8 Xeometría do plano

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

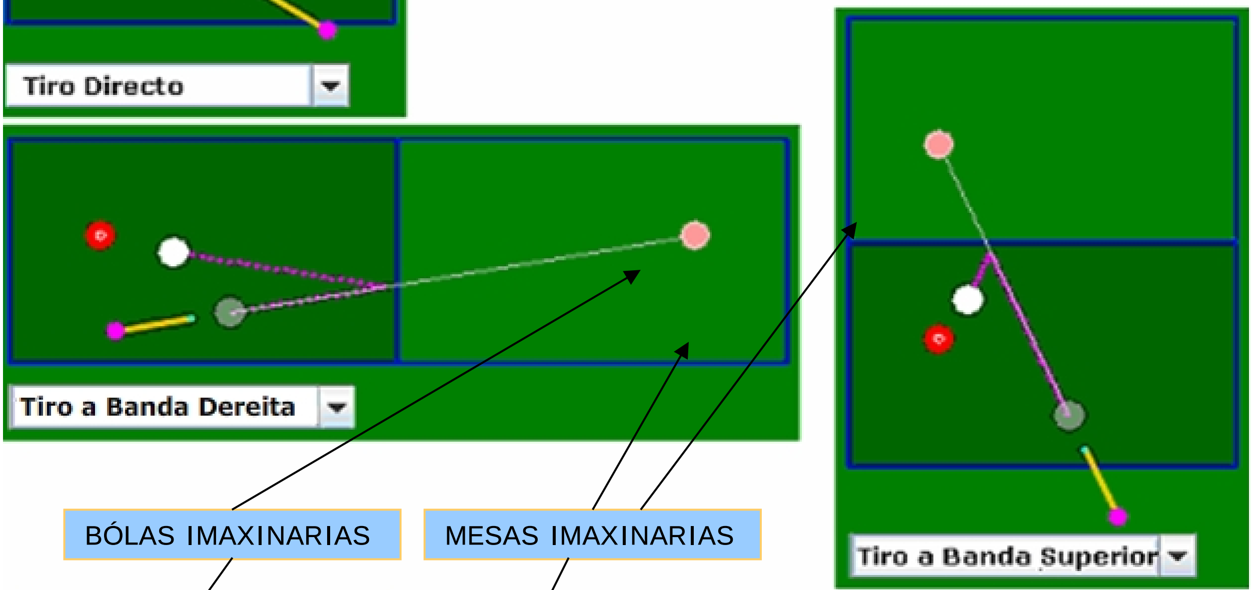
- Coñecer os elementos do plano.
- Coñecer as rectas e as súas propiedades.
- Manipular rectas e outros elementos relacionados con elas.
- Coñecer os diferentes tipos de ángulos.
- Coñecer as propiedades e relacións entre ángulos.
- Medir e realizar operacións básicas con ángulos.
- Utilizar recursos para resolver problemas sinxelos de xeometría plana.

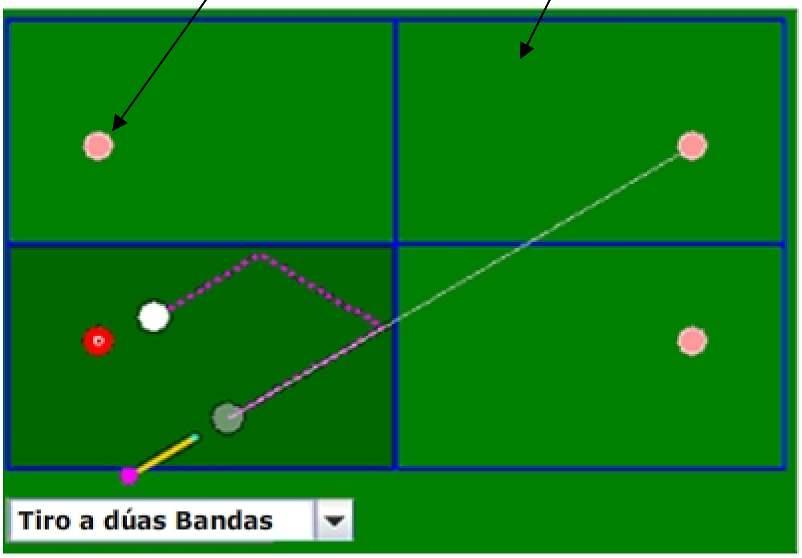
Antes de empezar

Investiga

O billar é un xogo no que interveñen moitos dos elementos da xeometrí plana (puntos, rectas, ángulos, simetrías ...). Observa na escena d dereita como se pode calcular a traxectoria correcta para darlle á bol vermella rebotando antes nunha ou dúas bandas.

Nun tiro directo apuntamos á bóla vermella. Se queremos tirar a banda, basta colocar outra mesa de billar imaxinaria ao lado da nosa, que conteña unha bola vermella tamén imaxinaria. A esta bóla imaxinaria é á que lle apuntaremos.





Nun tiro a dúas bandas multiplicamos por catro a nosa mesa para obter unha mesa real e tres imaxinarias. Apuntando á bóla da mesa que está na esquina superior dereita, logramos darlle á vermella tocando antes en dúas bandas.

As rectas, puntos, simetrías, ángulos e outros elementos xeométricos son a base do xogo de billar.

E de moitas outras cousas!

1. Rectas. Paralelismo e perpendicularidade.

O plano.

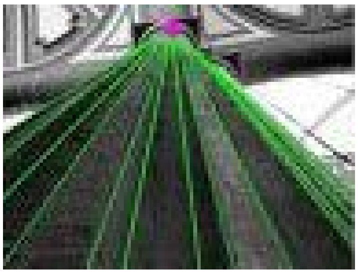
Desde os inicios da historia, o ser humano intentou representar a súa contorna visual debuxando os obxectos e figuras que o rodeaban.

Para iso necesitou dispor dalgunha superficie sobre a que trazar puntos, liñas, círculos ou outras figuras. Desde os petróglifos esculpidos na pedra ata as pinturas renacentistas ou aos modernos planos utilizados na arquitectura ou a enxeñería, dispomos de innumerables exemplos de representacións elaboradas sobre superficies máis ou menos planas.

O **plano** é polo tanto un obxecto que cobra importancia para a xeometría, xa que nos permite representar figuras sobre el.

Non é difícil gozar da xeometría de xeito espontáneo. É suficiente con percibir a forma dos obxectos con espírito observador para descubrir todo tipo de elementos xeométricos na nosa contorna máis próxima.

E a xeometría proporciónanos ademais unha fonte inesgotable de información útil.



Cando observamos a vía do tren, cos seus dous raíles paralelos ? que terminan por unirse no infinito!, obtemos unha valiosa información acerca da distancia, da que non disporiamos se vísemos os raíles como realmente son, é dicir, paralelos.

Puntos e rectas.

Dentro do plano distinguimos dous elementos fundamentais, tal e como **Euclides**, considerado como o primeiro gran matemático da historia, nos definiu: o **punto** e a **recta**.

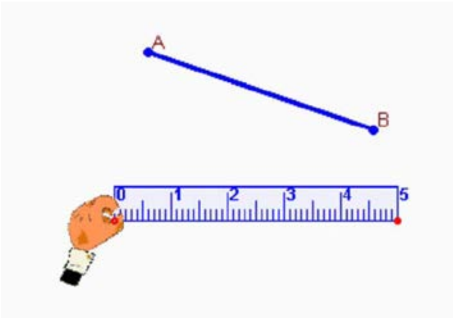
Así, podemos identificar unha estrela como un punto no firmamento, o ronsel deixado por un avión como unha recta, e o taboleiro da nosa mesa de traballo como un plano.

É todo o que necesitamos para empezar a "facer xeometría".

Punto é o que non ten lonxitude nin anchura. **Recta** é o que ten lonxitude, pero non anchura.

Proba a buscar toda clase de obxectos e propiedades xeométricas ao teu arredor. Seguramente che sorprenderán en moitas ocasións.

Recta, semirrecta e segmento.



Entre as distintas posibilidades que hai para unir dous puntos, o segmento é especial, por ser o camiño máis curto.

Tomemos dous puntos distintos sobre o plano e unámolos mediante unha liña. Existen desde logo moitos xeitos de facelo, pero hai unha delas que é a **máis curta** entre todas as posibles. A esta liña máis curta que une dous puntos chamámola **segmento**.

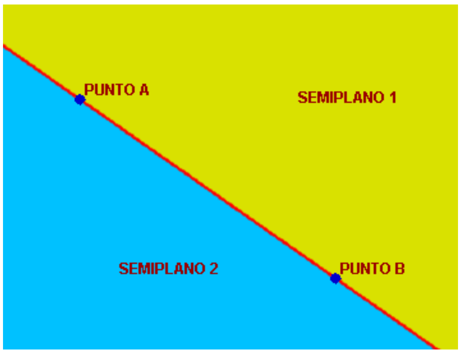
Se designamos os dous puntos coas letras A e B, designaremos AB ao segmento que os une. Así, A e B pasan a ser os **extremos** do segmento.

Se prolongamos o segmento indefinidamente por ambos os dous extremos, obtemos unha **recta**.

Se prolongamos o segmento AB por un só dos seus extremos (B por exemplo) obtemos unha **semirrecta**. Neste caso dicimos que o punto A é a **orixe** desta semirrecta.

Propiedades da recta.

Toda recta divide ao plano en dúas rexións. Cada unha delas é un **semiplano**.



Se un punto non pertence á recta, entón estará nalgún dos dous semiplanos determinados por ela.

Volvendo a Euclides, existen algunhas propiedades da recta que, a pesar de ser moi sinxelas, resultan absolutamente esenciais para a xeometría.

Estas son algunhas delas:

- 1ª propiedade: Dados dous puntos distintos nun plano, existe unha única recta que os une.
- 2ª propiedade: Toda recta divide ao plano en dúas rexións, chamadas semiplanos.

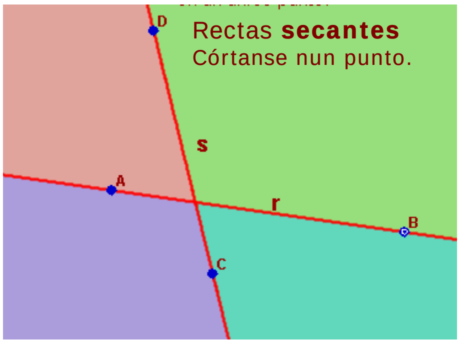
Dados dous puntos distintos nun plano, existe unha **única** recta que os contén.

Posicións relativas.

Tracemos dúas rectas sobre un plano. Poden ocorrer varios casos distintos.

Podería suceder que ambas rectas estean colocadas de xeito que unha estea superposta á outra. Sería imposible distinguilas; serían, en definitiva, unha mesma recta. Dicimos que as dúas rectas son **coincidentes**.

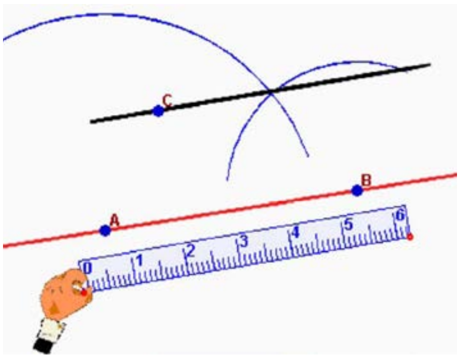
No caso de que as dúas rectas sexan distintas, podería ser que non chegasen a tocarse nunca, serían **paralelas**, ou ben que se toquen nalgún punto, rectas **secantes**. Neste último caso, o punto en que se cortan é único.



Dúas rectas son **paralelas** se non se cortan en ningún punto e son **secantes** se se cortan nun único punto.

Paralelismo.

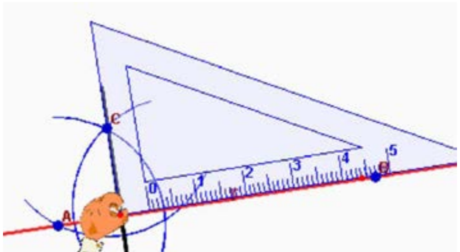
Sabemos xa que dúas rectas son paralelas se non teñen ningún punto común e, como consecuencia do seu famoso **5° postulado**, Euclides afirmou que por calquera punto exterior a unha recta pode trazarse unha única recta paralela a ela.



Podemos así trazar paralelas a unha recta, utilizando unha **regra** e un **compás**. O método é o que se describe na escena contigua.

De acordo co noso Euclides, o paralelismo é un dos conceptos básicos da xeometría. Por este motivo, a xeometría que estamos descubrindo recibe o nome de **"xeometría euclídea"**.

Por un punto exterior a unha recta pódese trazar unha **única** recta paralela a ela.



Recta que pasa por C e é **perpendicular** a r

Perpendicularidade.

Dúas rectas que se cortan nun punto, dividen ao plano en **catro** rexións. Se estas catro rexións teñen a mesma amplitude, dicimos que as dúas rectas son **perpendiculares**.

Dada unha recta e un punto calquera sobre ela, existe unha única recta que contén a ese punto e é perpendicular á recta.

Dispomos dun método para trazar rectas perpendiculares usando regra e compás.

EXERCICIOS resoltos

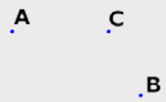
1. Traza tres rectas diferentes que conteñan a un punto A. Cantas rectas máis podes trazar que pasen por ese punto?

   Sol Por un punto pódense trazar un número infinito de rectas distintas.

2. Traza dúas rectas distintas que conteñan á vez dous puntos A e B. É isto posible? Explícao coas túas propias palabras.

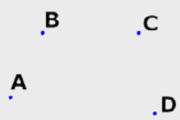
   Sol Por dous puntos distintos só é posible trazar unha recta.

3. É posible trazar unha recta que conteña aos tres puntos A, B e C? Como se deben situar os tres puntos para que se poida trazar unha recta que os conteña?

   Sol Non é posible neste caso, xa que por tres puntos distintos pódese trazar unha recta sempre que estean aliñados.

4. Representa o segmento AB, unha semirrecta con orixe en C, unha semirrecta con orixe en D e que conteña ao punto B, unha recta que pase por A e unha recta que pase por A e por C.

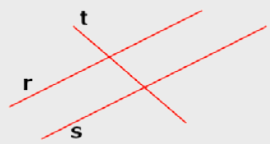
   

   Sol Revisa a páxina Recta, semirrecta e segmento.

5. Traza a recta r que une os puntos A e B. Representa os seguintes puntos: un punto, distinto de A e de B, que pertenza á recta; dous puntos que non pertenzan á recta e que estean situados en distintos semiplanos.

   Sol Revisa a páxina Propiedades da recta.

6. Indica se as rectas seguintes son coincidentes, paralelas ou secantes.

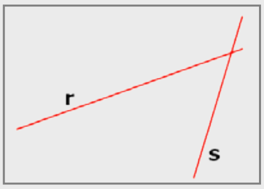
   Sol As rectas r e s son paralelas. A recta t é secante con r e con s.

Dúas rectas son **perpendiculares** se dividen ao plano en catro rexións de igual amplitude.

EXERCICIOS resoltos

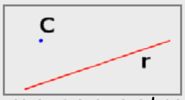
7. Representa no teu caderno dúas rectas paralelas e outra secante a unha recta r.

Sol Revisa a páxina Posicións relativas.



8. Traza unha recta paralela a r e outra paralela a s. Que figura forman os puntos de corte das catro rectas?

Sol Forman un paralelogramo.

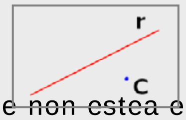


9. Utilizando unha regra e un compás, traza unha recta paralela a r que pase polo punto C.

Sol Revisa a páxina Paralelismo.

10. Na figura do exercicio anterior traza unha nova recta paralela a r. Como son entre si as dúas rectas trazadas?

Sol As tres rectas son paralelas.



11. Utilizando unha regra e un compás, traza unha recta s que sexa perpendicular a r e que pase polo punto C.

Sol Revisa a páxina Perpendicularidade.

12. Sobre a recta s construída no exercicio anterior, marca un punto D que non estea en r e traza outra recta perpendicular a s que pase polo punto D. Que relación existe entre a recta r e esta última que acabas de representar?

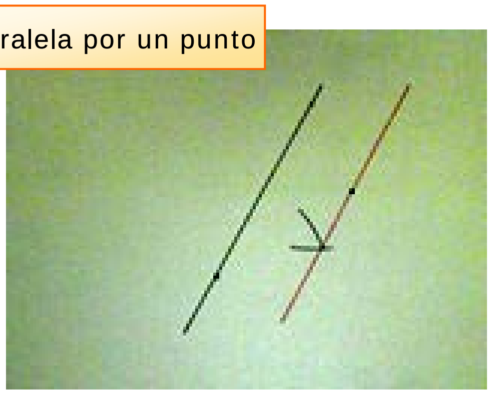
Sol Son paralelas.

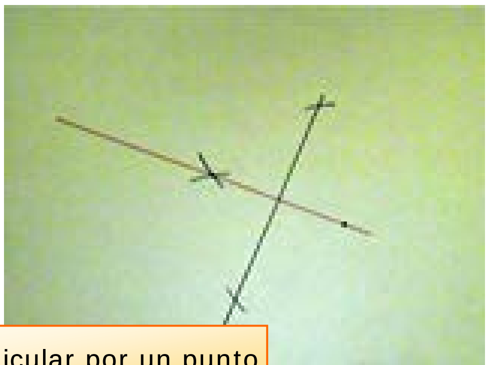
13. Traza tres rectas perpendiculares á recta r. Como son entre si estas tres rectas?

Sol Todas as rectas perpendiculares a r son paralelas entre si.

Aquí tes exemplos de trazado con regra e compás. Nas páxinas correspondentes dispós dun vídeo no que se amosan ambas construcións.

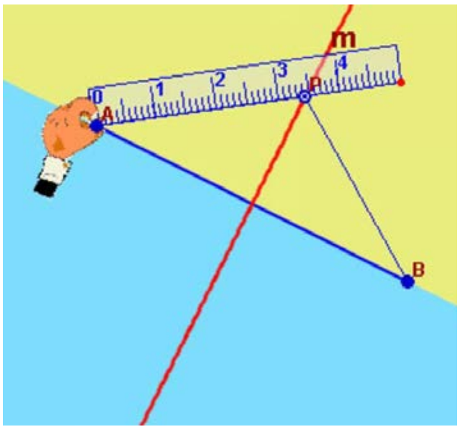
Paralela por un punto





Perpendicular por un punto

2. Mediatriz dun segmento.



Definición de mediatriz.

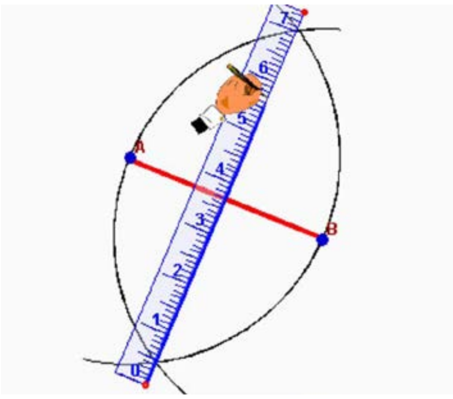
Dados dous puntos A e B, podemos construír o **segmento** AB que os une.

Chámase **mediatriz** do segmento AB á recta que é perpendicular a este segmento e que pasa polo seu punto medio.

A mediatriz divide ao segmento AB noutros dous segmentos de igual lonxitude.

A recta mediatriz ten unha importante propiedade: a distancia de calquera punto desa recta a cada un dos dous extremos do segmento AB é a mesma.

A **mediatriz** é perpendicular ao segmento AB e divídeo en dúas partes iguais.



Mediatriz dun segmento

Construción da mediatriz.

Imos construír a mediatriz dun segmento utilizando, como en casos anteriores, a regra e o compás.

Para iso representa dous puntos e traza o segmento que os une utilizando a regra.

Coloca o compás sobre un dos extremos do segmento e ábreo para que coincida co outro extremo. Traza así unha circunferencia. Fai a mesma operación apoiando o compás sobre o outro extremo.

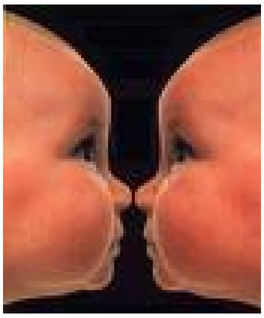
Une agora os puntos onde se cortan as dúas circunferencias que acabas de trazar. O novo segmento é perpendicular ao inicial e se o prolongas obterás a recta mediatriz que buscabas.

Simetría.

Dada unha recta e un punto C que non pertenza a ela, imos buscar outro punto C' coa condición de que a recta sexa a **mediatriz** do segmento CC'.

O punto C' así buscado chamarase **simétrico de C** e a recta chamarase **eixo de simetría**.

Este tipo de simetría denomínase **reflexión** e pódese aplicar a calquera figura xeométrica. Para iso representamos os simétricos de todos os vértices da figura orixinal e obtemos así outra figura simétrica á primeira.



A reflexión produce figuras **simétricas** de forma similar a como actúa un espello.

Simétrico dun punto

EXERCICIOS resoltos

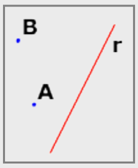
14. Con regra e compás traza o segmento AB e a súa mediatriz.

Sol Revisa a páxina Construción da mediatriz.

15. Sobre a mediatriz trazada no exercicio anterior, marca un punto calquera e mide a distancia entre este punto e os dous extremos do segmento inicial. Que observas no resultado obtido?

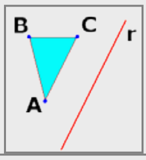
Sol A distancia de calquera punto da mediatriz a un ou outro dos extremos do segmento é a mesma.

16. Traza o segmento que une os puntos A e B. Localiza os puntos simétricos de A e B con respecto á recta r e úneos mediante un segmento. Que relación existe entre os dous segmentos?



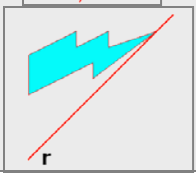
Sol Son segmentos simétricos a respecto da recta r e a súa lonxitude é a mesma.

17. Realiza o mesmo exercicio anterior, partindo do triángulo de vértices A, B e C. Que se obtén?



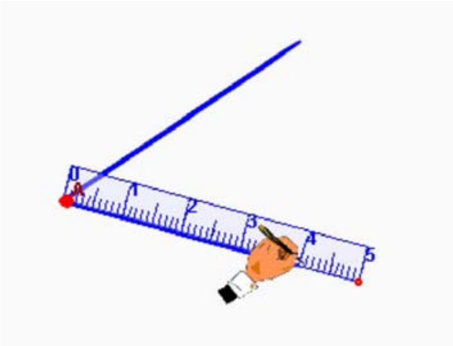
Sol A figura obtida é outro triángulo simétrico ao orixinal.

18. Representa a figura simétrica da que aparece a continuación.



Sol Revisa a páxina Simetría.

3. Ángulos. Clasificación e medida.



Definición de ángulo.

Pensa nun plano sen bordes, ou o que é o mesmo, ilimitado. Representa un punto A e traza dúas semirrectas con orixe neste punto. Chamaremos **vértice** ao punto A e lados a cada unha das dúas semirrectas

O plano queda así dividido en dúas rexións que comparten o vértice e os lados. Cada una destas rexións chámase **ángulo**.

Resulta evidente que as dúas rexións poden ter distinto tamaño. Chamaremos **amplitude do ángulo** ao tamaño de cada unha delas. Atendendo a ela, identificaremos distintos tipos de ángulos, estableceremos relacións entre eles e mediremos as amplitudes.

Chamamos **ángulo** a cada una das dúas rexións en que queda dividido o plano ao trazar dúas semirrectas coa mesma orixe.

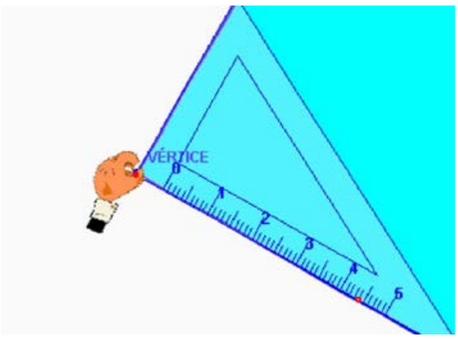
Tipos de ángulos.

Pola súa amplitude clasificamos os ángulos en:

- **Ángulo recto**: é o comprendido entre dúas semirrectas perpendiculares.
- **Ángulo raso**: é o que resulta ao trazar dúas semirrectas de igual orixe e sentido oposto.
- **Ángulo nulo**: é o que resulta ao trazar dúas semirrectas con igual orixe e idéntico sentido.

Por comparación co ángulo recto:

Un ángulo é **agudo** se é de menor amplitude que o ángulo recto. É **obtuso** se ten maior amplitude que un recto e menor que un raso.



Por comparación co ángulo raso:

Un ángulo é **convexo** se é de menor amplitude que o ángulo raso. É **cóncavo** se a súa amplitude é maior que a do ángulo raso.

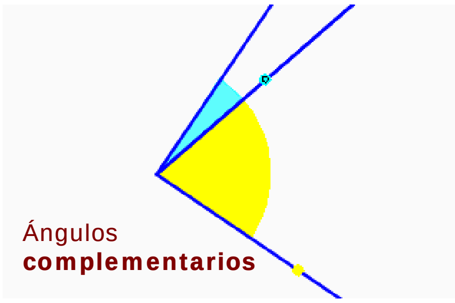
Relacións entre ángulos.

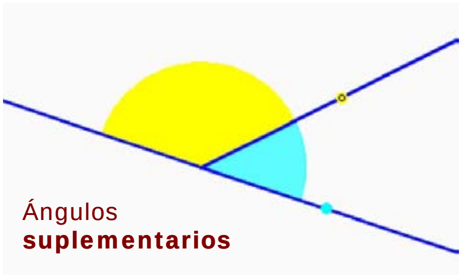
Dicimos que dous ángulos son **consecutivos** se teñen o vértice e un lado en común e dicimos que son **iguais** se teñen a mesma amplitude.

Dous ángulos son **complementarios** se en posición de consecutivos equivalen a un recto.

Dous ángulos son **suplementarios** se en posición de consecutivos equivalen a un raso.

Dúas rectas que se cortan nun punto determinan catro ángulos que son iguais dous a dous. Dicimos neste caso que os pares de ángulos da mesma amplitude son **opostos polo vértice**.



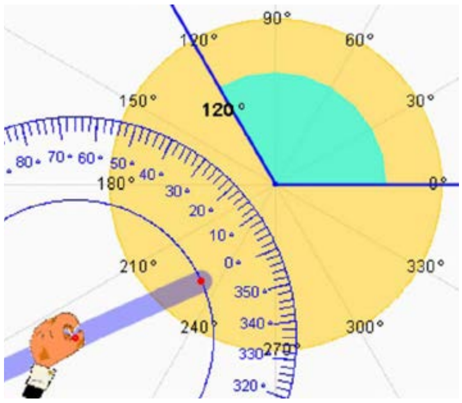


> Dous ángulos **complementarios** equivalen a un recto. Dous ángulos **suplementarios** equivalen a un plano.

Medida de ángulos.

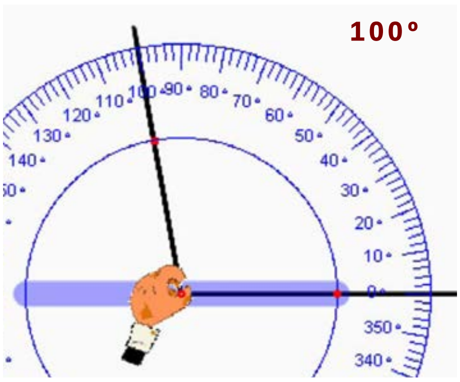
Para medir a amplitude dun ángulo utilizaremos como unidade o **grao**, representado polo símbolo "º". Asignamos ao **ángulo nulo** unha amplitude de 0º e ao **ángulo recto** unha amplitude de 90º.

Dous ángulos rectos equivalen a un **raso**, que terá por tanto unha amplitude de 180º. E catro ángulos rectos (ou dous rasos) ocupan **todo o círculo**, e a súa amplitude será de 360º.

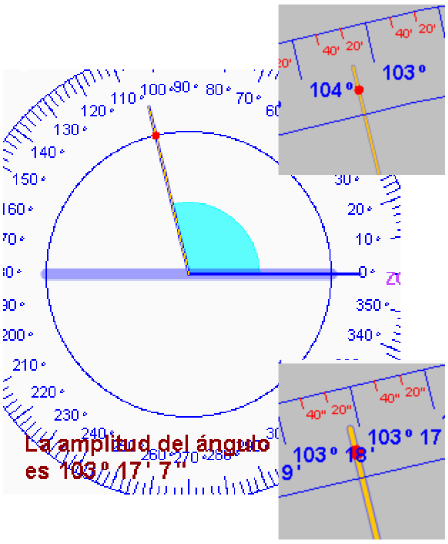


O resto de los ángulos mediranse por comparación con estes.

Por exemplo, se dividimos un recto en dous ángulos iguais, obteremos dous **ángulos de 45º**. Se dividimos en cambio un recto en tres partes iguais, obteremos tres **ángulos de 30º**.



> Ao dividir unha circunferencia en 360 partes iguais obtemos **un grao**.



Sistema sexaxesimal.

Para medir a amplitude de ángulos con maior precisión utilízase o sistema **sexaxesimal**.

Este sistema consiste en dividir un grao en 60 partes iguais. A cada unha destas divisións chamámola **minuto**, de maneira que cada grao contén 60 minutos. De igual forma, cada minuto divídese en 60 partes iguais para obter un **segundo** e obtemos a seguinte equivalencia:

1 **grao** = 60 **minutos** = 3.600 **segundos**

Utilizando este sistema de medida diremos, por exemplo, que a amplitude dun ángulo é 25 graos, 31 minutos e 7 segundos, e escribirémolo así:

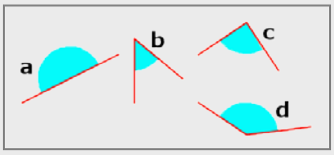
25º 31' 7''

EXERCICIOS resoltos

19. Indica sobre a figura o vértice, os lados e os ángulos que se observan.

Sol Revisa a páxina Definición de ángulo.

20. Indica sobre a figura se estes ángulos son agudos, rectos, obtusos ou rasos.

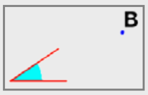


Sol O ángulo a é raso, b é agudo, c é recto e d é obtuso.

21. Representa utilizando os instrumentos de debuxo un ángulo recto, un ángulo raso, un ángulo nulo, un ángulo agudo, un ángulo obtuso, un ángulo cóncavo e un ángulo convexo.

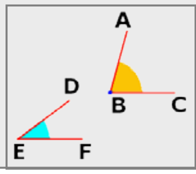
Sol Revisa a páxina Tipos de ángulos.

22. Representa sobre o vértice B un ángulo igual ao que aparece na figura.



Sol Constrúe sobre o punto B dúas semirrectas paralelas a cada un dos lados do ángulos orixinal.

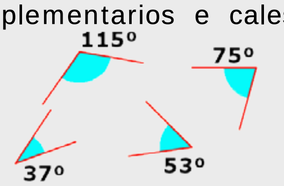
23. Representa sobre o vértice B un ángulo igual ao ángulo DEF e que sexa consecutivo ao ángulo ABC.



Sol Utiliza o transportador de ángulos.

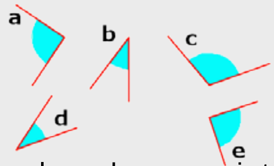
EXERCICIOS resoltos

24. Indica cales dos ángulos que aparecen na figura son complementarios e cales suplementarios.



Sol Son complementarios os ángulos de 37º e 53º porque suman un recto; son suplementarios os ángulos de 115º e 75º porque suman un raso.

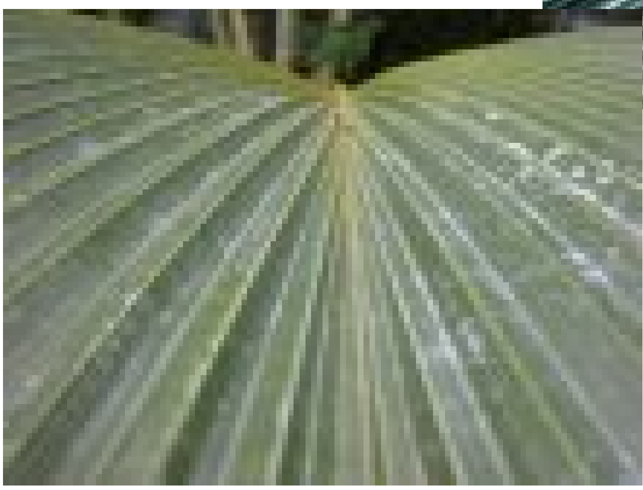
25. Indica na figura os ángulos que teñen a mesma amplitude. Que nome reciben estes ángulos?



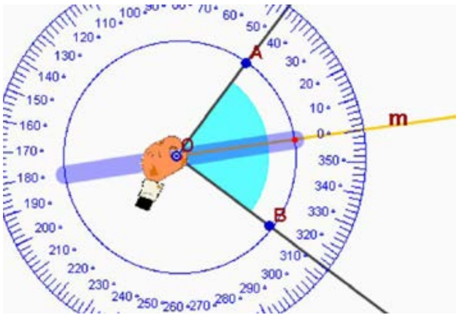
Sol Dicimos que son iguais os ángulos que teñen a mesma amplitude. Na figura, os ángulos a e e son iguais (son rectos) e os ángulos b e d tamén son iguais.

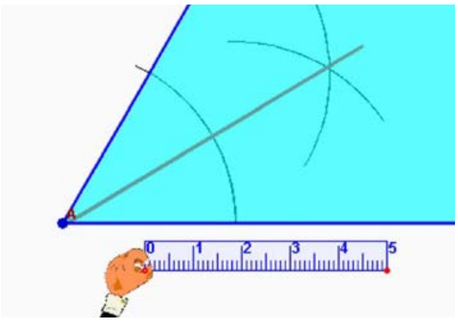
26. Representa utilizando os instrumentos de debuxo os ángulos das seguintes amplitudes: 30º, 60º, 90º, 45º, 10º, 135º e 240º.

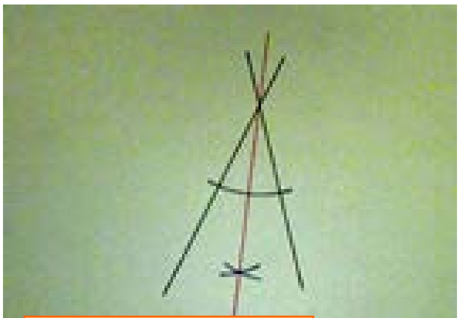
Sol Revisa a páxina Medida de ángulos.



4. Definición de bisectriz.







Bisectriz dun ángulo

Definición de bisectriz.

Tomemos un ángulo de vértice A e lados m e n. Tracemos unha nova semirrecta con orixe A e que divida ao ángulo noutros dos que sexan iguais. Esta semirrecta recibe o nome de **bisectriz** do ángulo.

A bisectriz ten a seguinte propiedade: calquera punto da bisectriz está a **igual distancia** dos dous lados do ángulo.

A **bisectriz** divide un ángulo noutros dous iguais.

Construción da bisectriz.

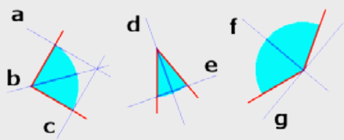
Os instrumentos básicos da xeometría plana permiten trazar a bisectriz dun ángulo.

Traza dúas semirrectas cunha mesma orixe, que será o **vértice** A do ángulo. Coloca o compás sobre A e traza un arco de circunferencia que corte aos dous lados, nos puntos B e C.

Traza outros dous arcos, un de centro B e radio C e o segundo con centro C e radio B.

Une por fin o vértice A co punto onde se cortan os dous arcos que acabas de trazar e obterás a bisectriz do ángulo.

EXERCICIOS resoltos



27. Indica sobre a figura cal e a bisectriz dos ángulos representados.

Sol As bisectrices son as rectas b, d e f, respectivamente.

28. Traza sobre a figura a bisectriz do ángulo representado.

Sol Revisa a páxina Construción da bisectriz.

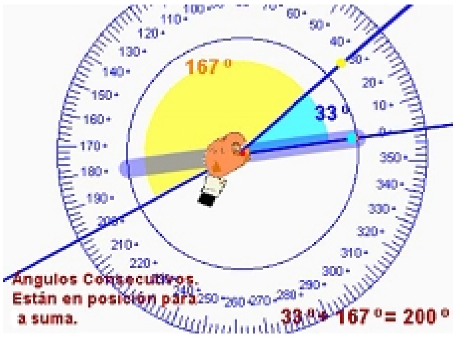
29. Traza as bisectrices dos dous ángulos consecutivos que aparecen na figura. Que relación gardan entre sí estas dúas bisectrices?

Sol Se os ángulos son suplementarios, coma neste caso, as dúas bisectrices son perpendiculares entre sí.

5. Operacións con ángulos.

Suma de ángulos.

Dous ou más ángulos poden sumarse para formar outro. A operación **suma** de ángulos realízase tanto graficamente como analiticamente.



A suma **gráfica** realízase colocando os ángulos en posición de consecutivos, é dicir, compartindo o vértice e un lado, para dar lugar a outro ángulo que comprende a ambos.

Analiticamente, a operación realízase sumando as amplitudes dos ángulos para obter a amplitude do ángulo resultante.

EXEMPLO

138º + 97º = 235º

> A **suma** analítica de ángulos realízase sumando as **amplitudes** de cada un deles.

Resta de ángulos.

A **resta** ou diferenza de ángulos pode facerse, igual que a suma, de dúas formas: gráfica e analítica.

Graficamente, basta colocar os dous ángulos de maneira que compartan o vértice e un lado. Así, o ángulo maior comprende ao menor, e o exceso é a diferenza entre ambos.

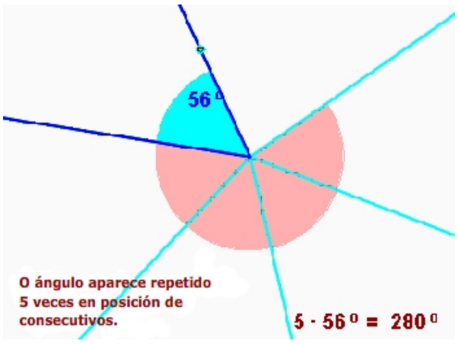
A resta **analítica** realízase restando a amplitude do ángulo menor da do maior.

EXEMPLO

253º – 166º = 87º

> Para **restar** analiticamente dous ángulos calculamos a **diferenza** entre o ángulo maior e o menor.

Multiplicación por un número.



EXEMPLO

7 · 46º = 322º

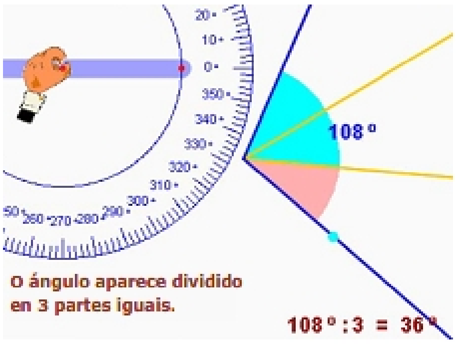
Multiplicar un ángulo por un número natural equivale a sumar o ángulo consigo mesmo tantas veces como indique o número.

Para multiplicar **graficamente** un ángulo por un número natural basta colocar o ángulo en posición de consecutivo consigo mesmo tantas veces como indique o número.

A operación **analítica** de multiplicar realízase multiplicando o número pola amplitude do ángulo.

Para **multiplicar** analiticamente un ángulo por un número natural multiplicamos o número pola amplitude do ángulo correspondente.

División por un número.



EXEMPLO

253º : 11 = 23º

No caso de que no sexa exacta, necesitamos máis ferramentas matemáticas para calcular o resultado da división. Algunha destas ferramentas explícanse no seguinte apartado.

A **división** dun ángulo por un número natural consiste en repartir o ángulo en tantas partes iguais como nos indique o número.

A división realízase de forma **analítica** dividindo a amplitude do ángulo entre o número natural correspondente.

A división **gráfica** resulta complexa xa que non sempre se pode facer con regra e compás. Isto sucede, por exemplo, coa división dun ángulo en tres partes iguais (o famoso problema da **trisección do ángulo**), imposible para a maior parte dos ángulos.

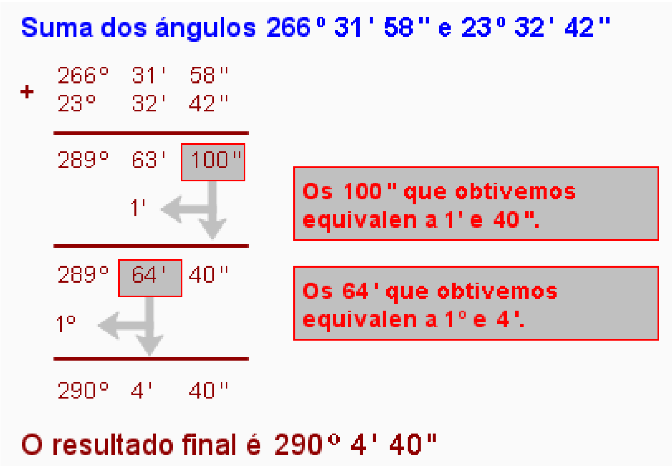
No entanto, sempre é posible calcular a división dun ángulo en dúas partes iguais graficamente, cousa que xa fixemos cando aprendimos a trazar a bisectriz dun ángulo.

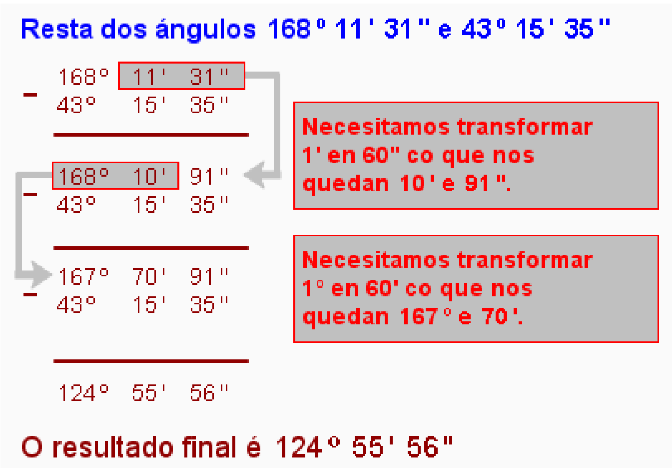
Operacións en forma complexa.

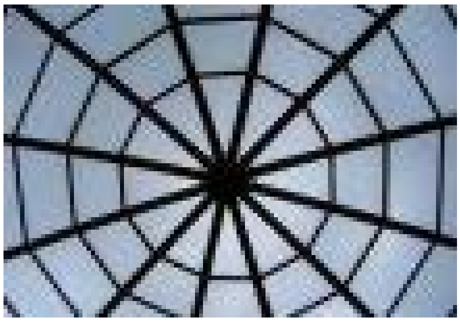
Para operar con ángulos expresados en forma **complexa** (graos, minutos e segundos), daremos os pasos que se describen na escena, recordando que 1 grao equivale a 60 minutos (**1º=60'**) e que 1 minuto equivale a 60 segundos (**1'=60''**).

Así, e sempre que sexa necesario e posible, poderemos **agrupar** 60 segundos para obter un minuto, ou ben 60 minutos para obter un grao. De igual forma, se é necesario, poderemos transformar un grao en 60 minutos o un minuto en 60 segundos.

> En **forma complexa** opéranse por separado os graos, minutos e segundos.







SUMA de ángulos en forma complexa

En primeiro lugar sumaremos os segundos. Se esta suma é igual ou superior a 60'', levaremos un minuto e anotaremos os segundos restantes.

Para os minutos realizaremos a mesma operación, contando cos que levamos do paso anterior. No caso de que teñamos 60 ou máis minutos, levaremos un grao.

Finalmente sumaremos os graos, contando co que nos levamos, de ser el caso.

RESTA de ángulos en forma complexa

O método para a resta comeza tamén polos segundos. Se no minuendo temos un número suficiente de segundos, restamos os que hai no substraendo.

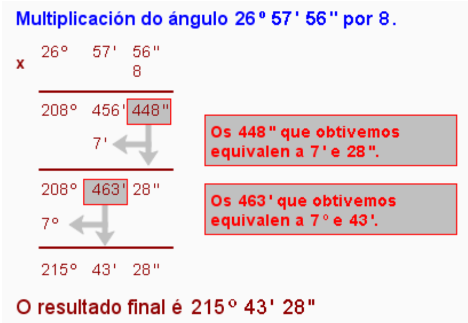
En caso contrario, deberemos "traer" un minuto do minuendo e convertelo en 60''. Desta forma reunimos una cantidade suficiente de segundos no minuendo e restamos de maneira natural.

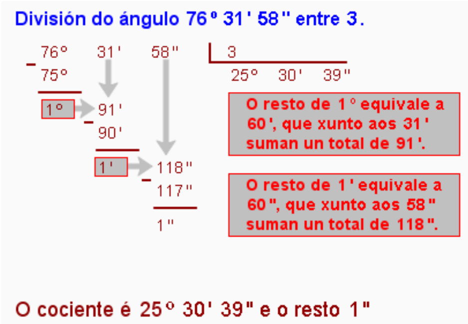
O proceso repítese agora cos minutos, tendo en conta que, de tivermos a necesidade de converter un en segundos, teremos un minuto menos no minuendo. Se os minutos que nos quedan no minuendo son suficientes procedemos á resta. Se non é así, deberemos traer un grao, que equivale a 60'. Finalmente restamos os graos, descontando, no seu caso, o que leváramos anteriormente.

MULTIPLICACIÓN de ángulos por un número

Comezamos multiplicando os segundos, minutos e graos por separado. Unha vez obtidos estes produtos, agrupamos os segundos de 60 en 60. Cada grupo que obteñamos representa un minuto máis a engadir aos minutos resultantes da multiplicación.

Una vez feito isto, repetimos o proceso cos minutos que obtivemos, agrupándoos de 60 en 60. Cada un destes grupos será un grao que engadiremos aos graos que resultaran da multiplicación.





DIVISIÓN de ángulos por un número

Empezamos esta vez polos graos, dividíndoos de forma natural. O resto desta primeira división, converterase en minutos que se engadirán aos que teñamos para dividir. Feito isto, procedemos á división dos minutos.

De igual forma que antes, o resto da división dos minutos haberá que convertelo en segundos e engadilo aos que tiñamos inicialmente, antes de pasar á súa división. O resto desta última fase é o resto final da operación de dividir.

EXERCICIOS resoltos

30. Calcula de forma gráfica e analítica a suma dos ángulos de 110º e 40º.

Sol Para a suma gráfica revisa a páxina Suma de ángulos.

A suma analítica é $110^{o}+40^{o}=150^{o}$.

31. Calcula de forma gráfica e analítica a resta dos ángulos de 163º e 34º.

Sol Para a resta gráfica revisa a páxina Resta de ángulos.

A resta analítica é $163^{o}-34^{o}=129^{o}$.

32. Calcula o resultado das seguintes operacións con ángulos: a. $73^{o}-36^{o}$, b. $28^{o}-(123^{o}-118^{o})$, c. $2\cdot 72^{o}+3\cdot 15^{o}$, d. $90^{o}:5$, e. $130^{o}-2\cdot 20^{o}+(180^{o}-60^{o}):3$

Sol a. $73^{o}-36^{o}=37^{o}$, b. $28^{o}-(123^{o}-118^{o})=23^{o}$, c. $2\cdot 72^{o}+3\cdot 15^{o}=189^{o}$, d. $90^{o}:5=18^{o}$, e. $130^{o}-2\cdot 20^{o}+(180^{o}-60^{o}):3=150^{o}$

33. Calcula o ángulo que describe a agulla dos minutos dun reloxo cando pasa das 3:20 ás 4:00.

Sol A agulla dos minutos dá unha volta completa, é dicir 360º, nunha hora, que equivale a 6º cada minuto, así que en 40 minutos describe un ángulo de 240º.

34. Calcula o ángulo que describe a agulla horaria dun reloxo nos seguintes casos: as 2:00 e as 2:47 e entre as 2:34 e as 7:11.

Sol A agulla horaria avanza 30º por hora, que equivale a medio grao cada minuto. Con esta relación e tendo en conta o exercicio anterior, os ángulos descritos son 90º, 30º, 15º, 23º 30' e 138º 30', respectivamente.

Para practicar

1. Se dúas rectas teñen un punto en común, cal é a súa posición relativa? E se son dous puntos comúns? E se non teñen ningún?

2. Se m é a mediatriz do segmento AB e D é un punto da recta m, cal é a distancia de D a A, sabendo que a distancia de D a B é 5,52 ?

3. Clasifica os ángulos de 0º, 45º, 90, 135º, 180º e 225º segundo a súa amplitude e segundo a comparación cos ángulos agudo e raso.

4. Dado un ángulo de amplitude 37º, cal é a amplitude do seu complementario? E a do seu suplementario?

5. De que amplitude son os catro ángulos que se obteñen ao trazar a recta bisectriz dun ángulo de 170º?

6. Realiza a seguinte operación con ángulos: $95^{o}+124^{o}-24^{o}$

7. Realiza a seguinte operación con ángulos: $3\cdot 27^{o}+5\cdot 19^{o}$

8. Realiza a seguinte división: $52^{o}:4$

9. Realiza a seguinte operación: $128^{o}\ 28'\ 23''+91^{o}\ 32'\ 49''$

10. Realiza a seguinte operación: $330^{o}\ 32'\ 43''-83^{o}\ 56'\ 47''$

11. Realiza a seguinte operación: $31^{o}\ 38'\ 9''\cdot 7$

12. Realiza a seguinte operación: $117^{o}\ 15'\ 34'':8$

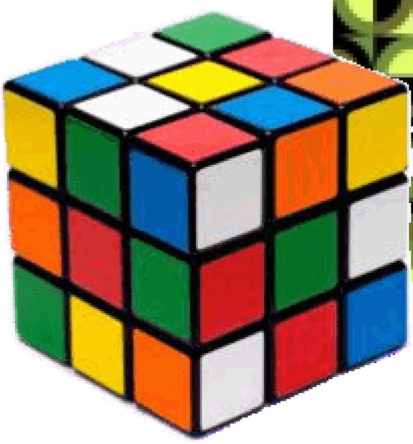
13. Realiza con regra e compás a construción xeométrica dunha recta perpendicular a outra.

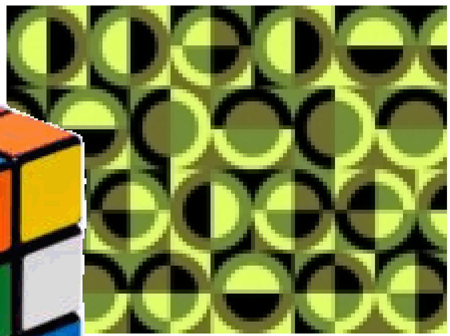
14. Realiza con regra e compás a construción xeométrica dunha recta paralela a outra.

15. Realiza con regra e compás a construción xeométrica da mediatriz dun segmento.

16. Realiza con regra e compás a construción xeométrica da bisectriz dun ángulo.

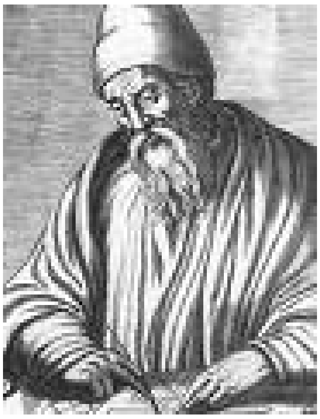
17. Realiza con regra e compás a construción xeométrica do punto simétrico a respecto dunha recta.



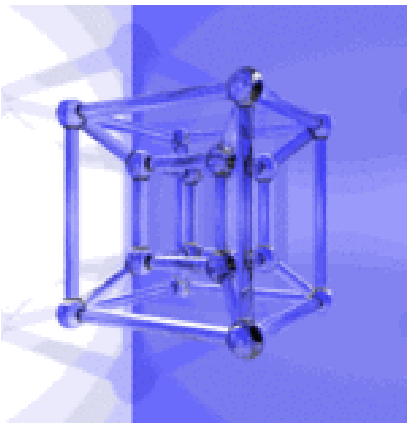


Para saber máis

O mestre Euclides



Euclides está considerado por moitos como o primeiro gran matemático da historia. O motivo? Ser o primeiro en organizar un discurso matemático, partindo de case nada, e utilizando de xeito estrito o **razoamento matemático**, método científico que caracteriza de xeito esencial á matemática fronte a outras disciplinas científicas.



A súa gran achega é un libro organizado en trece tomos, coñecido como "**Elementos de Xeometría**", no que, partindo de ideas fundamentais como as de **punto** , **recta**, **superficie** e **ángulo**, establece os seus famosos **cinco postulados**. Con esta pequena maleta de ferramentas, construíu un enorme edificio no que foi capaz de recoller case todos os coñecementos xeométricos existentes ata os nosos días. Todo o que sabemos acerca de ángulos e rectas, figuras planas como triángulos e circunferencias, paralelismo e perpendicularidade, áreas e moitísimo máis foi completamente terminado por el.

E todo isto ata o século XIX, en que algúns grandes nomes da matemática moderna puideron ampliar o horizonte que marcara Euclides. Para iso eliminaron o famoso 5º postulado de Euclides, coñecido tamén como "Postulado das paralelas", e atopáronse de súpeto con mundos xeométricos completamente novos, nos que as rectas paralelas pódense atopar, ou nos que a suma dos ángulos dun triángulo pode ser distinta de 180º.

Moitas persoas sentíronse mareadas ante estes novos e estraños mundos, ata que, pasado algún tempo, nos fomos dando conta de que nalgúns casos, estes raros mundos seméllanse máis ao noso do que parece. Se desexas máis información, podes buscar os nomes de **Riemann**, **Lobatchevski**, **Bolyai** ou **Gauss**, responsables en gran parte da evolución da xeometría cara a novos horizontes que gardan unha relación directa coas máis modernas teorías sobre a **orixe do Universo**. Abróchense os cintos!

Lembra o máis importante

Rectas

Os elementos fundamentais da xeometría plana son os **puntos** e as **rectas**.

A liña **recta** é a máis curta entre dous puntos.

Dúas rectas son **paralelas** se non se cortan en ningún punto e son **secantes** se se cortan nun punto.

Dúas rectas son **perpendiculares** se dividen ao plano en catro rexións da mesma amplitude.

Mediatriz dun segmento é unha recta perpendicular a este segmento e que o divide en dúas partes iguais.

Dise que dous puntos A e B son **simétricos** con respecto a unha recta, se esta recta é a mediatriz do segmento AB.

Ángulos

Ángulo é cada unha das dúas rexións en que dúas semirrectas coa mesma orixe dividen ao plano. Os ángulos poden clasificarse tendo en conta distintos criterios:

- con relación á súa amplitude: **recto**, **raso**, **nulo**;
- en comparación co ángulo recto: **agudo**, **obtuso**;
- en comparación co ángulo raso: **cóncavo**, **convexo**.

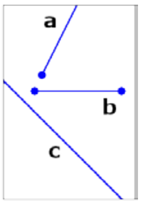
Ao dividir unha circunferencia en 360 partes iguais obtense un **grao**. Así, a circunferencia completa mide 360º, o ángulo recto mide 90º e o raso mide 180º.

Chámase **bisectriz** dun ángulo á semirrecta que o divide en dúas partes iguais.

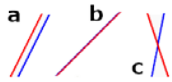
A suma e a resta de ángulos realízase sumando ou restando as amplitudes de cada un deles.

Autoavaliación

1. Relaciona cada elemento co seu nome correspondente.



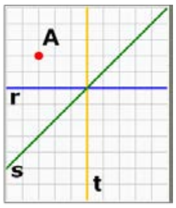
2. Indica a posición relativa dos pares de rectas.



3. Se unha recta é perpendicular a outras dúas rectas, como son estas dúas rectas entre si?

4. Como se chama a recta perpendicular a un segmento e que o divide en dúas partes iguais?

5. Indica o punto simétrico de A a respecto de cada un dos eixos r, s e t.



6. En cantos ángulos queda dividido o plano ao trazar dúas rectas secantes?

7. Calcula a amplitude do complementario e do suplementario do ángulo de 64º.

8. Como son entre si as bisectrices de dous ángulos suplementarios?

9. Calcula o resultado de sumar os ángulos de 17º, 36º e 42º.

10. Calcula o resultado da operación con ángulos que se indica: $2 \cdot 138^{o} - (53^{o} + 16^{o})$

Solucións dos exercicios para practicar

1. As rectas son secantes se teñen un punto en común, coincidentes se teñen dous puntos en común ou paralelas se non teñen ningún.

2. A distancia do punto D a A é a mesma que de D a B. Neste caso esa distancia é $d(D,A)=5{,}52$.

3. A clasificación é:
   0º ...... Nulo .... Agudo .... Convexo
   45º .... Agudo .... Convexo
   90º .... Recto ..... Convexo
   135º .. Obtuso ... Convexo
   180º .. Raso
   225º .. Cóncavo

4. O complementario de 37º é 53º e o suplementario 143º.

5. Obtéñense dous ángulos de 85º e outros dos de 95º.

6. $95^{o}+124^{o}-24^{o}=195^{o}$

7. $3\cdot 27^{o}+5\cdot 19^{o}=176^{o}$

8. $52^{o}:4=13^{o}$

9. O resultado é 220º 1' 12''.

10. O resultado é 246º 35' 56''.

11. O resultado é 221º 27' 3''.

12. O resultado é 14º 39' 26'' e resto 6''.

13. Revisa o vídeo da construción da perpendicular.

14. Revisa o vídeo da construción da paralela.

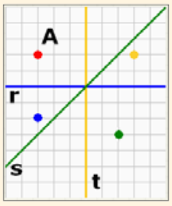
15. Revisa o vídeo da construción da mediatriz.

16. Revisa o vídeo da construción da bisectriz.

17. Revisa o vídeo da construción do punto simétrico.

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. a. semirrecta; b. segmento; c. recta.
2. a. paralelas; b. coincidentes; c. secantes.
3. Son paralelas.
4. Mediatriz.
5. Os puntos simétricos son os representados nas cores que se corresponden con cada recta.



6. En catro.
7. O complementario é 26º e o suplementario é 116º.
8. Son perpendiculares.
9. O resultado da suma é 95º.
10. $2\cdot 138^{o}-\left(53^{o}+16^{o}\right)=207^{o}$.