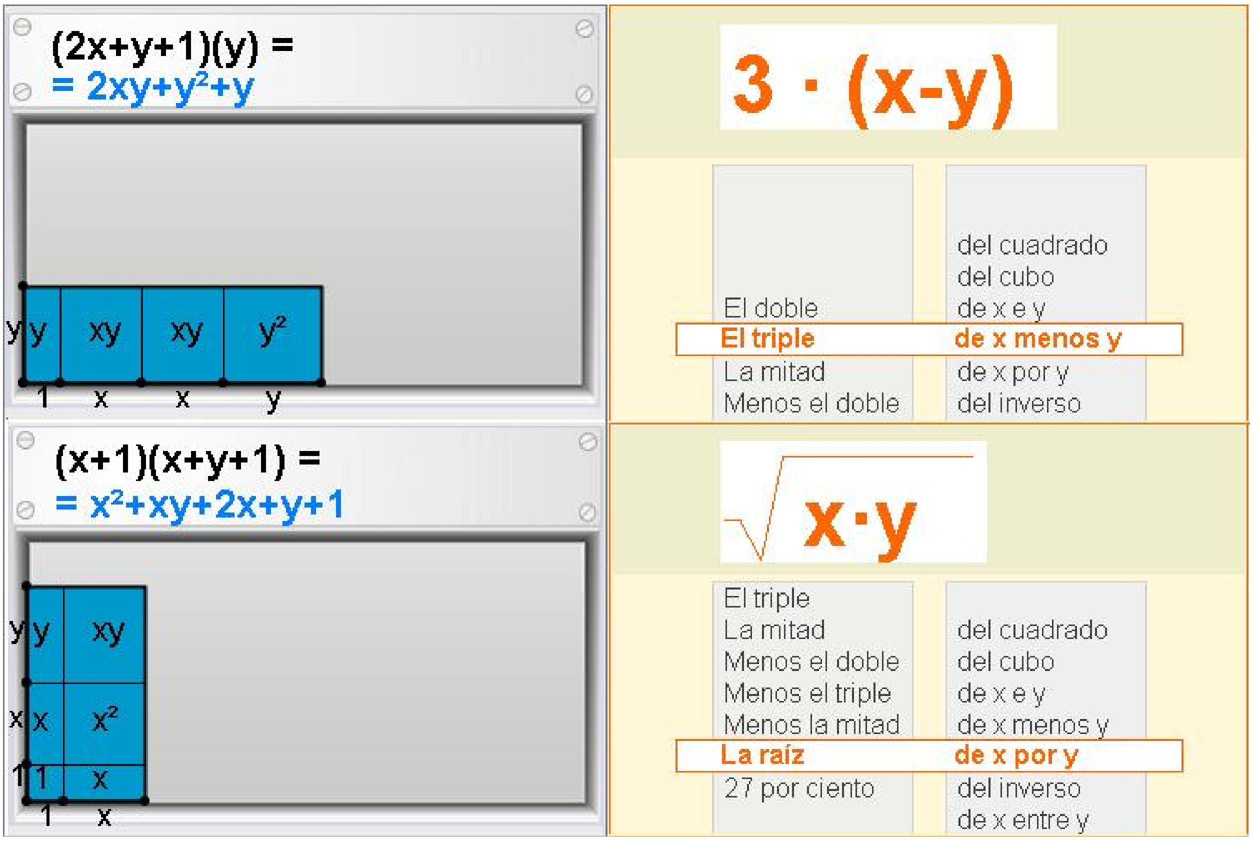
5

Expressions algebraiques

Objectius

- Crear expressions algebraiques a partir d'un enunciat.
- Trobar el valor numèric d'una expressió algebraica.
- Classificar una expressió algebraica en monomi, binomi,... polinomi.
- Operar amb monomis (sumar, restar i multiplicar).
- Operar amb polinomis (sumar, restar i multiplicar per un monomi).

Abans de començar



Expressions algebraiques

A la imatge, a l'esquerra es poden veure dos exemples en els que s'aplica la propietat distributiva del producte respecte a la suma, el gràfic explica aquesta propietat que es farà servir en aquesta unitat. Observa atentament les àrees dels rectangles i construeix figures similars per aplicar aquesta propietat.

A la dreta es mostren dues expressions algebraiques, sabries construir les diferents expressions que s'obtenen en moure las llistes grises? Per exemple, el 27 per cent del quadrat serà

$$0{,}27\ x^2$$

1. Expressions algebraiques

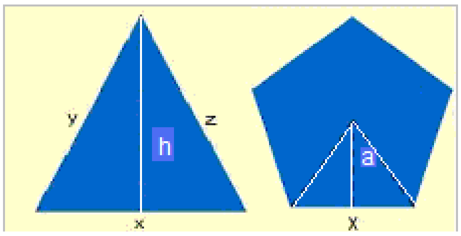
Què són?

Una **expressió algebraica** és un conjunt de nombres i lletres enllaçats per les operacions de sumar, restar, multiplicar, dividir i per parèntesis. Por exemple:

$$3+2\cdot x^2-x \quad \text{o} \quad x\cdot y-32\cdot(x\cdot y^2-y)$$

Les lletres representen valors que no coneixem i podem considerar-les com la generalització d'un nombre. Les anomenarem **variables**.

> **Nota**
> El signe de multiplicar es sobreentén davant d'una lletra o un parèntesis. Així, 3·a és equivalent a 3a, i 3·(2+x) és equivalent a 3(2+x).



El perímetre del triangle és x+y+z

L'àrea del triangle és $\frac{x\cdot h}{2}$

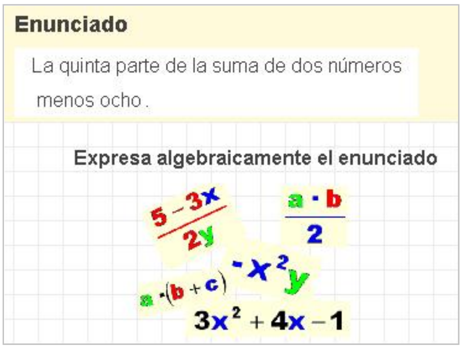
El perímetre del pentàgon és 5 x

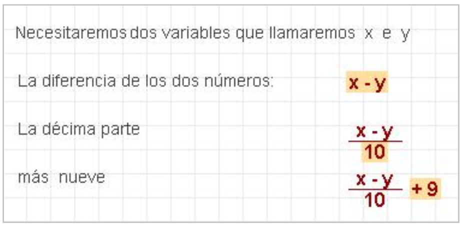
L'àrea del pentàgon és $\frac{5xa}{2}$

Com les obtenim?

Pretenem transformar un enunciat, on hi ha un o més valors que no coneixem, en una **expressió algebraica.**

Cadascun dels valors (**variables**) que no coneixem el representarem per una lletra diferent.

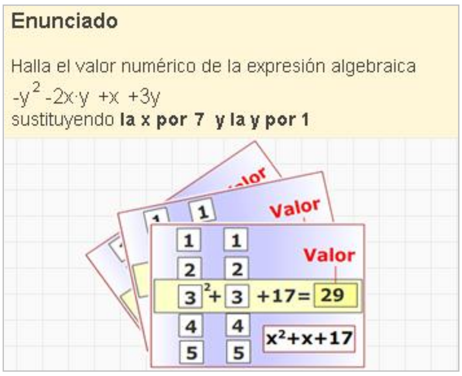


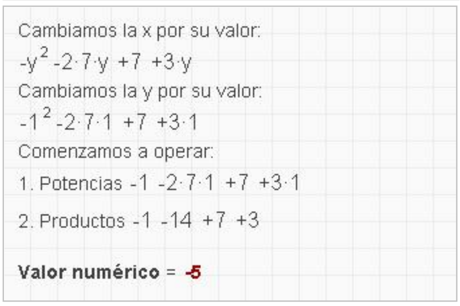


Valor numèric

Si en una expressió algebraica substituïm les lletres (variables) per nombres, el que tindrem serà una expressió numèrica. El resultat d'aquesta expressió és el que anomenem **valor numèric** de l'expressió algebraica per a aquests valors de les variables.

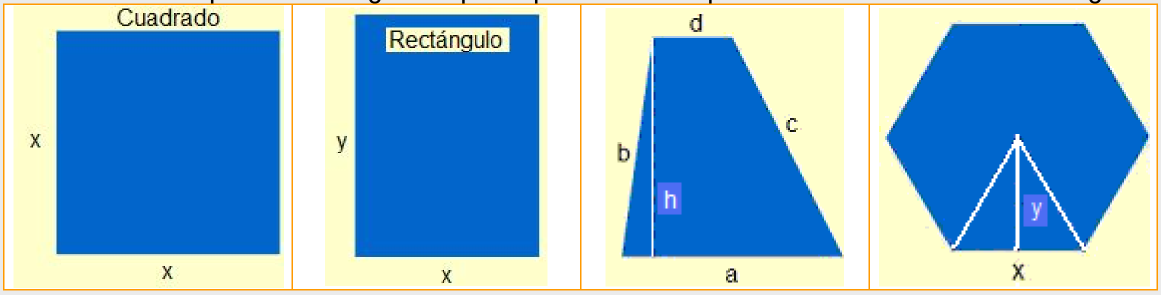
> És important que tinguis en compte la **prioritat de les operacions**
> 1. Potències
> 2. Productes i quocients
> 3. Sumes i restes





EXERCICIS resolts

1. Troba les expressions algebraiques que donen el perímetre i l`àrea de cada figura



Solucions

Perímetre = 4 x Àrea = x^2	Perímetre = 2 (x + y) Àrea = x y	Perímetre = a+b+c+d Àrea = $\frac{(a+d)h}{2}$	Perímetre = 6 x Àrea= 3 x y

2. Escull l'expressió algebraica en cada cas

1 El triple d'un nombre més sis Ⓐ $6x+3$ Ⓑ $3x+6$ Ⓒ $3(x+6)$ Ⓓ $\frac{x}{3}+6$	2 La cinquena part d' un nre més 10. Ⓐ $\frac{x}{5}+10$ Ⓑ $\frac{x+10}{5}$ Ⓒ $10x+5$ Ⓓ $5x+10$	3 Un quart de la suma d'un nre més 7. Ⓐ $\frac{x+7}{4}$ Ⓑ $\frac{x}{4}+7$ Ⓒ $\frac{14+7}{4}$ Ⓓ $\frac{7}{4}+x$	4 La semisuma de dos nombres. Ⓐ $\frac{x\cdot y}{2}$ Ⓑ $\frac{x+y}{2}$ Ⓒ $\frac{x}{2}+y$ Ⓓ $\frac{x-y}{2}$	5 La meitat del producte de 2 nres. Ⓐ $\frac{x}{2}\cdot y$ Ⓑ $\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}$ Ⓒ $\frac{x-y}{2}$ Ⓓ $\frac{x\cdot 7}{2}$
6 L'arrel quadrada de la suma de 2 quadrats. Ⓐ $x+y$ Ⓑ x^2+y^2 Ⓒ $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$ Ⓓ $\sqrt{x^2+y^2}$	7 El 40% de un número. Ⓐ $0.4\ x$ Ⓑ $\frac{40}{100\ x}$ Ⓒ $\frac{40}{10}x$ Ⓓ $\frac{100\ x}{40}$	8 El quadrat de la suma de 2 nombres. Ⓐ $(z+y)^2$ Ⓑ x^2+y^2 Ⓒ $x+y^2$ Ⓓ $(12+y)^2$	9 El quadrat de la semisuma de 2 nombres. Ⓐ $\frac{x^2+y^2}{4}$ Ⓑ $\frac{x+y^2}{2}$ Ⓒ $\frac{(x+y)^2}{4}$ Ⓓ $\frac{(x+y)^2}{2}$	5 La mitjana aritmètica de tres nombres. Ⓐ $0.5x+0.5y+0.5z$ Ⓑ $\left(\frac{x+y}{2}+z\right)/2$ Ⓒ $\frac{x+y+z}{3}$ Ⓓ $\frac{x+y+z}{2}$

Solucions: 1 B; 2 A; 3 A; 4 B; 5 A; 6 D; 7 A; 8 A; 9 C; 10 C.

3. Troba els valors numèrics indicats en cada cas.

$2-7\cdot x^2$ en (-2)	$3+5\cdot x^3$ en $\frac{2}{3}$	$3\sqrt{x}-3\cdot x^3$ en 9	$\frac{x^5}{y^3}+4$ en $\begin{matrix}x=-2\\y=3\end{matrix}$	$\frac{x^5}{y^4}+1$ en $\begin{matrix}x=4\\y=4\end{matrix}$
$2-7\cdot(-2)^5$	$3+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$3\sqrt{9}-3\cdot 9^3$	$\frac{(-2)^5}{3^3}+4$	$\frac{4^5}{4^4}+1$
$2-7\cdot -32$	$3+5\cdot\frac{8}{27}$	$3\cdot 3-3\cdot 729$	$\frac{-32}{27}+4$	4^1+1
$2+224$	$3+\frac{40}{27}$	$9-2187$		$4+1$
226	$\frac{121}{27}$	-2178	$\frac{76}{27}$	5

2. Monomis

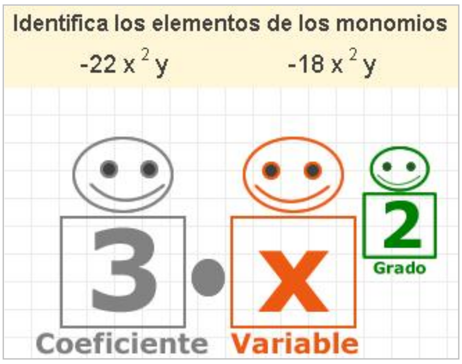
Què són?

Un monomi és una expressió algebraica formada pel producte d'un nombre i una o més variables. El nombre l'anomenarem **coeficient** i el conjunt de les variables, **part literal**.

Anomenarem **grau** del monomi a la suma dels exponents de la seva part literal. I **grau respecte d'una variable**, a l'exponent d'aquesta variable.

Dos monomis són **semblants** si les seves parts literals són iguals.

Dos monomis són **oposats** si són semblants i els seus coeficients són oposats.



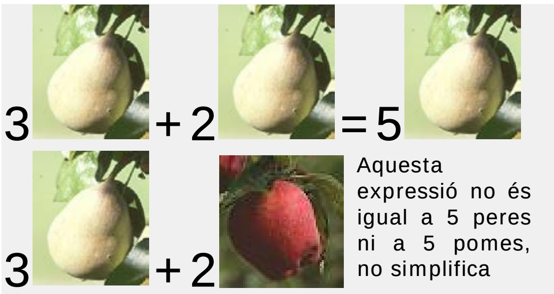
Monomio	Coeficiente	Literal	Grado
$-22x^2y$	-22	x^2y	3
$-18x^2y$	-18	x^2y	3

Son semejantes, pues tienen igual el literal

No son opuestos, pues los coeficientes no lo son

Sumar i restar monomis

Tres peres i dues peres són 5 peres. Però 3 peres i 2 pomes no són 5 peres ni 5 pomes, són 3 peres + 2 pomes.



El mateix passa amb els monomis. Si dos monomis són semblants, sumem o restem els coeficients i deixem el mateix literal. Si no són semblants, aquesta operació no pot expressar-se de manera més simplificada.

$3x+2x=5x$, però les expressions $3x^2+2x$ o $2x+7y$ no es poden simplificar.

$2x^7y^3 + 6x^7y^3$

Monomis semblants, per tant es sumen els coeficients

$8x^7y^3$

$2x^7y^3 - 6x^7y^3$

Per restar-los es procedeix de manera semblant,

$-4x^7y^3$

$2x^7y^3 + 6x^5y^3$

Monomis no semblants, per tant la expressió no es pot simplificar, el resultat és

$2x^7y^3 + 6x^5y^3$

Anàlogament

$2x^7y^3 - 6x^5y^3$

és

$2x^7y^3 - 6x^5y^3$

Multiplicar monomis

El producte de dos monomis és un monomi que té per coeficient el producte dels coeficients i per part literal el producte de les parts literals (recorda la propietat: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$).

Així,

$(3x^2y)\cdot(2x)=(3\cdot2)x^2yx=6x^{2+1}y=6x^3y$

$\left(\frac{3}{2}x^3y^2\right)\cdot\left(\frac{2}{5}x^3y\right)$

Multiplicamos los coeficientes: $\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{5}$

Multiplicamos los literales: $(x^3y^2)\cdot(x^3y)=$

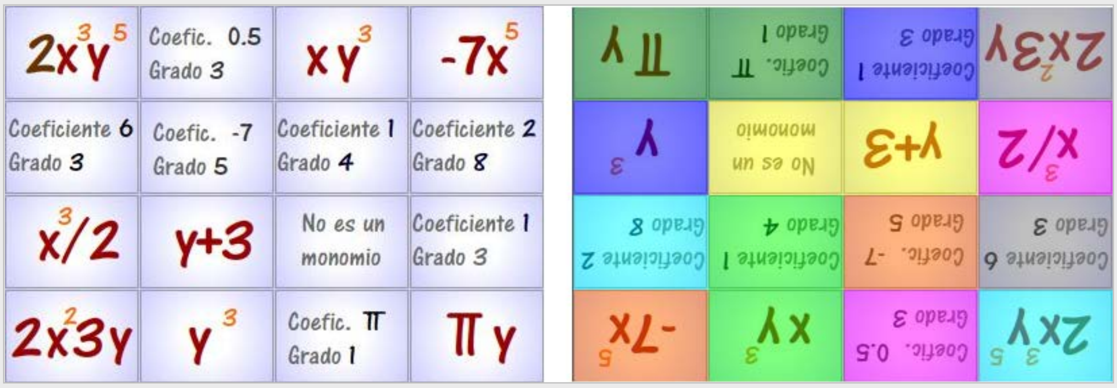
$=x^6y^3$

Resultado

$\frac{3}{5}x^6y^3$

EXERCICIS resolts

4. Aparella els rectangles de l'esquerra, a la dreta hi ha la solució.



5. Suma i resta les següents parelles de monomis

a) $3/2\ x^3y,\ \ 2\ x^3y$ b) $2xy,\ \ x^3y$ c) $x^2y^3,\ \ -7/4\ x^2y^3$ d) $\pi x,\ \ 6x$

Solucions suma:
a) $7/2\ x^3y$ b) $2xy + x^3y$ c) $-3/4\ x^2y^3$ d) $(\pi+6)x$

Solucions resta:
a) $-1/2\ x^3y$ b) $2xy - x^3y$ c) $11/4\ x^2y^3$ d) $(\pi-6)x$

6. Escull l'etiqueta que dóna el resultat correcte del producte dels monomis indicats en cada cas.

$4x^2y^3$ y $5y^3$	
$9x^2y^6$	$20x^2y^6$
$20x^2+y^6$	$-20x^2y^6$
$20xy^9$	$45x^2y^6$

Solución: fila 1 columna 2

$-9y^2$ y $-6x$	
$-15xy^2$	$96xy^2$
$54x+y^2$	$54x^2y$
$54xy^2$	$-54xy^2$

Solución: fila 3 columna1

3. Polinomis

Què són?

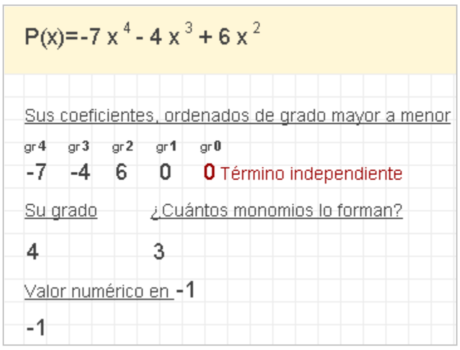
La suma de diversoss monomis no semblants és un polinomi. El conjunt dels polinomis està format per monomis o sumes de monomis no semblants.

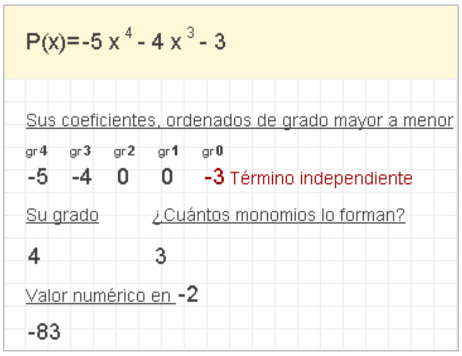
Si un dels monomis no té part literal, se l'anomena **terme independent.**

Al grau més gran dels de tots els monomis, se l'anomena **grau del polinomi**.

Anomenem els polinomis amb una lletra majúscula, i entre parèntesi les variables que l'integren, però en aquesta pàgina ens limitarem a una sola variable.

És important que sàpigues identificar els coeficients d'un polinomi segons el seu grau; així, si $\mathbf{P(x)=x^3+2x-4}$, el seu **grau és 3** i el seu coeficient de grau tres és 1, el seu coeficient de grau ú és 2 i el terme independent o coeficient de grau zero és -4.





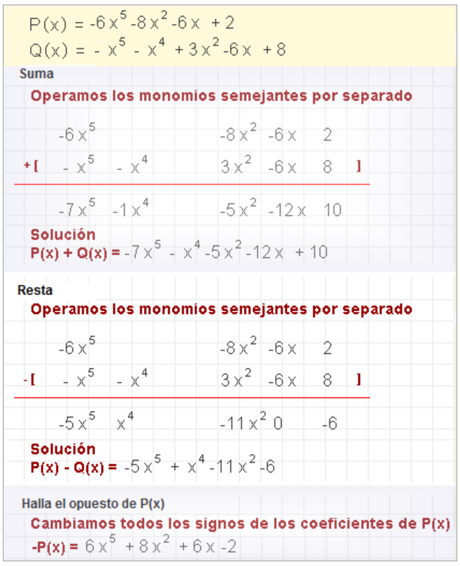
Sumar i restar polinomis

Per sumar o restar dos polinomis, operem els seus monomis semblants. Si no els tenen, deixem l'operació indicada.

Així, si $P(x)=3x^2+4x$ i $Q(x)=4x-1$,

$P(x)+Q(x)=[3x^2+4x]+[4x-1]=3x^2+8x-1$

$P(x)-Q(x)=[3x^2+4x]-[4x-1]=3x^2+1$



Polinomis oposats

Dos polinomis són oposats si, en sumar-los, tots els seus termes s'anul·len.

Així, si $P(x)=3x^2+4$ i $Q(x)=-3x^2-4$,

llavors: $\mathbf{P(x)+Q(x)}=[3x^2+4]+[-3x^2-4]=$

$=3x^2+4-3x^2-4\mathbf{=0}$, **Q(x) és l'oposat de P(x).**

Per aconseguir el polinomi oposat de P(x), només hem de canviar els signes dels seus coeficients. El representarem per -P(x).

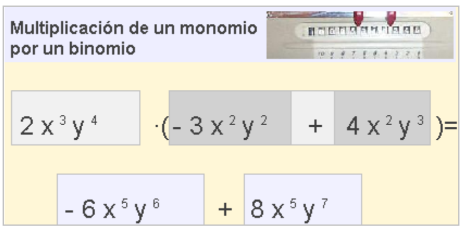
Multiplicar un polinomi per un monomi

El següent exemple t'ajudarà a dominar aquesta operació.

$P(x)=3x^2+4x \qquad Q(x)=3x$:

$P(x)\cdot Q(x) = [5x^2+4x]\cdot[3x] =$

$= [5x2]\cdot[3x] + [4x]\cdot[3x] = 15x^3+12x^2$



EXERCICIS resolts

7. Amb els elements de l'esquerra, escriu el polinomi P(x) que satisfà les condicions de la dreta.

$+5$	El grado de P(x) es **7**
-3 -4	El coeficiente de mayor grado es **-4**
x^7	El coeficiente de grado 5 es **5**
x^5	El coeficiente de grado 3 es **-3**
x^3 -5	El coeficiente de grado 0 es **-5**
	Los demás coeficientes son todos cero.

P(x) =

Solució: $P(x) = -4x^7 + 5x^5 - 3x^3 - 5$

8. Calcula P(x)-Q(x)

$$P(x) = -x^3 + 3x^2 - \frac{4}{3}x$$

$$Q(x) = -x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{2}x - 4$$

$$P(x)-Q(x) = \frac{8}{3}x^2 - \frac{23}{6}x + 4$$

Calcula P(x)+Q(x)

$$P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x$$

$$Q(x) = \frac{2}{5}x^3 - x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$P(x)+Q(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{29}{20}x - \frac{5}{4}$$

9. Troba l'expressió en coeficients dels següents productes

Multiplica el polinomio
$P(x) = -9x^4 + 8x$
por -4 y por $11x^4$

Multiplicamos, por separado, todos los términos de P(x)

$[-9x^4]\cdot[-4] = 36x^4$
$[8x]\cdot[-4] = -32x$

Solución
$P(x)\cdot(-4) = 36x^4 - 32x$

Multiplicamos, por separado, todos los términos de P(x)

$[-9x^4][11x^4] = -99x^8$
$[8x][11x^4] = 88x^5$

Solución
$P(x)\cdot(11x^4) = -99x^8 + 88x^5$

Per practicar

1. Troba l'expressió algebraica que dóna la quantitat d'unitats que determina un nombre de tres xifres.

2. La meva passa és de 69 cm. Quantes passes donaré per fer tres voltes a un circuit de a metres?

3. Si fa tres hores era al km 26 de la carretera i vaig a una velocitat mitjana de x km/h, en quin punt quilomètric de la carretera em trobo?

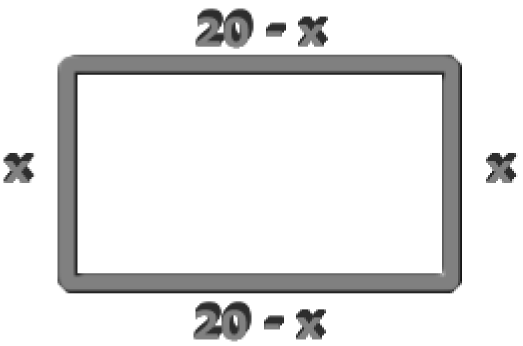
4. En tres quarts d'hora hi ha 45 minuts. Saps quants minuts hi ha en 2·r/s d'hora?

5. L'expressió algebraica que defineix el preu d'un article de y€ si ens descompten un x% és (100 – x) / 100 · y. Troba el preu rebaixat un 25% d'un article de 52€

6. Troba el valor numèric de $P(x) = 6x^2+7x+3$ en $x=10$ i en $x=0,1$.

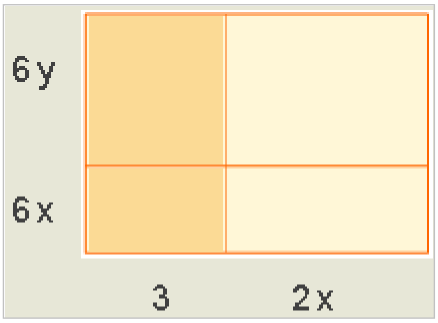
7. Troba el valor numèric de $(10x+y)/99$ en $x=6$ $y=8$.

8. Fem un rectangle doblegant un filferro de 40 cm. Troba l'expressió algebraica que defineix l'àrea del rectangle i calcula el seu valor en $x=4$. (Veure la figura)



9. Quin és el grau del polinomi $3x^4+9x^2$? Quin és el seu coeficient de grau dos? I el de grau 1? Calcula el seu valor numèric per $x=2$.

10. Multiplica $3·(6x+6y)$ i $2x·(6x+6y)$. Completa les àrees dels rectangles.



11. Opera $[4x^3y^3]+[5x^4y^2]$ i $[-7x^3]+[5x^3]$

12. Opera $[-8x^2]-[-3x^2]$

13. Multiplica els monomis $[2x^5y^3]$ i $[-3xy^2]$

14. Troba l'oposat de $[-2x^2y^4]$

15. Suma els polinomis

$$-\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{4}{5} \quad \text{i}$$

$$x^3 + x + \frac{3}{5}$$

16. Resta els polinomis

$$-\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{5}x - 2 \quad \text{i}$$

$$\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{5}x^2 + 4$$

17. Multiplica el monomi

$-4x^7y^2$

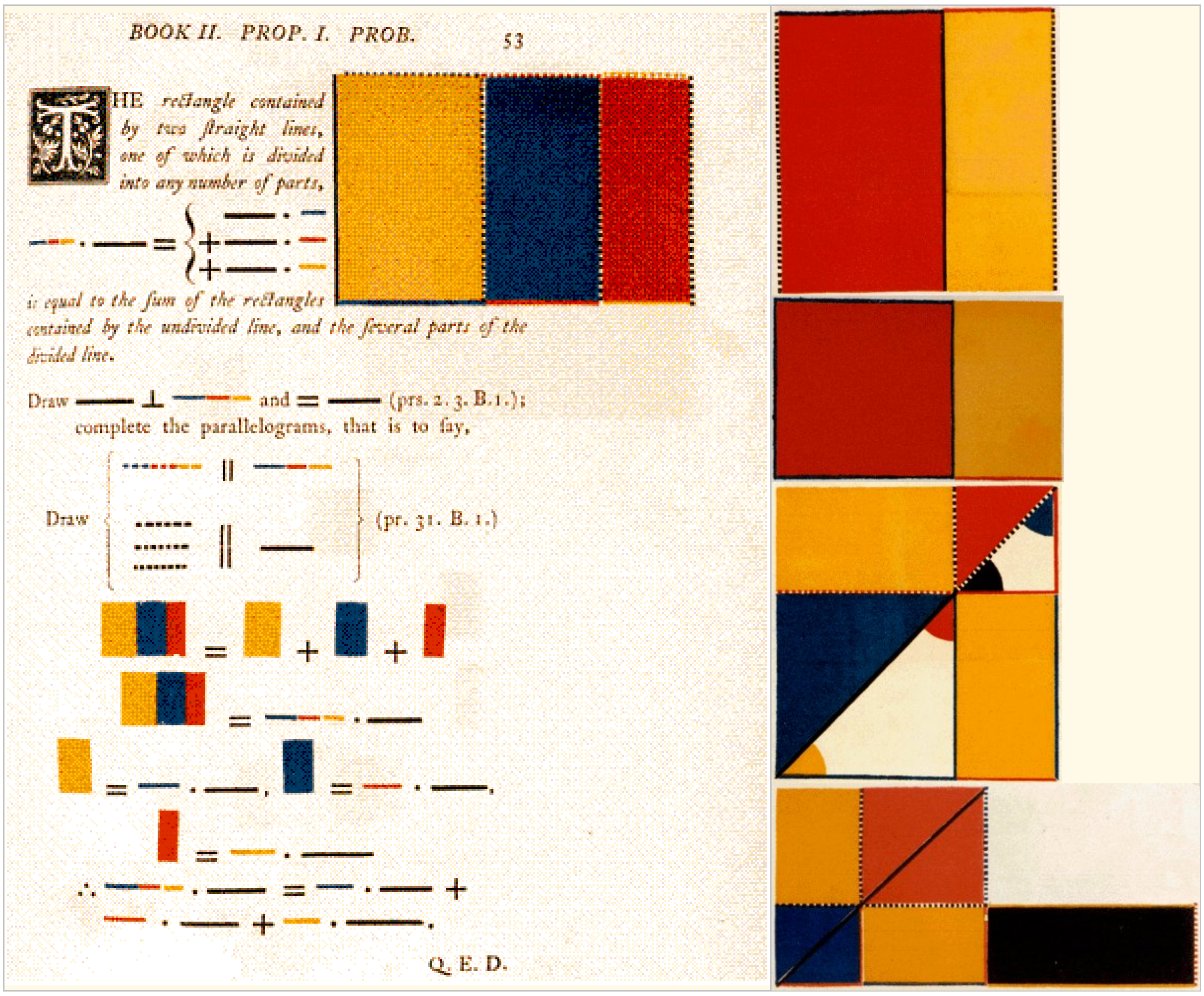
pel binomi

$-4x^8y^7-x^4y^4$

Per saber-ne més

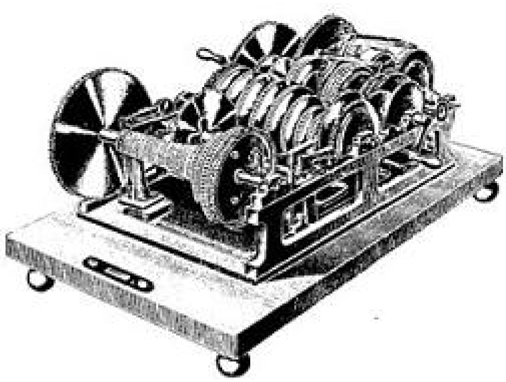
Euclides

El S. III Euclides va escriure Els Elements en 13 volums. L'obra és la segona en nombre d'edicions publicades després de la Bíblia (més de 1000).
Las imatges corresponen a l'edició de Byrne publicada el 1847. Són les sis primeres proposicions del llibre II i representen algunes operacions de polinomis.



La Màquina Algebraica de Torres Quevedo

Són moltes les màquines precursores dels ordinadors. A les imatges veiem una aportació espanyola a aquest desenvolupament. Aquesta màquina calculava valors numèrics de polinomis.



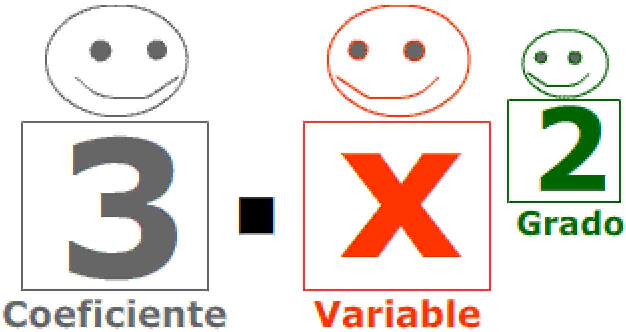
Recorda el més important

Expressions algebraiques i els seus valors numèrics

El nombre de rodes si hi ha 80 cotxes i 20 motos, és el **valor numèric** de **4x + 2y** per $x=80$, $y=20$:
$4\cdot\mathbf{80} + 2\cdot\mathbf{20} = 360$

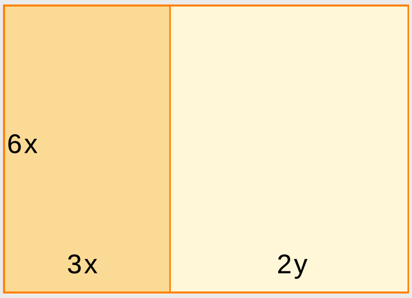
L'**expressió** que dóna el preu de les rodes si la d'un cotxe és z€ i la d'una moto t€, és **4xz + 2yt**

El cost de les rodes de 2 cotxe i una moto si la del cotxe és de 80€ i la de la motocicleta de 50€ és el **valor numèric** de **4xz + 2yt** per $x=2$, $y=1$; $z=80$, $t=50$, que dóna
$4\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{80} + 2\cdot\mathbf{1}\cdot\mathbf{50} = 740$



Monomis	Polinomis
Suma i resta monomis	Suma i resta polinomis
$7x^3 + 2x = 7x^3 + 2x$ $7x^3 + 2x^3 = 9x^3$ $7x^3 - 2x^3 = 5x^3$	$P(x) = 4x^3 \quad +x-5$ $Q(x) = 2x^3+x^2+2x+4$ $P(x)+Q(x)=6x^3+x^2+3x-1$ $P(x)-Q(x)= 2x^3 -x^2 - x -9$
Multiplica monomis	Multiplica un monomi per un polinomi
$7x^3 \cdot 2x = 14x^4$ $7x^3 \cdot 2x^3 = 14x^6$ $3x^3y^2 \cdot 2x^3y = 6x^6y^3$	$7x^3 \cdot (2x^2+3) =$ $=7x^3 \cdot 2x^2 + 7x^3 \cdot 3 =$ $=14x^5 + 21x^3$

Autoavaluació



1. Troba l'expressió algebraica que dóna les unitats del triple d'un nombre de tres xifres x y z.

2. Troba l'àrea del rectangle de l'esquerra.

3. Troba el valor numèric de $5x^3-4/5x^2+5x+5$ per $x=-2$

4. Quin és el grau del polinomi $P(x,y)=3x^3y^3-5x^2y^3$?

5. Quin és el coeficient de grau 2 de $P(x)=-5x^3+4x^2-3$?

6. P(x) és un polinomi de grau 1 tal que $P(10)=234$, $P(0,1)=6,3$ Saps si $P(x)=23x+4$ o $P(x)=2x^2+3x+4$ o el polinomi no és cap dels dos?

7. Fes la següent suma de monomis: $2x^6y^5+3x^6y^5$

8. Troba el valor numèric per $x=10$ de la resta dels polinomis $P(x)= 6x^2+4x+1$ i $Q(x)=2x^2+5x+4$

9. Calcula la suma de $\sqrt{3}x^8 + 4x$ y $5x^8 + 3x$?

10. Quin és el grau del producte de $-6x^4y^3$ per $2x^6y^3+3x^8y^6$?

Solucions dels exercicis per practicar

1. $100x + 10y + z$
2. $100a/23$
3. $26+3x$
4. $120 \cdot r/s$ minuts
5. 39€
6. en 10, 673; en 0,1, 3,76
7. 0.686868....
8. $20x-x^2$; 64
9. 4; 9; 0; -12
10. $18x+18y$; $12x^2+12xy$

18y	12xy
18x	$12x^2$

11. $4x^3y^3 + 5x^4y^2$; $-2x^3$
12. $-5x^2$
13. $-6x^6y^5$
14. $2x^2y^4$
15. $\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{1}{5}$
16. $-x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}x - 6$
17. $16x^{15}y^9 + 4x^{11}y^6$

Solucions AUTOAVALUACIÓ

1. $300x+30y+3z$
2. $18x^2+12xy$
3. $-241/5$
4. 6
5. 4
6. $P(x)=23x+4$
7. $5x^6y^5$
8. 387
9. $(\sqrt{3}+5)x^8 + 7x$
10. 21