Rectes i angles en el pla

Objectius

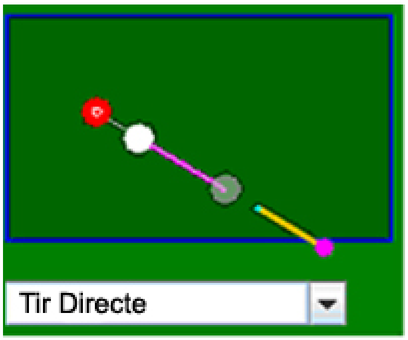
En aquesta quinzena aprendràs a:

- Conèixer els elements fonamentals del pla.
- Conèixer les rectes i les seves propietats.
- Manipular rectes i d'altres elements relacionats amb elles.
- Conèixer els diferents tipus d'angles.
- Conèixer les propietats i les relacions entre angles.
- Mesurar i realitzar operacions bàsiques amb angles.
- Utilitzar recursos per resoldre problemes senzills de geometria plana

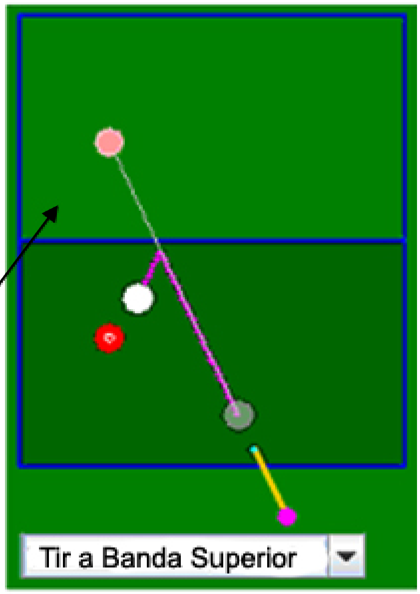
Abans de començar

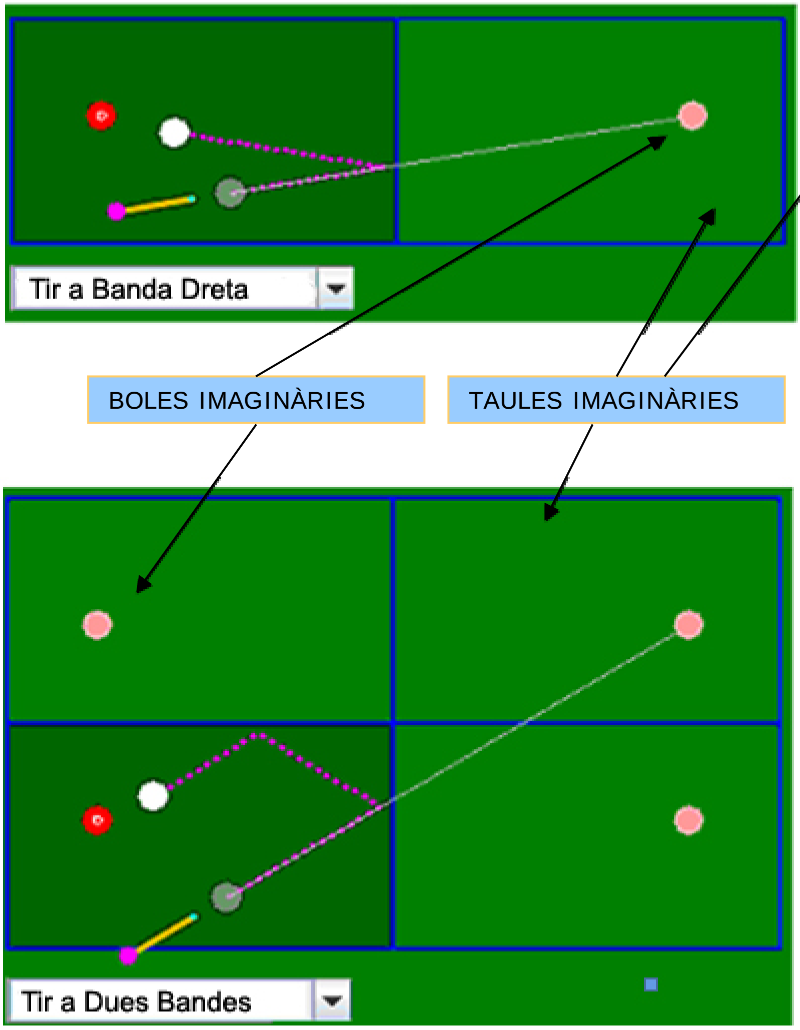
Investiga

El billar és un joc en el que intervenen molts dels elements de la geometria plana (punts, rectes, angles, simetries ...). Observa en l'escena de la dreta como es pot calcular la trajectòria correcta per tocar la bola vermella rebotant abans en una o en dues bandes.



En un tir directe apuntem a la bola vermella. Si volem tirar a banda, n'hi ha prou amb col·locar una altra taula de billar imaginària al costat de la nostra, que contengui una bola vermella també imaginària. Aquesta bola imaginària és a la que apuntarem.





En un tir a dues bandes quadrupliquem la nostra taula per obtenir una taula real i tres imaginàries. Apuntant a la bola de la taula que està a la cantonada superior dreta, aconseguim donar a la vermella, tocant abans en dues bandes.

Les rectes, punts, simetries, angles i altres elements geomètrics són la base del joc del billar.

I de moltes altres coses!

1. Rectes. Paral·lelisme i perpendicularitat

El pla

Des dels inicis de la història, l'ésser humà ha intentat representar el seu entorn visual dibuixant els objectes i figures que l'envolten.

Per això ha necessitat tenir alguna superfície sobre la que dibuixar punts, línies, cercles o d'altres figures. Des dels petroglifs esculpits en pedra a les pintures renaixentistes o als moderns plans utilitzats en l'arquitectura o l'enginyeria, disposem d'innombrables exemples de representacions elaborades sobre superfícies més o menys planes.

El **pla** és, per tant, un objecte que cobra importància en la geometria, ja que ens permet representar figures sobre ell.

Punts i rectes

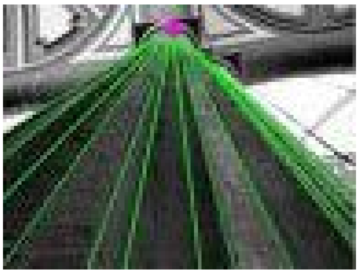
Dins del pla diferenciem dos elements fonamentals, tal i com **Euclides**, considerat com el primer gran matemàtic de la història, els va definir: el **punt** i la **recta**.

Així, podem identificar una estrella com un punt en el firmament, el rastre deixat per un avió com una recta, i el tauler de la nostra taula de treball com un pla. És tot el que ens fa falta per començar a "fer geometria".

Punt: és allò que no té ni longitud ni amplada.
Recta: és allò que té longitud, però no amplada.

No és difícil gaudir de la geometria de manera espontània. És suficient percebre la forma dels objectes amb esperit observador per descobrir tot tipus d'elements geomètrics en el nostre entorn més proper.

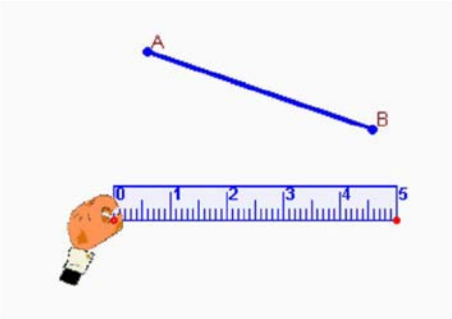
I la geometria ens proporciona, a més a més, una font inesgotable d'informació útil.



Quan observem la via del tren, amb els seus dos rails paral·lels ... ¡ que acaben per unir-se en l'infinit!, obtenim una valuosa informació sobre la distància, de la que no en disposaríem si veiéssim els rails com realment són, és a dir, paral·lels.

Prova a buscar tota classe d'objectes i propietats geomètriques al teu voltant. Segurament et sorprendran en moltes ocasions.

Recta, semirecta i segment



Entre totes les diferents possibilitats que hi ha per unir dos punts, el segment és especial, per ser el camí més curt.

Considerem dos punts diferents sobre el pla i els unim mitjançant una línia. Hi ha evidentment moltes maneres de fer-ho, però n'hi ha una que és la **més curta** entre totes les possibles. A aquesta línia més curta que uneix dos punts l'anomenem **segment**.

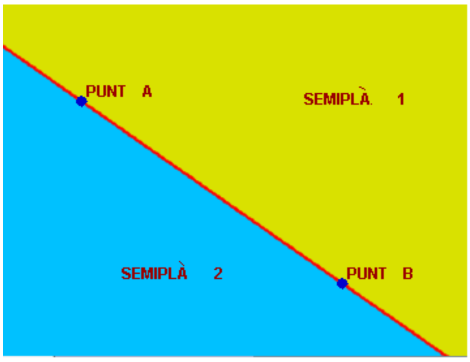
Si designem els dos punts amb les lletres A i B, designarem AB al segment que els uneix. Així, A i B passen a ser els **extrems** del segment.

Si prolonguem el segment indefinidament per tots dos extrems, obtenim una **recta**.

Si prolonguem el segment AB només per un dels seus extrems (B per exemple) obtenim una **semirecta**. En aquest cas direm que el punt A és l'**origen** d'aquesta semirecta.

Propietats de la recta

Tota recta divideix el pla en dues regions. Cada una d'elles és un **semiplà**.



Si un punt no pertany a la recta, aleshores estarà en algun dels dos semiplans determinats per aquesta recta.

Tornant a Euclides, existeixen algunes propietats de la recta que, malgrat la seva senzillesa, resulten absolutament essencials per la geometria.

Aquestes en són algunes:

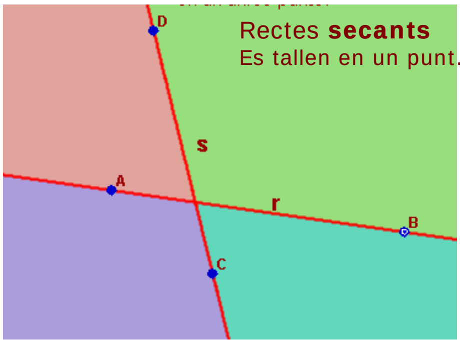
- 1a) Donats dos punts diferents en un pla, existeix una **única** recta que els uneix.
- 2a) Tota recta divideix el pla en dues regions, anomenades **semiplans**.

Donats dos punts diferents en un pla, existeix una **única** recta que els uneix.

Posicions relatives

Dibuixades dues rectes sobre un pla, poden donar-se tres situacions diferents. Poden estar les dues rectes superposades una sobre l'altra. En aquest cas és impossible distingir-les; són, en definitiva, una mateixa recta. Es diu que les dues rectes són **coincidents**.

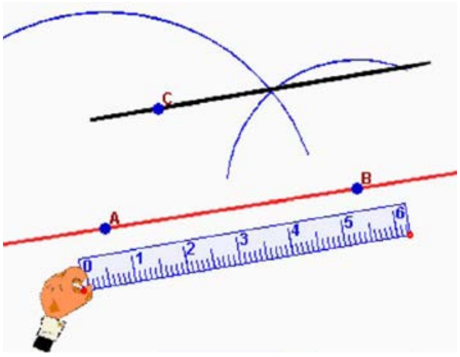
En cas que les dues rectes siguin diferents, pot ser que no arribin a tocar-se mai (són rectes **paral·leles**), o bé que es toquin en algun punt (són rectes **secants**). En aquest darrer cas, el punt on es tallen és únic.



Dues rectes són **paral·leles** si no es tallen en cap punt.
Dues rectes són **secants** si es tallen en un únic punt.

Paral·lelisme

Ja sabem que dues rectes són paral·leles si no tenen cap punt en comú i, com a conseqüència del seu famós **5è postulat**, Euclides va afirmar que per qualsevol punt exterior a una recta es pot traçar una única recta paral·lela a ella. Així podem traçar paral·leles a una recta, fent servir un **regle** i un **compàs**. El mètode és el que es descriu en la escena que hi ha al costat.



D'acord amb *el nostre* Euclides, el paral·lelisme és un dels conceptes bàsics de la geometria. Per aquest motiu, la geometria que estem descobrint rep el nom de **"geometria euclidiana"**.

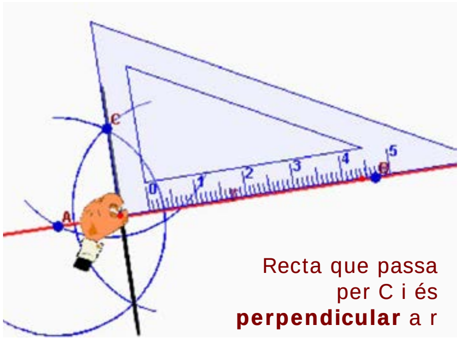
Per qualsevol punt exterior a una recta es pot traçar una **única** recta paral·lela a ella.

Perpendicularitat

Dues rectes que es tallen en un punt, divideixen el pla en **quatre** regions. Quan les quatre regions en què queda dividit el pla tenen la mateixa amplitud, diem que les dues rectes són **perpendiculars**.

Donada una recta i un punt sobre ella, existeix una única recta que conté aquest punt i és perpendicular a la recta.

Disposem d'un mètode per traçar rectes perpendiculars fent servir regle i compàs.



Recta que passa per C i és **perpendicular** a r

> Dues rectes són **perpendiculars** si divideixen el pla en quatre regions d'igual amplitud.

EXERCICIS resolts

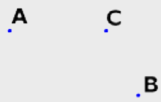
1. Traça tres rectes diferents que continguin un punt A. Quantes rectes més pots traçar que passin por aquest punt?

   Sol Per un punt es pot traçar un nombre infinit de rectes diferents.

2. Traça dues rectes diferents que continguin a la vegada dos punts A i B. És això possible? Explica-ho amb les teves pròpies paraules.

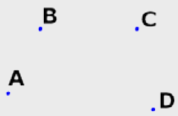
   Sol Per dos punts diferents només és possible traçar una recta.

3. És possible traçar una recta que contingui als tres punts A, B i C? Com s'ha de situar els tres punts per tal que es pugui traçar una recta que ls contengui?

   Sol No és possible en quest cas, perquè per tres punts diferents es pugui traçar una recta sempre que estiguin alineats.

4. Representa el segment AB, una semirecta amb origen en C, una semirecta amb origen en D i que contengui el punt B, una recta que passi per A i una recta que passi per A i per C.

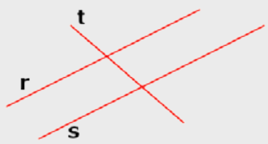
   Sol Revisa la pàgina Recta, semirecta i segment.

5. Traça la recta r que uneixi els punts A i B. Representa els punts següents: un punt, diferent de A i de B, que pertanyi a la recta; dos punts que no pertanyin a la recta i que estiguin situats en diferents semiplans.

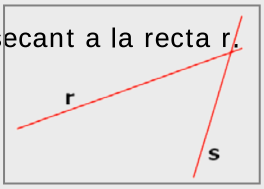
   Sol Revisa la pàgina Propietats de la recta.

6. Indica si les rectes següents són coincidents, paral·leles o secants.

   Sol Les rectes r i s són paral·leles. La recta t és secant amb r i amb s.

EXERCICIS resolts

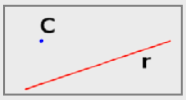


7. Representa en la teva llibreta dues rectes paral·leles i una altra secant a la recta r.

Sol Revisa la pàgina Posicions relatives.

8. Traça una recta paral·lela a r i una altra paral·lela a s. Quina figura formen els punts de tall de les quatre rectes?

Sol Formen un paral·lelogram.

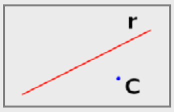


9. Fent servir un regle i un compàs, traça una recta paral·lela a r que passi pel punt C.

Sol Revisar la pàgina Paral·lelisme.

10. En la figura de l'exercici anterior traça una nova recta paral·lela a r. Com són entre si les dues rectes traçades?

Sol Les tres rectes són paral·leles.



11. Fent servir un regle i un compàs, traça una recta s que sigui perpendicular a r i que passi pel punt C.

Sol Revisar la pàgina Perpendicularitat.

12. Sobre la recta s construïda en l'exercici anterior, marca un punt D que no estigui en r i traça una altra recta perpendicular a s que passi pel punt D. Quina relació existeix entre la recta r i aquesta última que acabes de representar?

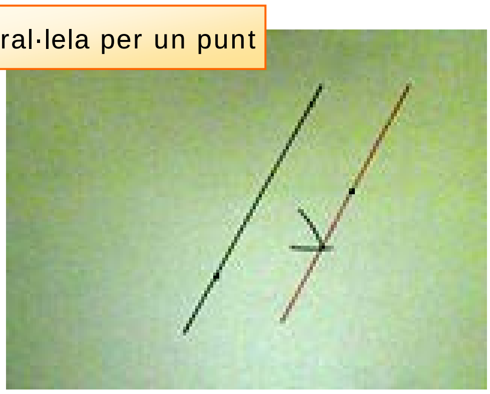
Sol Són paral·leles.

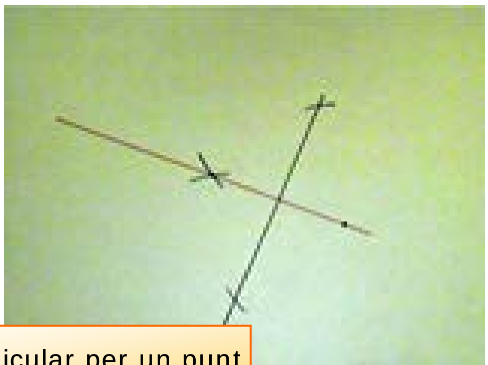
13. Traça tres rectes perpendiculars a la recta r. Com són entre si aquestes tres rectes?

Sol Totes les rectes perpendiculars a r són paral·leles entre si.

Aquí tens exemples de traçat amb regle i compàs. En les pàgines corresponents disposes d'un vídeo en el qual es mostren ambdues construccions.

Paral·lela per un punt

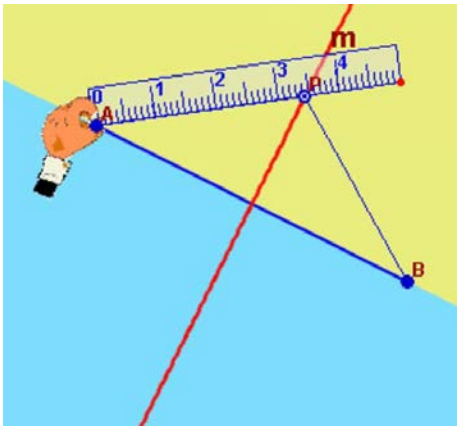




Perpendicular per un punt

2. Mediatriu d'un segment

Definició de mediatriu



Donats dos punts A i B, podem construir el **segment** AB que els uneix.

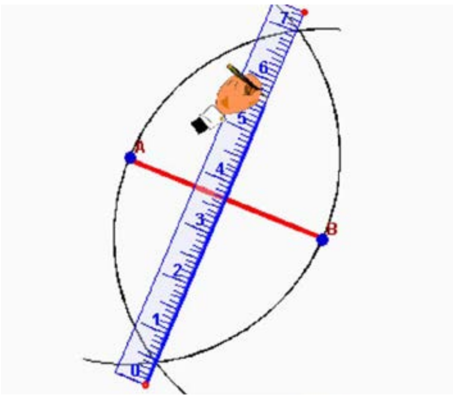
S'anomena **mediatriu** del segment AB a la recta que és perpendicular a aquest segment i que passa pel seu punt mig.

La mediatriu divideix el segment AB en dos segments d'igual longitud.

La recta mediatriu té una important propietat: la distància de qualsevol punt d'aquesta recta a cada un dels dos extrems del segment AB és la mateixa.

La **mediatriu** és perpendicular al segment AB i el divideix en dos parts iguals.

Construcció de la mediatriu



Anem a construir la mediatriu d'un segment fent servir, com en casos anteriors, el regle i el compàs.

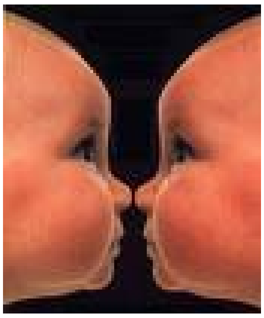
- Per fer-ho, representa dos punts i traça el segment que els uneix fent servir el regle.
- Col·loca el compàs sobre un dels extrems del segment i obre'l de manera que coincideixi amb l'altre extrem. Traça així una circumferència. Fes la mateixa operació situant el compàs sobre l'altre extrem.
- Ara uneix els punts on es tallen les dues circumferències que acabes de traçar. El nou segment és perpendicular a l'inicial i si el prolongues obtindràs la recta mediatriu que cercaves.

Mediatriu d'un segment

Simetria

Donada una recta i un punt C que no pertanyi a ella, anem a buscar un altre punt C' amb la condició que la recta sigui la **mediatriu** del segment CC'. Aquest punt C' s'anomena **simètric de C** i la recta s'anomena **eix de simetria**.

Aquest tipus de simetria s'anomena **reflexió** i es pot aplicar a qualsevol figura geomètrica. Per fer-ho representem els simètrics de tots els vèrtexs de la figura original i obtenim així una altra figura simètrica a la primera.



La reflexió produeix figures simètriques de manera similar a com ho fa un mirall.

Simètric d'un punt

EXERCICIS resolts

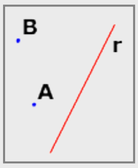
14. Amb regle i compàs traça el segment AB i la seva mediatriu.

Sol Revisa la pàgina Construcció de la mediatriu.

15. Sobre la mediatriu traçada en l'exercici anterior, marca un punt qualsevol i mesura la distància entre aquest punt i els dos extrems del segment inicial. Què observes en el resultat obtingut?

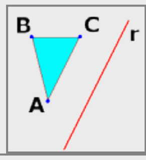
Sol La distància de qualsevol punt de la mediatriu a un o altre extrem del segment és la mateixa.

16. Traça el segment que uneix els punts A i B. Localitza els punts simètrics de A i B respecte de la recta r i uneix-los mitjançant un segment. Quina relació existeix entre els dos segments?



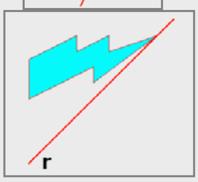
Sol Són segments simètrics respecte de la recta r i la seva longitud és la mateixa.

17. Realitza el mateix exercici anterior, a partir del triangle de vèrtexs A, B i C. Què s'obté?



Sol La figura obtinguda és un altre triangle simètric a l'original.

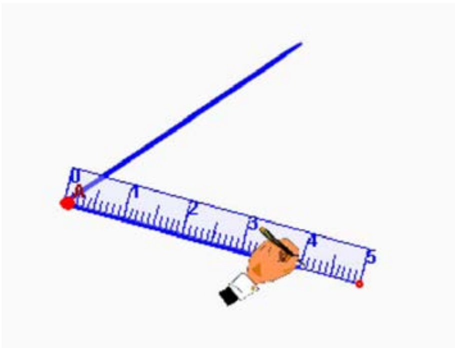
18. Representa la figura simètrica de la que apareix a continuació.



Sol Revisa la pàgina Simetria.

3. Angles. Classificació i mesura

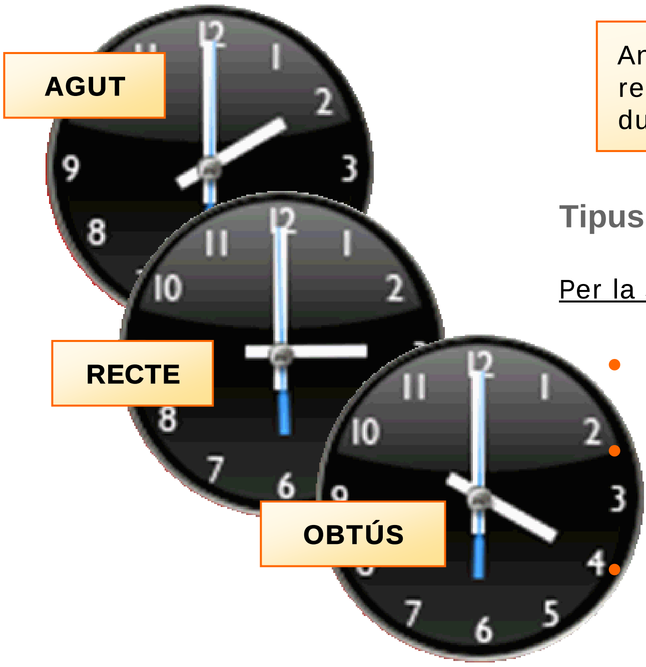
Definició d'angle



Pensa en un pla sense vores, o el que és el mateix, il·limitat. Representa un punt A i traça dues semirectes amb origen en aquest punt. Anomenarem **vèrtex** al punt A i **costat** a cada una de les dues semirectes.

El pla queda així dividit en dues regions que comparteixen el vèrtex i els costats. Cada una d'aquestes regions s'anomena **angle**.

Resulta evident que les dues regions poden tenir diferent mesura. Anomenarem **amplitud de l'angle** a la mesura de cada una d'elles. En relació a l'amplitud, identificarem diferents tipus d'angles, establirem relacions entre ells i els mesurarem.

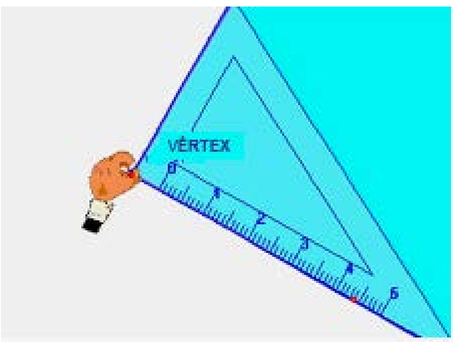


Anomenem **angle** a cada una de les dues regions en que queda dividit el pla en traçar dues semirectes amb el mateix origen.

Tipus d'angles

Per la seva amplitud, classifiquem els angles en:

- **Angle recte**: és el comprès entre dos semirectes perpendiculars.
- **Angle pla**: és el que resulta en traçar dues semirectes amb el mateix origen però amb sentit oposat.
- **Angle nul**: és el que resulta en traçar dues semirectes amb el mateix origen i idèntic sentit.



Per comparació amb l'angle recte:

Un angle és **agut** si té menys amplitud que l'angle recte. És **obtús** si té més amplitud que un recte i menys que un pla.

Por comparació amb l'angle pla:

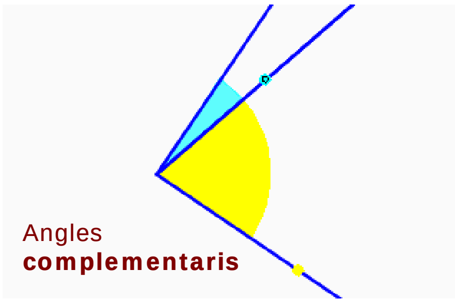
Un angle és **convex** si és de menor amplitud que l'angle pla. És **còncau** si la seva amplitud és més gran que la de l'angle pla.

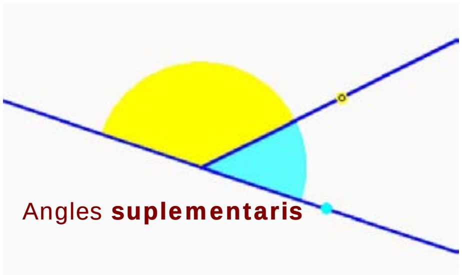
Relacions entre angles

Dos angles són **consecutius** si tenen el vèrtex i un costat en comú, i **iguals** si tenen la mateixa amplitud.

- Anomenem **complementaris** a dos angles si són consecutius i equivalen a un recte.
- Anomenem **suplementaris** a dos angles si són consecutius i equivalen a un pla.

Dues rectes que es tallen en un punt determinen quatre angles que són iguals dos a dos. En aquest cas diem que els parells d'angles de la mateixa amplitud són **oposats pel vèrtex**.





Dos angles **complementaris** equivalen a un recte. Dos angles **suplementaris** equivalen a un pla.

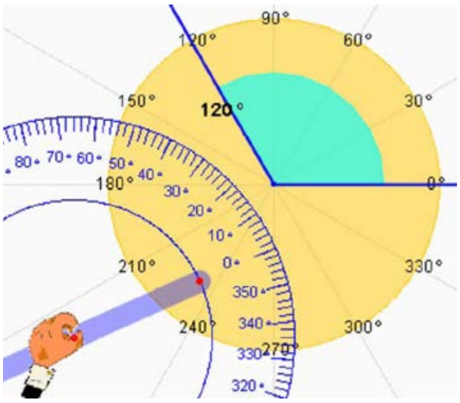
Mesura d'angles

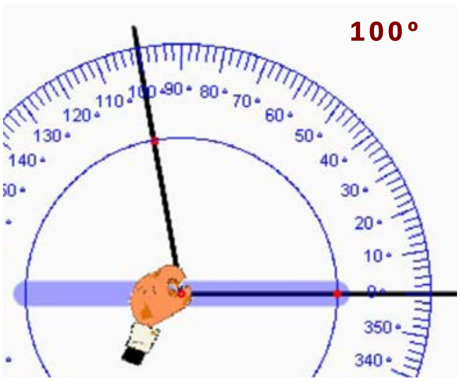
Per mesurar l'amplitud d'un angle farem servir com a unitat el **grau**, representat pel símbol "º". Assignem a l'**angle nul** una amplitud de **0º** i a l'**angle recte** una amplitud de **90º**.

Dos angles rectes equivalen a un **pla**, que tindrà, per tant, una amplitud de 180º. I quatre angles rectes (o dos plans) ocupen **tot el pla**, i tindran una amplitud de 360º.

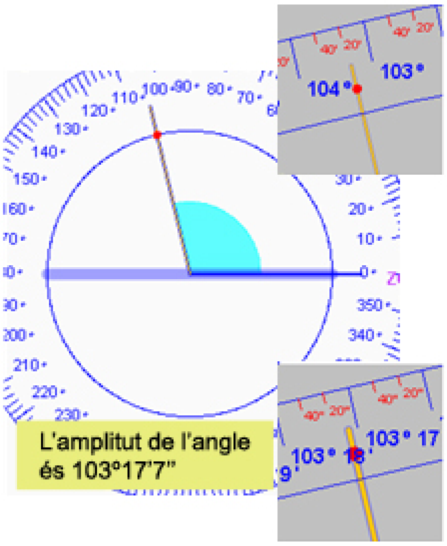
La resta dels angles es mesuraran per comparació amb aquests.

Per exemple, si dividim un recte en dos angles iguals, obtindrem dos **angles de 45º**. Si dividim un recte en tres parts iguals, obtindrem tres **angles de 30º**.





Si dividim una circumferència en 360 parts iguals obtenim la unitat de mesura dels angles: el **grau**.



Sistema sexagesimal

Per mesurar l'amplitud d'angles amb més precisió s'utilitza el sistema **sexagesimal**.

Aquest sistema consisteix en dividir un grau en 60 parts iguals. Cada una d'aquestes divisions s'anomena "**minut**", de manera que cada grau conté 60 minuts. D'igual manera, cada minut es divideix en 60 parts iguals obtenint un "**segon**", amb la qual cosa tenim l'equivalència:

1 **grau** = 60 **minuts** = 3 600 **segons**

Fent servir aquest sistema de mesura direm, per exemple, que l'amplitud d'un angle és 25 graus, 31 minuts i 7 segons, i ho escriurem així:

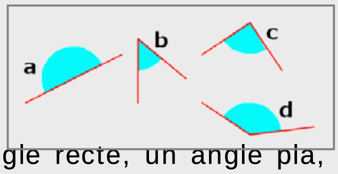
25° 31' 7''

EXERCICIS resolts

19. Indica sobre la figura el vèrtex, els costats i els angles que s'observen.

Sol Revisa la pàgina Definició d'angle.

20. Indica sobre la figura si aquests angles són aguts, rectes, obtusos o plans.

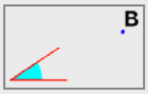


Sol L'angle a és pla, b és agut, c és recte i d és obtús.

21. Representa, utilitzant els instruments de dibuuix, un angle recte, un angle pla, un angle nul, un angle agut, un angle obtús, un angle còncau i un angle convex.

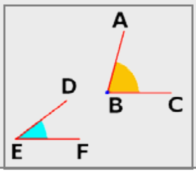
Sol Revisa la pàgina Tipus d'angles.

22. Representa sobre el vèrtex B un angle igual al que apareix en la figura.



Sol Construeix sobre el punt B dues semirectes paral·leles a cada un dels costats de l'angle original.

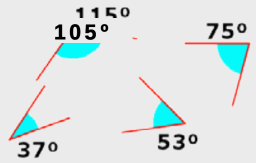
23. Representa sobre el vèrtex B un angle igual a l'angle DEF i que sigui consecutiu a l'angle ABC.



Sol Utilitza el transportador d'angles.

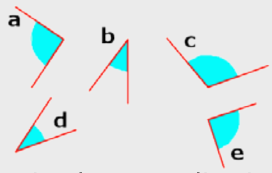
EXERCICIS resolts

24. Indica quins dels angles que apareixen en la figura són complementaris i quins suplementaris.



Sol Són complementaris els angles de 37º i 53º perquè sumen un recte; són suplementaris els angles de 105º i 75º perquè sumen un pla.

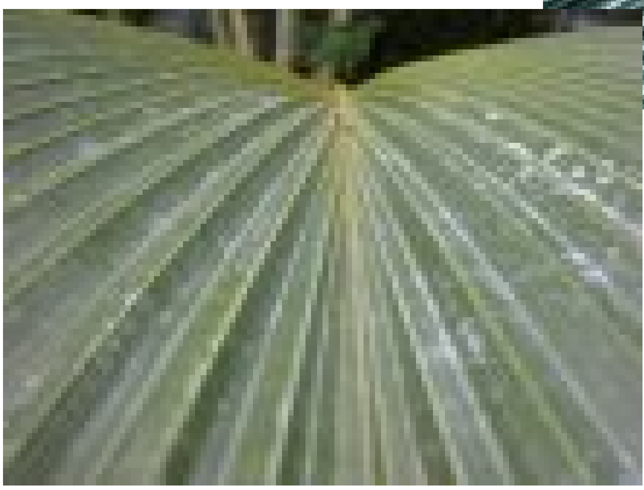
25. Assenyala en la figura els angles que tenen la mateixa amplitud. Quin nombre reben aquests angles?



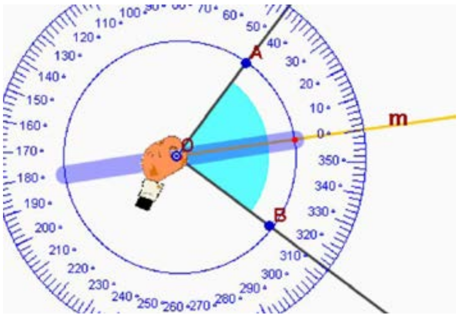
Sol Diem que són iguals els angles que tenen la mateixa amplitud. En la figura, els angles a i e són iguals (són rectes) i els angles b i d també són iguals.

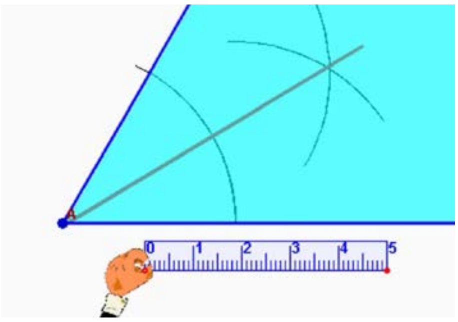
26. Representa, utilitzant els instruments de dibuix, els angles de les amplituds següents: 30º, 60º, 90º, 45º, 10º, 135º i 240º.

Sol Revisa la pàgina Mesura d'angles.



4. Bisectriu d'un angle





Bisectriu d'un angle

Definició de bisectriu

Agafem un angle de vèrtex A i costats m i n. Tracem una nova semirecta amb origen A i que divideixi l'angle en uns altres dos que siguin iguals. Aquesta semirecta rep el nom de **bisectriu** de l'angle.

La bisectriu té la propietat següent: qualsevol punt de la bisectriu està a **igual distància** dels dos costats de l'angle.

> La **bisectriu** d'un angle el divideix en dos angles iguals.

Construcció de la bisectriu

Els instruments bàsics de la geometria plana permeten traçar la bisectriu d'un angle.

Traça dues semirectes amb un mateix origen, que serà el **vèrtex** A de l'angle. Col·loca el compàs sobre A i traça un arc de circumferència que talli els dos costats, en els punts B i C.

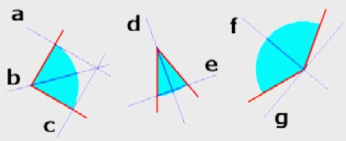
Traça dos arcs més, un de centre B i radi C i el segon amb centre C i radi B.

Uneix finalment el vèrtex A amb el punt on es tallen els dos arcs que acabes de traçar i obtindràs la bisectriu de l'angle.

EXERCICIS resolts

27. Indica sobre la figura quina és la bisectriu dels angles representats.

Sol Les bisectrius són les rectes b, d i f, respectivament.



28. Traça sobre la figura la bisectriu de l'angle representat.

Sol Revisa la pàgina Construcció de la bisectriu.

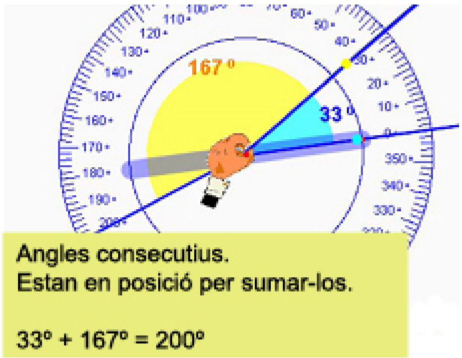
29. Traça les bisectrius dels dos angles consecutius que apareixen en la figura. Quina relació guarden entre si aquestes dues bisectrius?

Sol Si els angles són suplementaris, com en aquest cas, les dues bisectrius són perpendiculars entre si.

5. Operacions amb angles

Suma d'angles

Dos o més angles es poden sumar per formar-ne un altre. L'operació **suma** d'angles es pot realitzar gràficament o analíticament.



La suma **gràfica** es realitza col·locant els angles en posició de consecutius, és a dir, compartint el vèrtex i un costat, per així obtenir un altre angle que els compren a tots dos.

Analíticament, l'operació s'efectua sumant les amplituds dels angles i així s'obté l'amplitud de l'angle resultant.

La **suma** analítica d'angles es realitza sumant les **amplituds** de cada un d'ells.

Resta d'angles

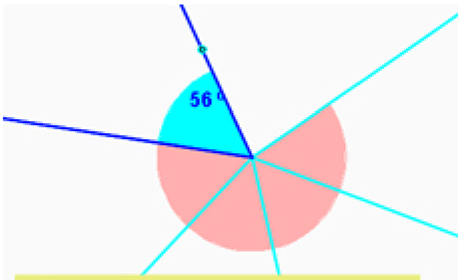
La **resta** o diferència d'angles es pot fer, com passa amb la suma, de dues formes, gràfica i analítica.

Gràficament, n'hi ha prou col·locant els dos angles de manera que comparteixin el vèrtex i un costat. Així, l'angle més gran compren el menor, i l'excés és la diferència entre tots dos.

La resta **analítica** es realitza restant l'amplitud de l'angle més petit de la del més gran.

Per **restar** analíticament dos angles calculem la **diferència** entre l'angle més gran i el més petit.

Multiplicació per un número



L'angle apareix repetit 5 vegades en posicions consecutives.

$5 \cdot 56° = 280°$

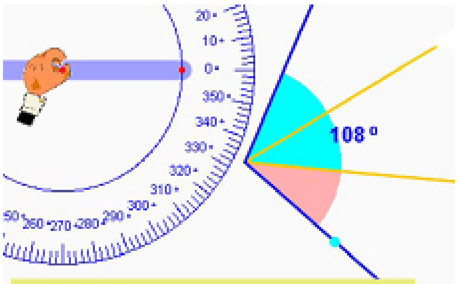
Multiplicar un angle per un número natural equival a sumar l'angle amb ell mateix tantes vegades com indica el número.

Per multiplicar **gràficament** un angle per un número natural n'hi ha prou col·locant l'angle en posició de consecutiu amb ell mateix tantes vegades com indica el número.

L'operació **analítica** de multiplicar es realitza multiplicant el número per l'amplitud de l'angle.

Per **multiplicar** analíticament un angle per un número natural multipliquem el número per l'amplitud de l'angle corresponent.

Divisió per un número



L'angle apareix dividit en 3 parts iguals.

$108° : 3 = 36°$

En el cas de que no sigui exacta, necessitem més eines matemàtiques per calcular el resultat de la divisió. Alguna d'aquestes eines s'explica en el següent apartat.

La **divisió** d'un angle per un número natural és una operació que consisteix en separar l'angle en tantes parts iguals com ens indica el número.

La divisió es realitza de forma **analítica** dividint l'amplitud de l'angle entre el número natural corresponent.

La divisió **gràfica** resulta més complexa, perquè no sempre es pot fer amb regle i compàs. Això passa, per exemple, amb la divisió d'un angle en tres parts iguals (el famós problema de la **trisecció de l'angle**), impossible per a la majoria dels angles.

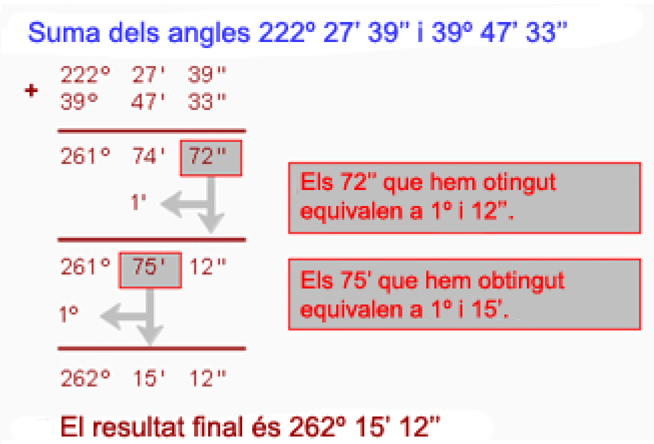
En canvi, sempre és possible calcular la divisió d'un angle en **dues** parts iguals gràficament, cosa que ja hem fet quan vam aprendre a traçar la bisectriu d'un angle.

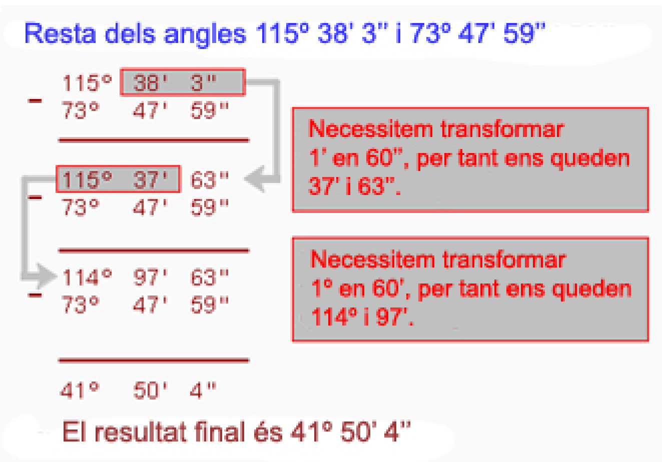
Operacions en sexagesimal

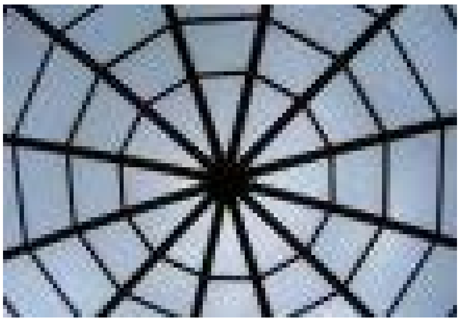
Per fer operacions amb angles expressats en forma **complexa** (graus, minuts i segons), farem els passos que es descriuen en l'escena, recordant que 1 grau equival a 60 minuts (**1°=60'**) i que 1 minut equival a 60 segons (**1'=60''**).

Així, sempre que sigui necessari i possible, podrem **agrupar** 60 segons per obtenir un minut, o bé 60 minuts per obtenir un grau. D'igual manera, si és necessari, podrem transformar un grau en 60 minuts o un minut en 60 segons.

En forma complexa s'operen per separat els graus, minuts i segons.







SUMA d'angles en forma complexa

En primer lloc sumarem els segons. Si aquesta suma és igual o superior a 60'', això és un minut i l'anotarem juntament amb els segons restants.

Pels minuts realitzarem la mateixa operació, comptant el que hem anotat en el pas anterior. En cas que tinguem 60 o més minuts, això serà un grau i l'anotarem amb els minuts restants.

Finalment sumarem els graus, comptant el que hem anotat abans, si és el cas.

RESTA d'angles en forma complexa

El mètode per la resta comença també pels segons. Si en el minuend tenim un nombre suficient de segons, restem els que hi ha en el subtrahend.

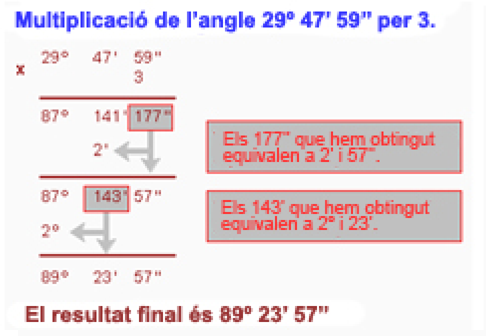
En cas contrari, haurem "d'agafar" un minut del minuend i convertir-lo en 60''. D'aquesta manera reunim una quantitat suficient de segons en el minuend i restem de manera natural.

El procés es repeteix ara amb els minuts, tenint en compte que si hem necessitat convertir un minut en segons, tindrem un minut menys en el minuend. Si els minuts que ens queden en el minuend són suficients procedim a la resta. Si no es així, haurem "d'agafar" un grau, que equival a 60'. Finalment restem els graus, descomptant, si és el cas, el que hem transformat en minuts anteriorment.

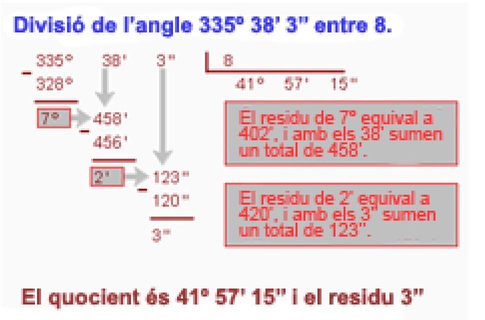
MULTIPLICACIÓ d'angles per un número

Comencem multiplicant els segons, minuts i graus per separat. Una vegada obtinguts aquets productes, agrupem els segons de 60 en 60. Cada grup que obtinguem representa un minut més per afegir als minuts resultants de la multiplicació.

Una vegada fet això, repetim el procés amb els minuts que hems obtingut, agrupant-los de 60 en 60. Cada un d'aquests grups serà un grau que afegirem als graus que hagin resultat de la multiplicació.



DIVISIÓ d'angles per un número



Aquesta vegada comencem pels graus, dividint-los de manera natural. El residu d'aquesta primera divisió, es convertirà en minuts que els afegirem als que tinguem per dividir. Fet això, procedim a la divisió dels minuts.

D'igual manera que abans, el residu de la divisió dels minuts haurà de convertir-se en segons i afegir-ho als que hi hagi inicialment, abans de passar a la seva divisió. El residu d'aquesta última fase és el residu final de l'operació de dividir.

EXERCICIS resolts

30. Calcula de forma gràfica i analítica la suma dels angles de 110º i 40º.

Sol Per a la suma gràfica revisa la pàgina Suma d'angles.

La suma analítica és $110^o + 40^o = 150^o$.

31. Calcula de forma gràfica i analítica la resta dels angles de 163º i 34º.

Sol Per a la resta gràfica revisa la pàgina Resta d'angles.

La resta analítica és $163^o + 34^o = 29^o$.

32. Calcula el resultat de les operacions següents amb angles: a. $73^o - 36^o$, b. $28^o - (123^o - 118^o)$, c. $2 \cdot 72^o + 3 \cdot 15^o$, d. $90^o : 5$, e. $130^o - 2 \cdot 20^o + (180^o - 60^o) : 3$

Sol a. $73^o - 36^o = 37^o$, b. $28^o - (123^o - 118^o) = 23^o$, c. $2 \cdot 72^o + 3 \cdot 15^o = 189^o$, d. $90^o : 5 = 18^o$, e. $130^o - 2 \cdot 20^o + (180^o - 60^o) : 3 = 150^o$

33. Calcula l'angle que descriu la busca dels minuts d'un rellotge quan passa de les 3:20 a les 4:00.

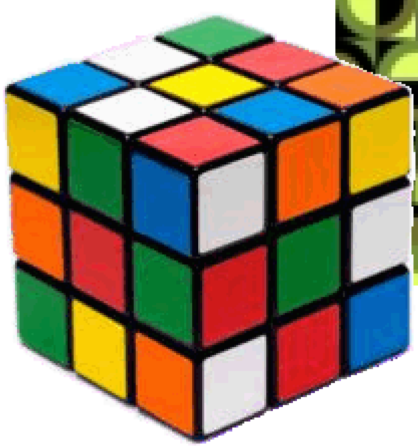
Sol La busca minutera dóna una volta completa, és a dir 360º, en una hora, que equival a 6º cada minut, així que en 40 minuts descriu un angle de 240º.

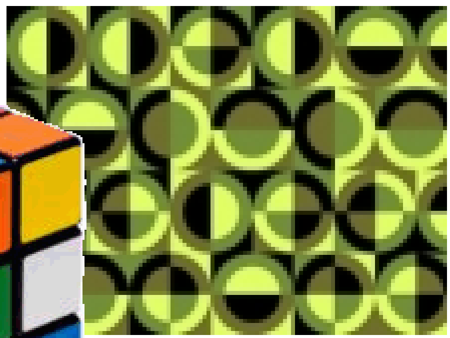
34. Calcula l'angle que descriu la busca horària d'un rellotge en els casos següents: les 2:00 i les 2:47 i entre les 2:34 i les 7:11.

Sol La busca horària avança 30º per hora, que equival a mig grau cada minut. Amb aquesta relació i tenint en compte l'exercici anterior, els angles descrits són 90º, 30º, 15º, 23º 30' i 138º 30', respectivament.

Per practicar

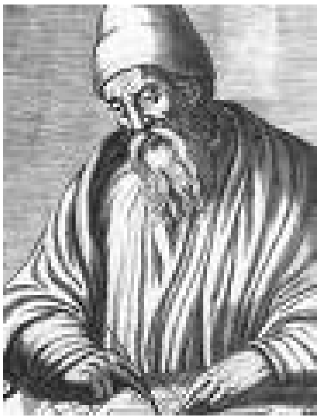
1. Si dues rectes tenen un punt en comú, quina és la seva posició relativa? I si són dos punts comuns? I si no tenen cap en comú?
2. Si m és la mediatriu del segment AB i D és un punt de la recta m, quina és la distància de D a A, sabent que la distància de D a B és 5,52 ?
3. Classifica els angles de 0º, 45º, 90, 135º, 180º i 225º segons la seva amplitud i segons la seva comparació amb els angles agut i pla.
4. Donat un angle d'amplitud 37º, quina és l'amplitud del seu complementari? I la del seu suplementari?
5. De quina amplitud són els quatre angles que s'obtenen en traçar la recta bisectriu d'un angle de 170º?
6. Realitza la següent operació amb angles: $95^{o}+124^{o}–24^{o}$
7. Realitza la següent operació amb angles: $3\cdot 27^{o}+5\cdot 19^{o}$
8. Realitza la següent divisió: $52^{o}:4$
9. Realitza la següent operació: $128^{o}\ 28'\ 23''+91^{o}\ 32'\ 49''$
10. Realitza la següent operació: $330^{o}\ 32'\ 43''-83^{o}\ 56'\ 47''$
11. Realitza la següent operació: $31^{o}\ 38'\ 9''\cdot 7$
12. Realitza la següent operació: $117^{o}\ 15'\ 34'':8$
13. Realitza amb regle i compàs la construcció geomètrica d'una recta perpendicular a una altra.
14. Realitza amb regle i compàs la construcció geomètrica d'una recta paral·lela a una altra.
15. Realitza amb regle i compàs la construcció geomètrica de la mediatriu d'un segment.
16. Realitza amb regle i compàs la construcció geomètrica de la bisectriu d'un angle.
17. Realitza amb regle i compàs la construcció geomètrica del punt simètric respecte a una recta.



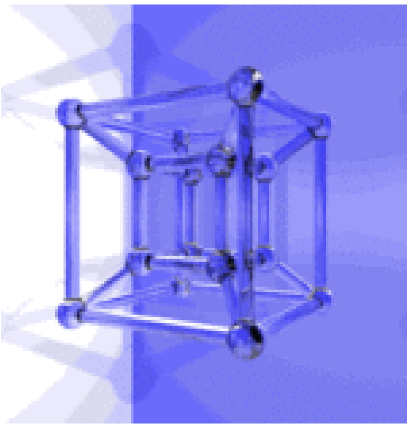


Per saber-ne més

El mestre Euclides



Euclides està considerat, per molts, com el primer gran matemàtic de la història. El motiu? Ser el primer en organitzar un discurs matemàtic, a partir de pràcticament res, i utilitzant de manera estricta el **raonament matemàtic**, mètode científic que caracteritza de manera essencial a la matemàtica vers d'altres disciplines científiques.



La seva gran aportació és un llibre organitzat en cinc toms, conegut com "**Elements de Geometria**", en el que, a partir d'idees fonamentals com les de **punt**, **recta**, **superfície i angle**, estableix els seus famosos **cinc postulats**. Amb aquesta petita maleta d'eines, va construir un enorme edifici en el que va ser capaç de recollir quasi tots els coneixements geomètrics existents fins els nostres dies. Tot el que sabem sobre els angles i les rectes, figures planes, com triangles i circumferències, paral·lelisme i perpendicularitat, àrees i molt més, fou completament acabat per ell.

I tot això fins el segle XIX, en què alguns grans noms de la matemàtica moderna van poder ampliar l'horitzó que havia marcat Euclides. Per fer-ho, van eliminar el conegut 5è postulat d'Euclides, conegut també com "**Postulat de les paral·leles**" i es van trobar de sobte amb móns geomètrics completament nous, en els que les rectes paral·leles es poden trobar, o en el que la suma dels angles d'un triangle pot ser diferent de 180º.

Moltes persones es sentien marejades davant aquests nous i estranys móns, fins que passat el temps ens vam adonar que en alguns casos, aquests rars móns s'assemblen més al nostre del que sembla. Si desitges més informació, pots buscar els noms de **Riemann**, **Lobatchevski**, **Bolyai** o **Gauss**, responsables, en gran part, de l'evolució de la geometria cap a nous horitzons que guarden una relació directa amb les més modernes teories sobre l'**origen de l'Univers**.

Recorda el més important

Rectes

Els elements fonamentals de la geometria plana són els **punts** i les **rectes**.

La línia **recta** és la més curta entre dos punts.

- Dues rectes són **paral·leles** si no es tallen en cap punt i són **secants** si es tallen en un punt.
- Dues rectes són **perpendiculars** si divideixen el pla en quatre regions de la mateixa amplitud.

Mediatriu d'un segment és una recta perpendicular a aquest segment i que el talla en dues parts iguals.

Es diu que dos punts A i B són **simètrics** respecte a una recta, si aquesta recta és la mediatriu del segment AB.

.

Angles

Angle és cada una de les dues regions en què dues semirectes amb el mateix origen divideixen el pla. Els angles es poden classificar segons diferents criteris:

- <u>Segons la seva amplitud</u>: **recte**, **pla**, **nul**;
- <u>En comparació amb l'angle recte</u>: **agut**, **obtús**;
- <u>En comparació amb l'angle pla</u>: **còncau,convex**.

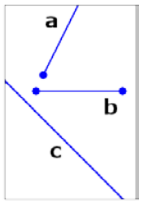
En dividir una circumferència en 360 parts iguals, s'obté un **grau**. Així, la circumferència completa mesura 360º, l'angle recte mesura 90º i l'angle pla mesura 180º.

S'anomena **bisectriu** d'un angle a la semirecta que el divideix en dues parts iguals.

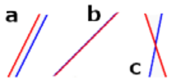
La **suma i resta** d'angles es realitza sumant o restant les amplituds de cada un d'ells.

Autoavaluació

1. Relaciona cada element amb el seu nom corresponent.



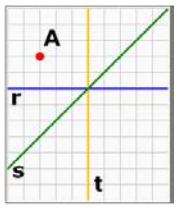
2. Indica la posició relativa de los pares de rectes.



3. Si una recta és perpendicular a altres dues rectes, com són aquestes dues rectes entre si?

4. Com s'anomena la recta perpendicular a un segment i que el divideix en dues parts iguals?

5. Assenyala el punto simètric de A respecte a cada un dels eixos r, s i t.



6. En quants angles queda dividit el pla en traçar dues rectes secants?

7. Calcula l'amplitud del complementari i del suplementari de l'angle de 64º.

8. Com són entre si les bisectrius de dos angles suplementaris?

9. Calcula el resultat de sumar els angles de 17º, 36º i 42º.

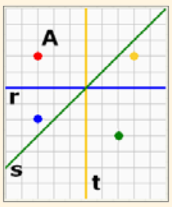
10. Calcula el resultat de l'operació amb angles que s'indica: $2\cdot 138^{o}-\left(53^{o}+16^{o}\right)$

Solucions dels exercicis per practicar

1. Les rectes són secants si tenen un punt en comú, coincidents si tenen dos punts en comú o paral·leles si no tenen cap punt en comú.
2. La distància del punt D a A és la mateixa que de D a B. En aquest cas aquesta distància és $d(D,A)=5{,}52$.
3. La classificació és:
   0º ......Nul........ Agut ...... Convex
   45º.....Agut ...... Convex
   90º.....Recte..... Convex
   135º ...Obtús .... Convex
   180º ...Pla
   225º ...Còncau
4. El complementari de 37º és 53º i el suplementari 143º.
5. S'obtenen dos angles de 85º i uns altres dos de 95º.
6. $95^o+124^o-24^o=195^o$
7. $3\cdot 27^o+5\cdot 19^o=176^o$
8. $52^o:4=13^o$
9. El resultat és 220º 1' 12''.
10. El resultat és 246º 35' 56''.
11. El resultat és 221º 27' 3''.
12. El resultat és 14º 39' 26'' i residu 6''.
13. Revisa el vídeo de la construcció de la perpendicular.
14. Revisa el vídeo de la construcció de la paral·lela.
15. Revisa el vídeo de la construcció de la mediatriu.
16. Revisa el vídeo de la construcció de la bisectriu.
17. Revisa el vídeo de la construcció del punt simètric.

Solucions AUTOAVALUACIÓ

1. a. semirecta; b. segment; c. recta.
2. a. paral·leles; b. coincidents; c. secants.
3. Son paral·leles.
4. Mediatriu.
5. Els punts simètrics són els representats en els colors que es corresponen amb cada recta.



6. En quatre.
7. El complementari és 26º i el suplementari és 116º.
8. Són perpendiculars.
9. El resultat de la suma és 95º.
10. $2\cdot 138^o-(53^o+16^o)=207^o$.