímetre	X		
Nombre d'entrades i recaptació	X		
Aficionats al cine i preu d'entrada			X
Despesa en combustible i nombre de litres	X		
Nombre de persones i part de pastís		X	
Temps que està la llum encesa i cost	X		
Nombre de dies festius i hores de sol			X

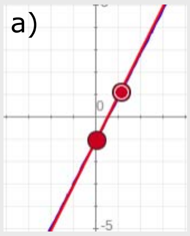
25. $f(x)=\dfrac{8}{x}$, 1,6 hores

26. $f(x)=\dfrac{5}{x}$, 2,5 hores

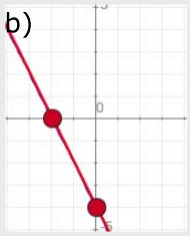
27. f(x)=90000x, 4,95 km

28. f(x)=60000x, 2,7 km

29. a)



b)



30. a) y = 4x + 1

b) y = -2x + 4

Solucions AUTOAVALUACIÓ

1. – 2
2. 0
3. 37
4. 8
5. 350
6. 75600
7. 4
8. x=3
9. y= – 4
10. Directa