10 A circunferencia e o círculo

Obxectivos

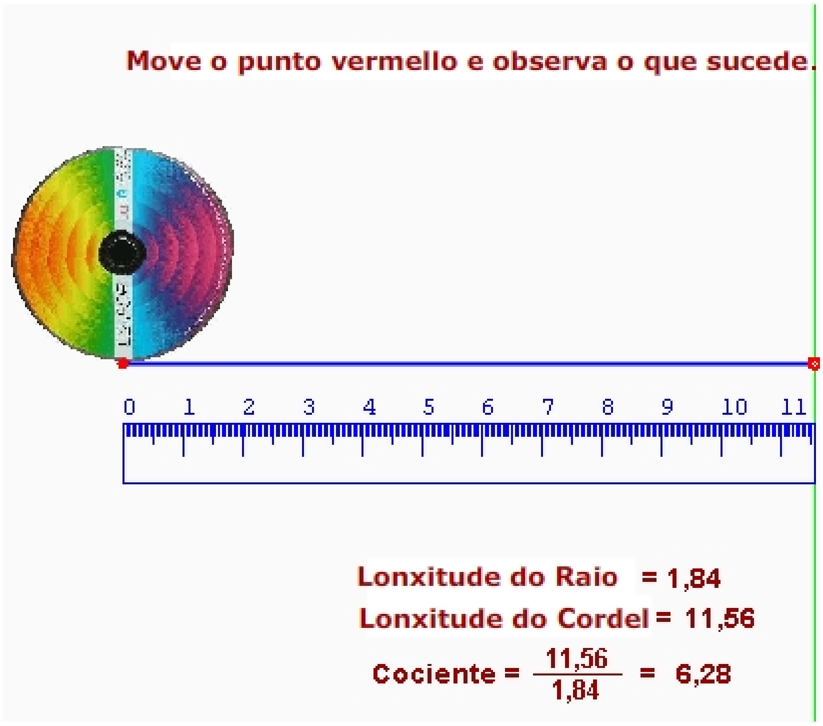
Nesta quincena aprenderás a:

- Identificar os diferentes elementos presentes na circunferencia e o círculo.
- Coñecer as posicións relativas de puntos, rectas e circunferencias.
- Coñecer as propiedades dos ángulos construídos na circunferencia.
- Medir lonxitudes e áreas de figuras circulares.

Antes de empezar

Investiga

Constrúe un círculo de cartón e mide a distancia do centro ao borde. Enrola un anaco de cordel ao redor do contorno do círculo. Desenrólao despois e mídeo tamén. Divide a segunda cantidade entre a primeira e anota o resultado. Podes repetir o experimento con círculos de distintos tamaños. Que podes dicir dos resultados que se obteñen?



O disco da figura ten un cordel enrolado ao longo do seu bordo exterior. Ao desenrolar o cordel (na figura aparece en azul), poderemos medir a súa lonxitude. Neste caso esta lonxitude é de 11,56 cm.

Ao dividir a lonxitude do cordel entre o raio do círculo, que mide 1,84 cm, obtemos como cociente 6,28.

Non habería nada de particular en todo o que acabamos de ver. O realmente sorprendente é que se repetimos o experimento con calquera obxecto redondo, obteremos finalmente o mesmo cociente ... ¡exactamente o mesmo!

Este cociente debe ser, polo tanto, unha cantidade con entidade propia, é dicir, unha cantidade que terá unha relación íntima e fundamental coa xeometría do círculo.

1. A circunferencia

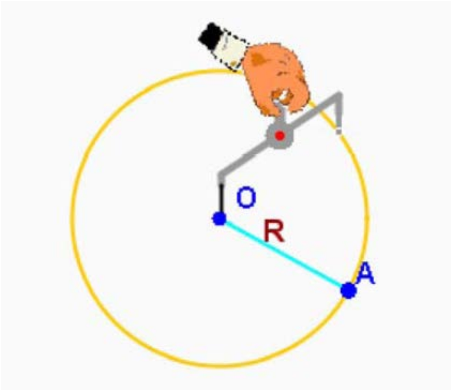
A circunferencia.

Marca un punto O sobre un plano. Marca agora outro punto A calquera e calcula a distancia entre O e A. Se buscas todos os puntos do plano que están a esa mesma distancia do punto O, obterás unha figura plana, que se coñece como **circunferencia**.

De xeito máis preciso, a **circunferencia** é unha liña plana e pechada formada por todos os puntos que se atopan a igual distancia dun punto O dado.

O punto O chámase **centro** da circunferencia e a distancia entre o centro e calquera dos puntos da circunferencia chámase **raio**.

A **circunferencia** é unha liña plana e pechada na que todos os puntos están a igual **distancia** dun punto O dado.



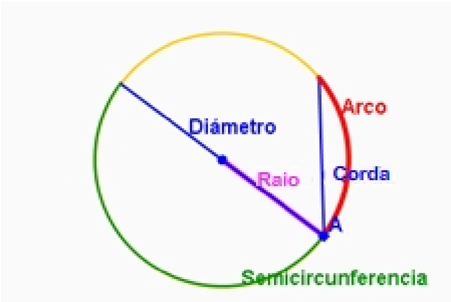
O compás é un instrumento necesario para o debuxo de circunferencias e círculos.

Para debuxar unha circunferencia basta situar a agulla do compás sobre un punto e, coa abertura, desexada, xiralo. A abertura que deamos ao compás é o raio da circunferencia.

Elementos da circunferencia.

Nunha circunferencia podemos distinguir os seguintes elementos:

- **Centro**: é o punto situado no seu interior que se atopa á mesma distancia de calquera punto da circunferencia.
- **Raio**: é o segmento que une calquera punto da circunferencia co centro.
- **Corda**: é o segmento que une dous puntos calquera da circunferencia.
- **Diámetro**: é a corda que pasa polo centro da circunferencia.
- **Arco**: é o segmento de circunferencia comprendido entre dous dos seus puntos.
- **Semicircunferencia**: é o arco que abarca a metade da circunferencia.

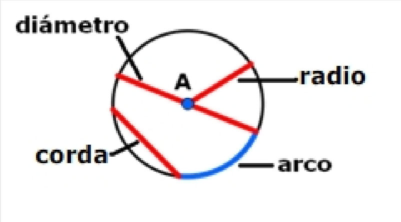


O diámetro ten **lonxitude dobre** que o raio.

EXERCICIOS resoltos

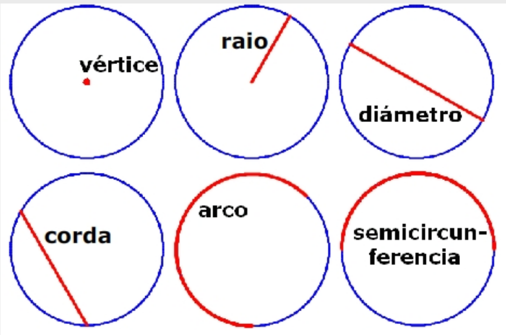
1. Debuxa con regra e compás unha circunferencia de 3 cm de raio con centro no punto A e traza sobre ela os seguintes elementos: un raio, un diámetro, unha corda e un arco.

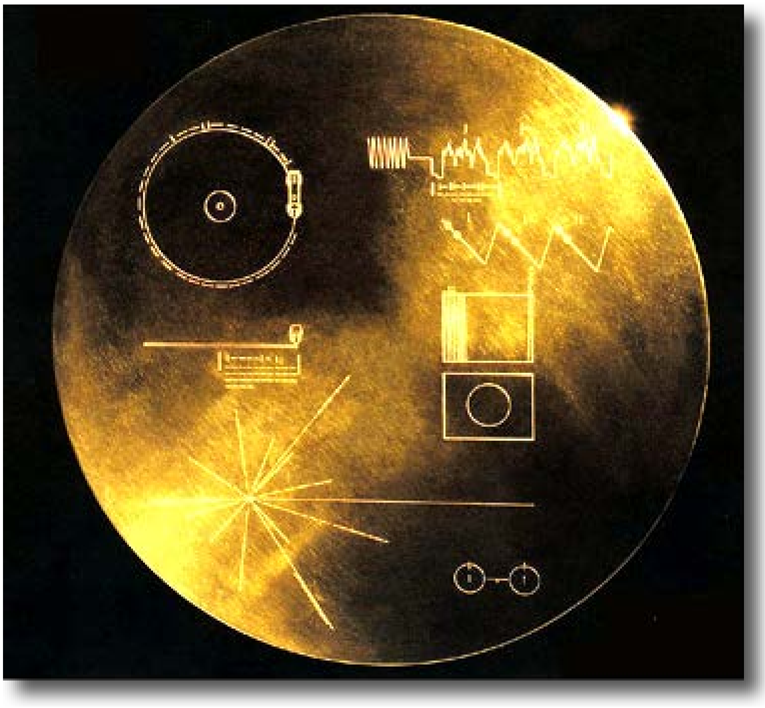
   Sol Usa os instrumentos de debuxo para obter un resultado similar a este:



2. Identifica na figura o nome dos distintos elementos que aparecen pintados en vermello.

   Sol





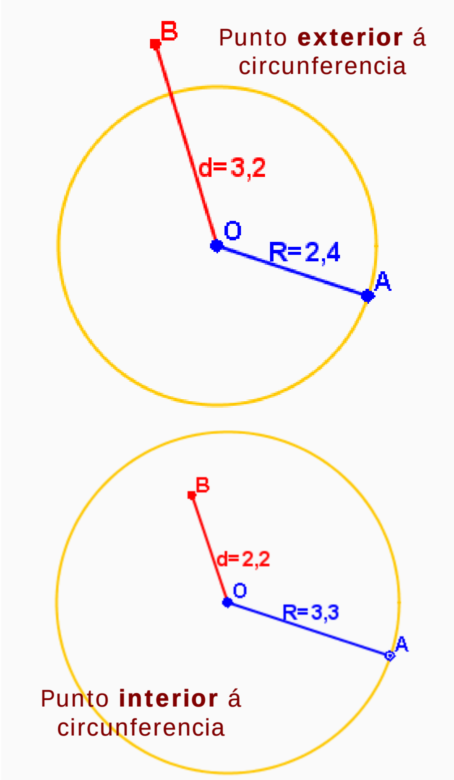
2. Posicións relativas

Punto e circunferencia.

Entre un punto e unha circunferencia poden producirse distintas situacións ás que chamamos **posicións relativas**.

Dicimos que o punto é **exterior** á circunferencia se se atopa a unha distancia do centro **maior** que o raio. Neste caso o punto está fora da circunferencia. O punto é **interior** se se atopa a unha distancia do centro **menor** que o raio. O punto está entón dentro da circunferencia.

Se o punto esta situado sobre a circunferencia dicimos que **pertence** a ela. Neste caso a distancia ao centro é **igual** ao raio.



> Un punto que non pertenza á circunferencia pode ser **interior** ou **exterior** a ela.

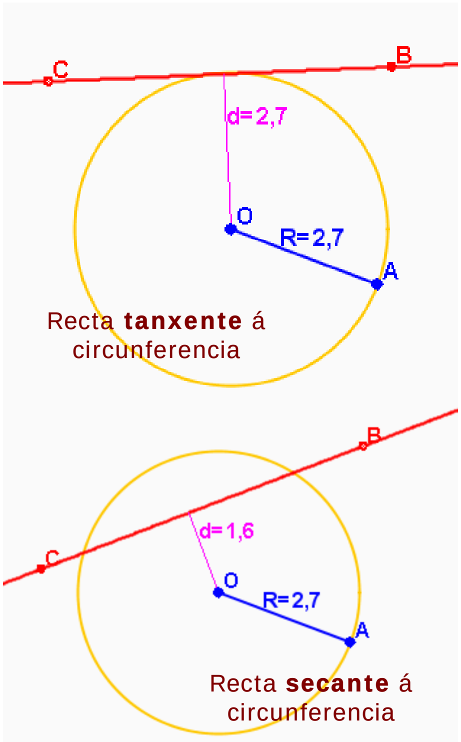
Recta e circunferencia.

Igual que fixemos con puntos, podemos estudar a posición relativa dunha recta e unha circunferencia. Pódense dar os seguintes casos.

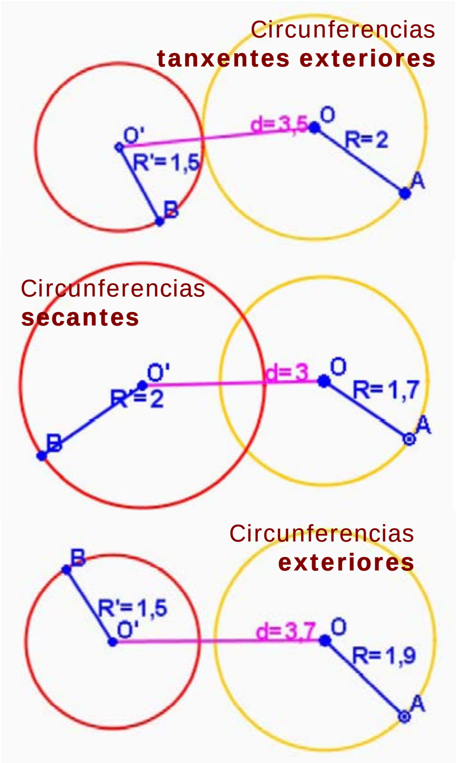
Se a recta non ten **ningún punto en común** coa circunferencia, dicimos que son **exteriores**.

Se ten **un punto en común**, dicimos que a recta e a circunferencia son **tanxentes**. Neste caso a recta é **perpendicular** ao raio.

Se teñen **dous puntos comúns**, entón dicimos que a recta e a circunferencia son **secantes**.



> Chamamos **tanxente** á recta que ten un só punto en común coa circunferencia.



Dúas circunferencias.

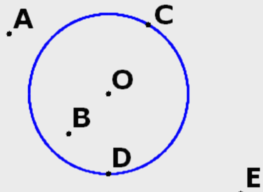
Entre dúas circunferencias pódense producir as seguintes posicións relativas.

- **Exteriores**: todos os puntos de cada circunferencia son exteriores á outra.
- **Interiores**: todos os puntos dunha das circunferencias son interiores á outra. Se ademais teñen o mesmo centro, dicimos que son concéntricas.
- **Tanxentes**: teñen un punto en común. Serán tanxentes **exteriores** ou tanxentes **interiores**, dependendo da posición dos puntos que non son comúns a ambas.
- **Secantes**: teñen dous puntos en común e cada circunferencia divide á outra en dous arcos.

EXERCICIOS resoltos

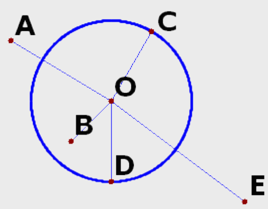
3. Indica se os seguintes puntos son interiores, exteriores ou pertencen á circunferencia.

Sol A e E son exteriores; O e B son interiores; C e D pertencen á circunferencia.



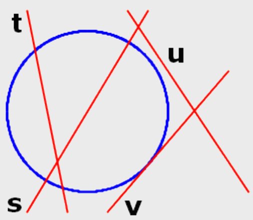
4. Indica cales dos puntos están a igual distancia do centro, cales se atopan a unha distancia do centro maior que o raio, cales están a distancia menor que o raio e cales están a unha distancia equivalente ao dobre do raio.

Sol Os puntos C e D están situados a igual distancia do centro O; A e E están situados a maior distancia que o raio; B está situado a menor distancia que o raio; E está situado a unha distancia dobre do raio.



5. Indica a posición relativa das rectas que aparecen na figura, con respecto á circunferencia.

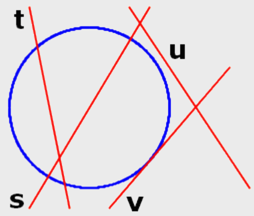
Sol As rectas t e s son secantes; u é exterior á circunferencia; v é tanxente.



EXERCICIOS resoltos

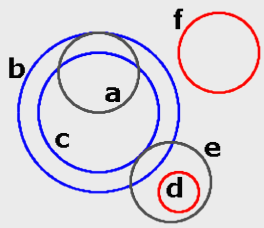
6. Representa sobre a figura a distancia de cada unha das rectas ao centro da circunferencia e indica en que casos esa distancia é maior que o raio, en que casos é menor e en cales é igual que o raio.

Sol A distancia da recta u ao centro é maior que o raio; a distancia de t ao centro é menor que o raio; a distancia de v ao centro é igual que o raio; a distancia de s ao centro é nula.



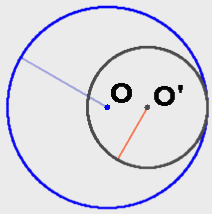
7. Indica a posición relativa dos pares de circunferencias que aparecen na figura: a e b, a e c, b e c, c e f, e e d, e e b, a e d, c e e

Sol As circunferencias a e b son tanxentes interiores; a e c son secantes; b e c son interiores concéntricas; c e f son exteriores; e e d son interiores; e e b son secantes; a e d son exteriores e c e e son tanxentes exteriores.



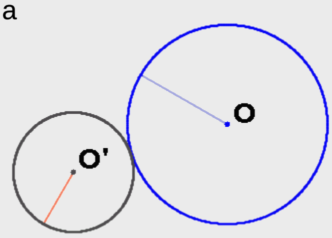
8. Debuxa dúas circunferencias de raios 5 cm e 3 cm respectivamente que sexan tanxentes interiores. A que distancia se atopan os seus centros?

Sol A distancia entre os centros é de 2 cm.



9. Debuxa as mesmas circunferencias anteriores, pero esta vez en posición de tanxentes exteriores. A que distancia se atopan agora os seus centros?

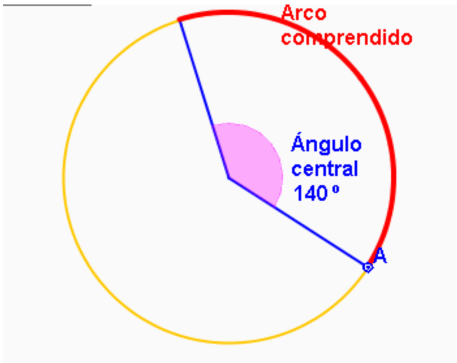
Sol Os seus centros están a 8 cm de distancia.



10. Dúas circunferencias teñen raios 3 e 4 cm respectivamente, e os seus centros atópanse a unha distancia de 9 cm. Cal é a súa posición relativa?

Sol Son circunferencias exteriores.

3. Ángulos na circunferencia



O ángulo central da figura correspóndese co arco de circunferencia debuxado en vermello.

É posible establecer esta correspondencia entre calquera ángulo central e o seu arco de circunferencia, ou ben, en sentido contrario, entre calquera arco e o seu ángulo central.

Por esta razón, podemos falar da **amplitude do arco**, que neste caso é de 140º.

Ángulo central.

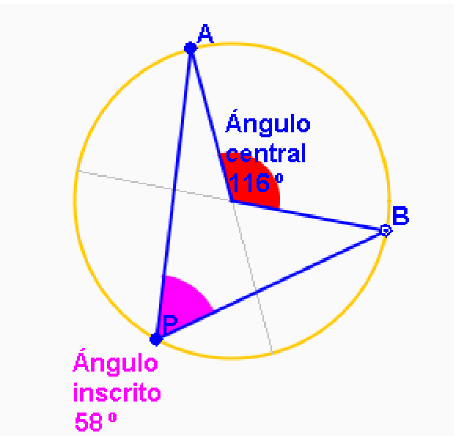
Chámase **ángulo central** a calquera ángulo que teña o seu **vértice** no centro da circunferencia.

Todo ángulo central corta á circunferencia en dous puntos que determinan un arco comprendido.

Así, un ángulo de 360º comprende á circunferencia completa, un ángulo de 180º divide á circunferencia en dous arcos iguais e un ángulo recto comprende un arco que é a metade dunha semicircunferencia.

Desta maneira é posible identificar cada **ángulo central** co seu **arco** de circunferencia correspondente.

Todo ángulo central determina un **arco** sobre a circunferencia.



O ángulo inscrito con vértice no punto P é a metade do ángulo central AOB.

De tal xeito que se movemos o punto P ao longo da circunferencia, o ángulo APB terá sempre a mesma amplitude, xa que seguirá sendo en todos os casos a metade do ángulo central.

Ángulo inscrito.

Chámase **ángulo inscrito** ao ángulo que ten o seu vértice P na circunferencia, de forma que os seus lados son **secantes** coa circunferencia.

Se A e B son os puntos nos que os lados do ángulo inscrito APB cortan á circunferencia e consideramos o ángulo central AOB que queda determinado polos puntos A e B, resulta entón que este ángulo central AOB ten amplitude dobre que o ángulo inscrito APB.

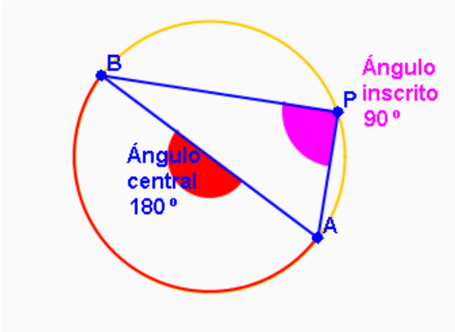
Sabemos así que a amplitude de calquera ángulo **inscrito** é a **metade** da amplitude do ángulo **central** correspondente.

A amplitude de calquera ángulo inscrito é a **metade** da amplitude do ángulo central correspondente..

Ángulo inscrito na semicircunferencia.

Como consecuencia da relación existente entre as amplitudes dos ángulos centrais e os seus correspondentes ángulos inscritos, resulta fácil obter a amplitude dun **ángulo inscrito nunha semicircunferencia**.

Un diámetro da circunferencia determina unha semicircunferencia, que se corresponde cun ángulo central de 180º (chan). Así, calquera ángulo inscrito determinado polo diámetro terá unha amplitude que é a metade do ángulo chan. Polo tanto, todo **ángulo inscrito** nunha **semicircunferencia** é un ángulo **recto**.

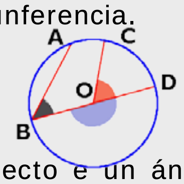


A un ángulo central corresponde un ángulo inscrito que é a metade. Por este motivo, se o ángulo central é chan, o inscrito será recto.

EXERCICIOS resoltos

11. Identifica os seguintes tipos de ángulos, pola súa posición na circunferencia.

Sol O ángulo ABD é un ángulo inscrito na circunferencia; os ángulos COD e BOD son ángulos centrais.



12. Representa sobre a circunferencia da figura un ángulo central recto e un ángulo inscrito que se corresponda con el. Calcula a amplitude do ángulo inscrito, sen medilo co transportador.

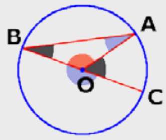
Sol O ángulo inscrito é a metade que o seu correspondente ángulo central. Como o ángulo central é recto, o inscrito será de 45º.

13. Representa sobre a circunferencia da figura un ángulo inscrito recto e o seu correspondente ángulo central. Calcula a amplitude do ángulo central, sen medilo co transportador.

Sol O ángulo central ten amplitude dobre que o seu correspondente ángulo inscrito, polo que a súa amplitude será un ángulo chan.

14. Na seguinte figura indica a amplitude dos ángulos sinalados, sen utilizar o transportador, sabendo que o ángulo AOC mide 54º.

Sol O ángulo ABC é o inscrito correspondente con AOC, así que a súa amplitude será 27º; AOB mide 136º por ser o suplementario de AOC; BAO mide 27º porque o triángulo ABO é isósceles; BOC é un ángulo chan.

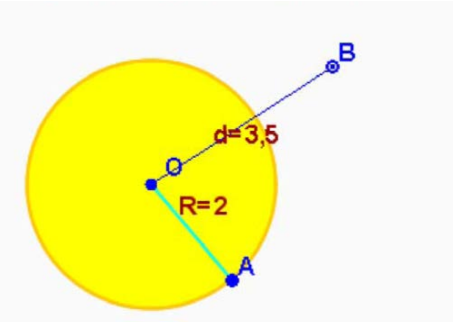


15. Se partimos unha empanada en 18 cachos iguais, que ángulo corresponde a cada ración? En cantos cachos habería que cortala para que cada ración fose de 30º?

Sol Para partila en 18 cachos faremos $\frac{360^{o}}{18}=20^{o}$ cada ración; se queremos que as racións sexan de 30º, teremos $\frac{360^{o}}{30^{o}}=12$ racións.

4. Círculo e figuras circulares

O círculo.



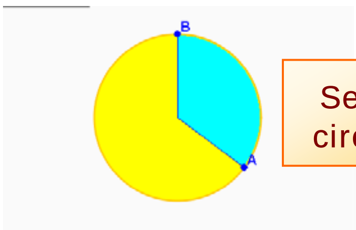
Se a distancia ao centro é maior que o raio, o punto será exterior ao círculo.

Chamamos **círculo** á rexión plana encerrada por unha circunferencia. De xeito máis preciso, se O é o centro da circunferencia, o círculo é a rexión do plano formada por todos os puntos cuxa **distancia** ao centro O é **menor ou igual** que o **raio** da circunferencia.

Así, o círculo comprende todos os puntos da circunferencia e tamén todos os puntos interiores a ela. A circunferencia é polo tanto o **contorno**, a "fronteira" do círculo.

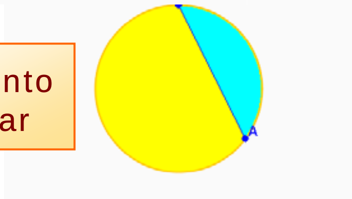
Chámanse centro, raio e diámetro do círculo ao centro, raio e diámetro da súa circunferencia.

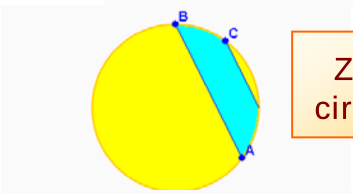
O **círculo** está formado pola **circunferencia** e todos os puntos **interiores** a ela.



Sector circular

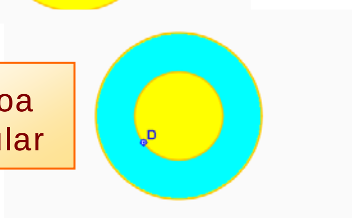
Segmento circular

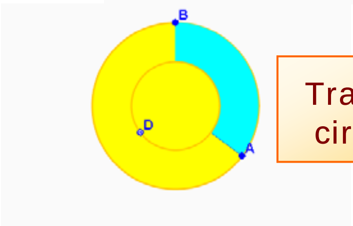




Zona circular

Coroa circular





Trapecio circular

Figuras circulares.

É posible determinar nun círculo varias figuras xeométricas de interese.

Chámase **sector circular** á rexión do círculo determinada por dous raios.

Chámase **segmento circular** á rexión do círculo determinada por unha corda. A rexión delimitada por dúas cordas paralelas chámase **zona circular**.

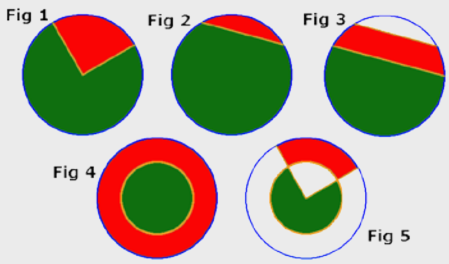
A rexión determinada por dúas circunferencias concéntricas denomínase **coroa circular**. Se cortamos unha coroa circular por dous raios, obtemos unha figura chamada **trapecio circular**.

Os raios, cordas e circunferencias concéntricas determinan diversas **figuras circulares**.

EXERCICIOS resoltos

16. Identifica polo seu nome os elementos que aparecen representados en vermello e verde nas figuras adxuntas.

Sol Fig 1 verde...... sector circular
vermella . sector circular
Fig 2 verde...... segmento circular
vermella . segmento circular
Fig 3 verde...... segmento circular
vermella . zona circular
Fig 4 verde...... círculo
vermella . coroa circular
Fig 5 verde...... sector circular
vermella . trapecio circular



Os sectores circulares, coroas, semicírculos e demais elementos están presentes en toda clase de obxectos de distinta natureza.

Lonxitudes na circunferencia.

En calquera circunferencia, ao dividir a súa lonxitude entre o diámetro, obtense unha cantidade fixa algo maior que tres.
Esa **división** da sempre **3,1415926 ...**

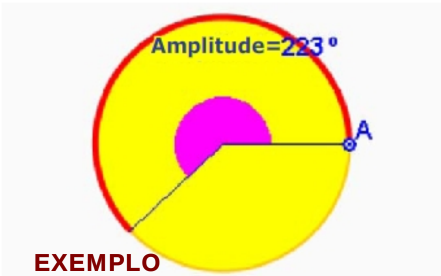
Este número identifícase pola letra grega π (pi) e ten infinitas cifras decimais non periódicas.

Se L é a lonxitude da circunferencia e D o diámetro, temos $L = \pi \cdot D$. Como o diámetro é dobre do raio R, a lonxitude da circunferencia será:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot R$$

Para achar a lonxitude do arco de circunferencia, facemos corresponder o perímetro $2 \cdot \pi \cdot R$ coa amplitude 360º. E por **proporcionalidade directa**, se n é a amplitude do arco, resulta

$$L_{arco} = \frac{n \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{360}$$



EXEMPLO

Para calcular a lonxitude L_{arco} do arco de 223º expresamos a seguinte proporción:

$$\begin{matrix} L_{arco} & \rightarrow & 223^{o} \\ L_{circunf} & \rightarrow & 360^{o} \end{matrix} \quad \text{así que} \quad \frac{L_{arco}}{L_{circunf}} = \frac{223^{o}}{360^{o}}$$

e de aquí obtemos que a lonxitude do arco é $L_{arco} = \frac{223^{o}}{360^{o}} \cdot L_{circunf}$

Como a lonxitude da circunferencia é $L_{circunf} = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}58$, xa podemos coñecer a lonxitude do arco que buscábamos.

EXERCICIOS resoltos

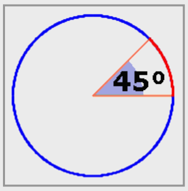
17. Calcula a lonxitude dunha circunferencia que ten 20 cm de raio.

Sol A lonxitude é $L = 2\cdot\pi\cdot 20 = 125{,}66$ cm.

18. Calcula a lonxitude de dúas circunferencias que teñen 30 cm de diámetro, a primeira, e 15 cm de raio a segunda.

Sol O raio da primeira é a metade do diámetro, é dicir, 15 cm. Polo tanto ambas teñen o mesmo raio e a súa lonxitude é $L = 2\cdot\pi\cdot 15 = 94{,}25$ cm.

19. Calcula a lonxitude da circunferencia e dos arcos marcados en azul e vermello, sabendo que o seu raio é 3 cm.



Sol A circunferencia ten unha lonxitude de $L = 2\cdot\pi\cdot 3 = 18{,}85$ cm. O ángulo de 45º é a oitava parte da circunferencia, así que o arco vermello ten lonxitude $L_{arcovermello} = \frac{18{,}85}{8} = 2{,}36$ cm. O arco azul é a diferenza entre a circunferencia e o arco vermello: $L_{\text{arco azul}} = 18{,}85 - 2{,}36 = 16{,}49$ cm.

20. Calcula a lonxitude do arco correspondente a un ángulo de 180º nunha circunferencia de raio 1. Calcula tamén as lonxitudes dos arcos de 30º, 90º e 270º.

Sol A circunferencia de raio 1 ten lonxitude $L = 2\cdot\pi\cdot 1 = 2\cdot\pi$ e o arco de 180º é unha semicircunferencia, así que a súa lonxitude será a metade: $L_{\text{semicirc}} = \pi = 3{,}14$. Os arcos de 30º, 90º e 270º son a duodécima, cuarta e tres cuartas partes da circunferencia, respectivamente, así que as súas lonxitudes son: $L_{\text{arco }30^\circ} = \frac{1}{12}\cdot 2\cdot\pi = 0{,}52$, $L_{\text{arco }90^\circ} = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi = 1{,}57$, $L_{\text{arco }270^\circ} = \frac{3}{4}\cdot 2\cdot\pi = 4{,}71$.

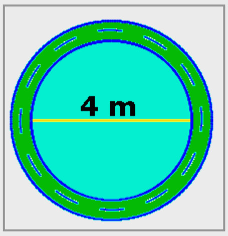
21. Calcula o raio dunha circunferencia sabendo que ten unha lonxitude de 25,13 cm.

Sol O raio será $R = \frac{25{,}13}{2\cdot\pi} = 4$ cm.

22. Calcula o raio dunha circunferencia sabendo que a un ángulo de 60º lle corresponde un arco de 10 cm. E se fose un ángulo de 203º ao que lle corresponde un arco de 15 cm?

Sol O ángulo de 60º é a sexta parte da circunferencia, así que a lonxitude da circunferencia completa é 60 cm e o seu raio será $R = \frac{60}{2\cdot\pi} = 9{,}55$ cm. Para o arco de 203º, temos que $L_{\text{arco}} = \frac{n}{360}\cdot 2\cdot\pi\cdot R$, de onde $15 = \frac{203}{360}\cdot 2\cdot\pi\cdot R$ e de aquí $R = \frac{360\cdot 15}{2\cdot\pi\cdot 203} = 4{,}23$ cm.

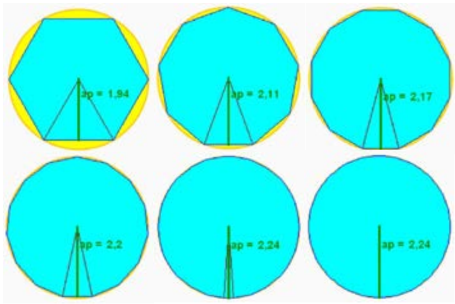
23. Unha piscina circular de 4 m de diámetro está rodeada por unha beirarrúa de 1 m de anchura. Cal será a lonxitude da beirarrúa se a medimos exactamente pola metade da súa anchura?



Sol Como a anchura da beirarrúa é de 1 m, xusto pola metade teremos unha circunferencia de raio $2 + 0{,}5 = 2{,}5$ m. A lonxitude entón será $L = 2\cdot\pi\cdot 2{,}5 = 15{,}71$ cm.

Áreas no círculo.

✓ A **área** dun **círculo** pódese achar considerándoo como un polígono regular de "moitos" lados, no que o apotema coincide co raio.



$$\text{Área dun polígono regular} = \frac{\text{Perímetro}\cdot\text{apotema}}{2}$$

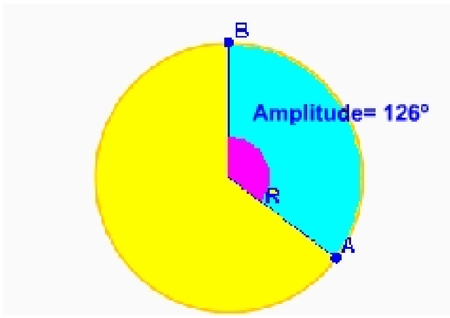
$$\text{Que se converte en } \frac{2\cdot\pi\cdot R\cdot R}{2} = \pi\cdot R^2$$

Obtemos así a fórmula que da a área a partir do raio.

$$\textbf{Área} = \pi\cdot R^2$$

✓ A **área** dun **sector circular** de amplitude n, calcúlase utilizando a proporcionalidade directa, co que resulta a fórmula:

$$A_{sector} = \frac{n\cdot\pi\cdot R^2}{360}$$



$$Area_{sector} = \frac{126\cdot\pi\cdot 2{,}5^2}{360} = 27{,}74\ cm^2$$

EXEMPLO

Para calcular a área A_{sector} do sector de 126º dun círculo de raio 2,5 cm, expresamos a seguinte proporción:

$$\begin{matrix} A_{sector} & \rightarrow & 126^o \\ A_{circ} & \rightarrow & 360^o \end{matrix} \quad \text{así que} \quad \frac{A_{sector}}{A_{circ}} = \frac{126^o}{360^o}$$

e, de aquí, obtemos que a área do sector é

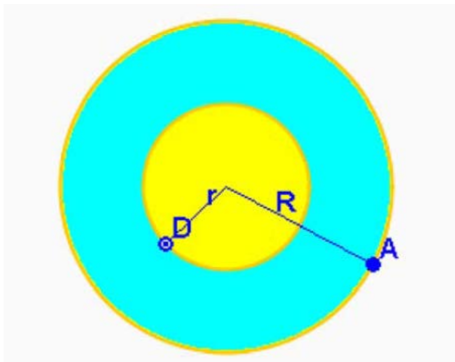
$$A_{sector} = \frac{126^o}{360^o}\cdot A_{circ}$$

Como a área do círculo é $A_{circ} = \pi\cdot 2{,}5^2$, xa podemos coñecer a área do sector que buscábamos.

✓ Para calcular a **área** da **coroa circular** réstanse as áreas das circunferencias maior e menor:

$$A_{coroa} = \pi\cdot(R^2 - r^2)$$

onde R e r son os raios maior e menor da coroa.



$$A_{coroa} = \pi\cdot\left(3{,}5^2 - 1{,}75^2\right) = 28{,}86\ cm^2$$

EXEMPLO

Para calcular a área A_{coroa} da coroa circular de raio maior 3,5 e raio menor 1,75 calcularemos a área de cada unha das dúas circunferencias:

$$A_{maior} = \pi\cdot R^2 = \pi\cdot 3{,}5^2 \quad \text{e} \quad A_{menor} = \pi\cdot r^2 = \pi\cdot 1{,}75^2$$

Restando ambas áreas obtemos:

$$A_{coroa} = \pi\cdot 3{,}5^2 - \pi\cdot 1{,}75^2 = \pi\cdot\left(3{,}5^2 - 1{,}75^2\right) = 28{,}86$$

EXERCICIOS resoltos

24. Calcula a área dun círculo de 5 cm de raio.

Sol A área é $A=\pi\cdot 5^2=78{,}54\ \text{cm}^2$.

25. Calcula a área de dous círculos de 10 cm e de 20 cm de diámetro, respectivamente.

Sol As áreas son $A_1=\pi\cdot 5^2=78{,}54$ e $A_2=\pi\cdot 10^2=314{,}16\ \text{cm}^2$. É importante notar que se unha circunferencia ten raio dobre que outra, a súa área non é o dobre senón o cuádruplo da primeira.

26. Calcula a área das figuras circulares pintadas de cores.
Nota: O raio das circunferencias exteriores é 2 cm en todos os casos e o das interiores é 1,2 cm.

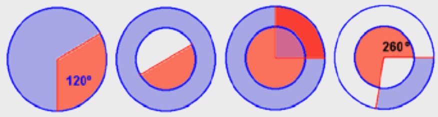


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

Sol Fig 1 $A_{sector\ vermello}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2^2=4{,}19\ \text{cm}^2$, $A_{sector\ azul}=\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 2^2=8{,}38\ \text{cm}^2$;

Fig 2 $A_{coroa}=\pi\cdot\left(2^2-1{,}2^2\right)=8{,}04\ \text{cm}^2$, $A_{semicirc}=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1{,}2^2=2{,}26\ \text{cm}^2$;

Fig 3 $A_{trap\ vermello}=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(2^2-1{,}2^2\right)=2{,}01\,\text{cm}^2$, $A_{trap\ azul}=\frac{3}{4}\cdot\pi\cdot\left(2^2-1{,}2^2\right)=6{,}03\,\text{cm}^2$;

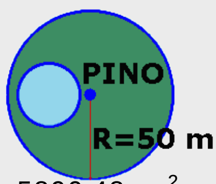
$A_{sec\ tor\ vermello}=\frac{3}{4}\cdot\pi\cdot 1{,}2^2=3{,}39\ \text{cm}^2$, $A_{sec\ tor\ azul}=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1{,}2^2=1{,}13\ \text{cm}^2$;

Fig 4 $A_{sec\ tor\ vermello}=\frac{260}{360}\cdot\pi\cdot 1{,}2^2=3{,}27\,\text{cm}^2$, $A_{trap\ azul}=\frac{100}{360}\cdot\pi\cdot\left(2^2-1{,}2^2\right)=2{,}23\,\text{cm}^2$.

27. Cal é o perímetro dun círculo de área 25 cm^2?

Sol O raio é $R=\sqrt{\frac{25}{\pi}}=2{,}82$ e o perímetro $L=2\cdot\pi\cdot 2{,}82=17{,}72\ \text{cm}$.

28. Quérese construír unha piscina redonda nunha finca circular de 50 m de diámetro, conservando un pino que hai no centro. Calcula o diámetro máximo da piscina e a superficie de finca que quedará despois da obra.



Sol Diámetro máximo: 50 m. $A_{piscina}=\pi\cdot 25^2=1963{,}5\ \text{cm}^2$.

$A_{finca}=\pi\cdot 50^2=7853{,}98\ \text{cm}^2$; $A_{finca}-A_{piscina}=7853{,}98-1963{,}5=5890{,}48\,\text{cm}^2$

29. A agulla dos segundos dun reloxo mide 2 cm. Calcula a lonxitude do arco que describe esta agulla ao cabo de 20 segundos.

Sol Describe un arco de 120º, de lonxitude $L=2\cdot\pi\cdot 2\cdot\frac{120}{360}=4{,}19\ \text{cm}$.

30. Se a agulla dos minutos dun reloxo mide 4 cm, calcula a área do sector circular que describe esta agulla entre as 3:20 e as 4:00. Calcula a área do sector que describe no mesmo intervalo de tempo a agulla das horas, que mide 3 cm.

Sol A agulla dos minutos avanza 240º e a área é $A_{agullaminutos}=\frac{240}{360}\pi\cdot 4^2=33{,}51\ \text{cm}^2$.

A agulla das horas avanza 20º e a área é $A_{agullahoras}=\frac{20}{360}\pi\cdot 3^2=1{,}57\ \text{cm}^2$.

Para practicar

1. Nunha circunferencia de raio 7,6 cal é a distancia entre o centro da circunferencia e calquera dos seus puntos? Canto mide o diámetro da circunferencia?

2. Nunha circunferencia de raio 4,6 é posible trazar unha corda de lonxitude 9,6?

3. Se unha circunferencia ten lonxitude 45 e un arco ten lonxitude 25 que amplitude terá o ángulo central correspondente a ese arco?

4. Se unha recta se atopa a unha distancia 2,8 do centro dunha circunferencia de raio 8,8 cales son as súas posicións relativas?

5. Se os centros de dúas circunferencias están a unha distancia de 9,9 e unha delas ten raio 2,1 como deberá ser o raio da outra para que sexan exteriores?

6. Se o ángulo central dunha circunferencia ten unha amplitude de 160º, cal será a amplitude do ángulo inscrito correspondente?

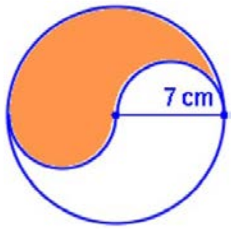
7. Cal será a amplitude do ángulo central se sabemos que o seu correspondente ángulo inscrito ten amplitude 27º? Que figura se forma cando o ángulo inscrito é recto?

8. Calcula a lonxitude dunha circunferencia de raio 3,4 e a área do círculo correspondente. Calcula a lonxitude do arco de amplitude 241º e a área do sector correspondente.

9. Calcula o raio interior dunha coroa circular sabendo que o seu raio exterior é 7 e a súa área 125,6.

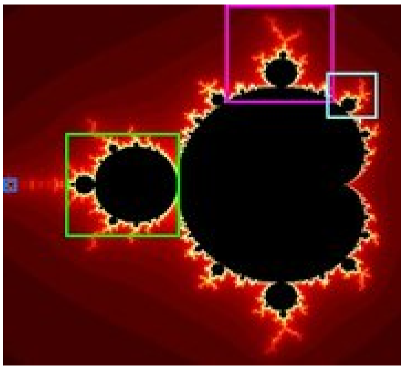
10. Calcula a área e o perímetro dunha ventá formada por un rectángulo de 1,6 m de anchura e dobre altura, coroada por un semicírculo.

11. Calcula a área e o perímetro da figura laranxa

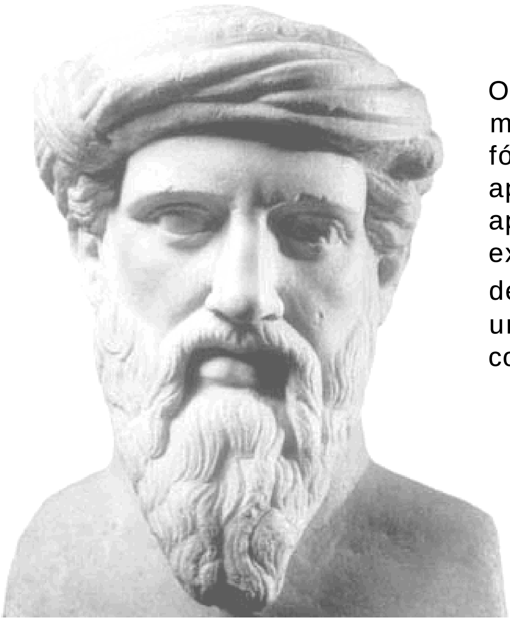


Para saber máis

A importancia dun número.



O número π foi unha das primeiras e máis importantes empresas científicas de toda a historia. Desde os inicios da xeometría era coñecida a relación que existe entre a lonxitude da circunferencia e o seu diámetro. O cociente entre ambas magnitudes é precisamente π, que toma o seu nome de Pitágoras.



O problema estaba en obter o valor exacto deste misterioso número e desde as épocas exipcia e grega fóronse dando distintas aproximacións. Unha destas aproximacións é a fracción 22/7 e tras ela foron aparecendo outras, cada vez máis próximas ao valor exacto. En 1768 o suízo Johann Heinrich Lambert demostrou algo que se viña sospeitando: que π non é un número racional, esto é, que non se pode obter como o cociente de dous números enteiros.

Pero o número quizais máis famoso da historia, é aínda máis especial: resultou ser que π non é tampouco un número alxébrico. Esto quere dicir que non existe ningunha ecuación construída coas operacións básicas de sumar, restar, multiplicar e elevar a unha potencia, que teña como solución o número π, como logrou demostrar o alemán Lindemann en 1882. Na actualidade, sabido xa que π é un número composto por infinitas cifras decimais non periódicas, existen proxectos para determinar as súas cifras, das que xa se coñecen varios millóns. Se tes tempo ... xa sabes!

Lembra o máis importante

A circunferencia e os seus elementos.

A **circunferencia** é unha figura plana na que todos os seus puntos están á **mesma distancia** do **centro**. Os seus elementos máis importantes son:

- o **centro**
- o **raio**
- a **corda**
- o **diámetro**
- o **arco**
- a **semicircunferencia**

Distinguimos distintas **posicións relativas** de puntos, rectas e circunferencias.

Existe unha relación fundamental entre un **ángulo central** e o seu correspondente **ángulo inscrito**: a amplitude do primeiro é **dobre** da do segundo.

Como consecuencia do anterior, todo ángulo inscrito nunha semicircunferencia é recto.

O círculo e os seus elementos. Lonxitudes e áreas.

O **círculo** é a figura plana formada por unha circunferencia e todos os **puntos interiores** a ela. As figuras circulares son:

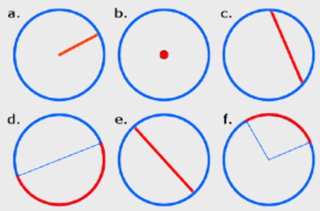
- O **sector** circular
- O **segmento** circular
- a **zona** circular
- a **coroa** circular
- o **trapecio** circular

Se R é a lonxitude do **raio** podemos obter o **perímetro** e a **área** do círculo:

- o perímetro é $L = 2 \cdot \pi \cdot R$
- a área é $A = \pi \cdot R^2$

Estas fórmulas e a **proporcionalidade directa** permítennos coñecer a **lonxitude** de **arcos** e as **áreas** de **sectores**, **coroas** e **trapecios** circulares.

Autoavaliación



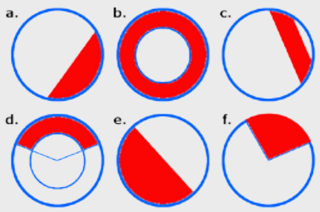
1. Relaciona o elemento da circunferencia marcado en vermello co seu nome correspondente.

2. Indica a posición relativa dun punto situado a distancia 9,2 do centro dunha circunferencia de raio 6,8.

3. Indica a posición relativa dunha recta situada a distancia 6,8 do centro dunha circunferencia de raio 7,6.

4. Indica a posición relativa de dúas circunferencias de raios 5,7 e 0,9 cuxos centros están situados a unha distancia de 4,8.

5. Cal é a amplitude do ángulo inscrito nunha circunferencia sabendo que o seu correspondente ángulo central é de 224º?



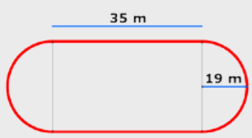
6. Identifica polo seu nome as figuras circulares representadas en vermello.

7. Calcula a lonxitude do arco que abarca un ángulo de 145º nunha circunferencia de raio 9,6.

8. Cal será o raio dunha circunferencia sabendo que a área do sector circular de amplitude 154º é de 71,6?

9. Calcula a área dun camiño de 3 metros de anchura que rodea un xardín de forma circular de 7,9 metros de diámetro.

10. Calcula a distancia que percorre unha velocista ao dar 26 voltas a un circuíto como o da figura.



Solucións dos exercicios para practicar

1. O raio: R= 7,6.
D=15,2.

2. Non é posible trazar nunha circunferencia cordas maiores que o diámetro, que neste caso é 9,2.

3. Como a lonxitude é directamente proporcional ao ángulo resulta: $\begin{matrix} \alpha & \to & 25 \\ 360^{\circ} & \to & 45 \end{matrix}$, así que o ángulo central será $\alpha = \frac{25}{45} \cdot 360^{\circ} = 200^{\circ}$

4. Ao ser a distancia menor que o raio a recta e a circunferencia son secantes.

5. O raio da outra deberá ser menor que a diferenza $9{,}9 - 2{,}1$: $R < 7{,}8$

6. O ángulo inscrito será a metade de 160º, é dicir 80º.

7. A amplitude do ángulo central é o dobre de 27º, é dicir, 54º. No caso de que o ángulo inscrito sexa recto, o central será chan e fórmase un triángulo rectángulo.

8. A lonxitude é $L = 2 \cdot \pi \cdot 3{,}4 = 21{,}36$ e a área $A = \pi \cdot 3{,}4^2 = 36{,}32$. O arco ten lonxitude $L_{arco} = \frac{241}{360} \cdot 21{,}36 = 14{,}30$
e a área do sector é
$A_{sector} = \frac{241}{360} \cdot 36{,}32 = 24{,}31$.

9. A área da coroa é a diferencia entre as áreas dos dous círculos e como a área do círculo exterior é 153,86, a área da interior debe ser 28,26, polo tanto o raio interior é $r = \sqrt{\frac{28{,}26}{\pi}} = 3$.

10. O rectángulo mide 1,6 de anchura e 3,2 de altura e o raio do semicírculo superior é 0,8. Con estes valores o perímetro é
$P = 1{,}6 + 2 \cdot 3{,}2 + \pi \cdot 0{,}8 = 10{,}51$ m e a área $A = 1{,}6 \cdot 3{,}2 + \frac{\pi \cdot 0{,}8^2}{2} = 6{,}12$ m^2.

11. A área é a metade da área do círculo $\pi \cdot 7^2 = 153{,}86$ cm^2, a metade 76,93 cm^2
O perímetro $\pi \cdot 7 + 2 \cdot \pi \cdot 3{,}5 = 43{,}96$ cm

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. a. raio, b. centro, c. corda,
d. semicircunferencia, e. diámetro, f. arco.
2. O punto é exterior á circunferencia.
3. A recta e a circunferencia son secantes.
4. A circunferencia menor 0,9 é tanxente interior á circunferencia maior.
5. $\frac{224^{\circ}}{2} = 112^{\circ}$
6. a. segmento, b. coroa, c. zona,
d. trapecio, e. semicírculo, f. sector.
7. A lonxitude do arco é 24,29.
8. O raio é 7,30.
9. A área é 177,19 m^2.
10. A distancia percorrida é de 4 923,89 m.

NOTA IMPORTANTE: na resolución dos exercicios desta quincena utilizouse o valor de π aproximado a dúas cifras decimais, é dicir, $\pi \approx 3{,}14$. Os cálculos e resultados danse tamén redondeados a dúas cifras decimais.