10 La circumferència i el cercle

Objectius

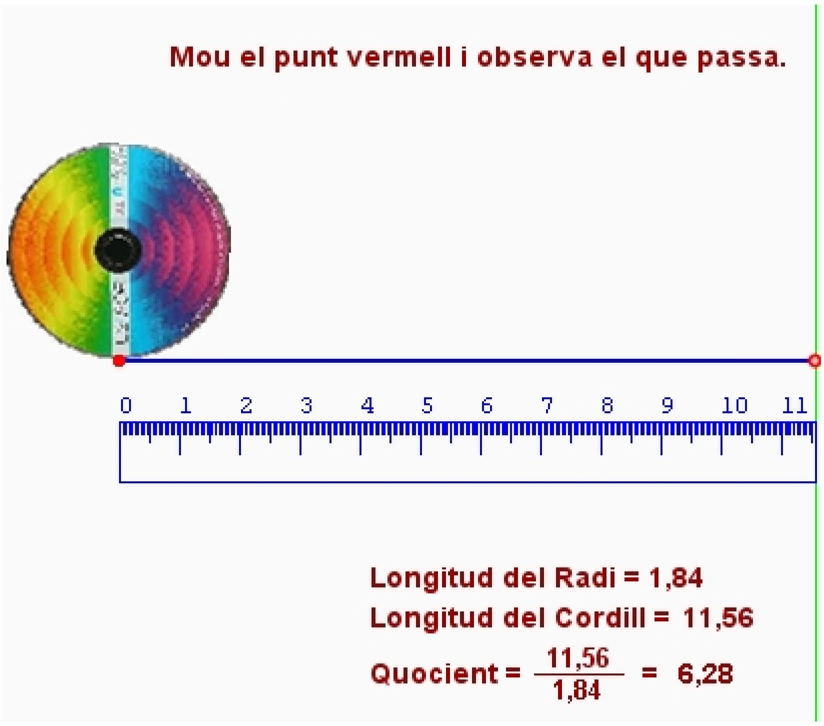
En aquesta quinzena aprendràs a:

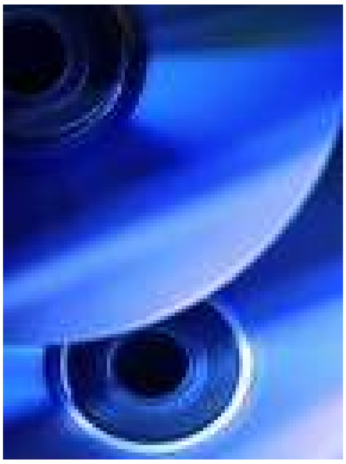
- Identificar els diferents elements presents en la circumferència i el cercle.
- Conèixer les posicions relatives de punts, rectes i circumferències.
- Conèixer les propietats dels angles construïts en la circumferència.
- Mesurar longituds i àrees de figures circulars.

Abans de començar

Investiga

Construeix un cercle de cartró i mesura la distància del centre a la vora. Enrotlla un tros de cordill al voltant del cercle. Estira'l i després mesura'l. Divideix la segona quantitat entre la primera i apunta el resultat. Pots repetir l'experiment amb cercles de diferents mides. Què pots dir dels resultats que s'obtenen?





El disc de la figura té un cordill enrotllat al llarg de la seva vora exterior. Al desenrotllar el cordill (a la figura apareix en blau), podrem mesurar la seva longitud. En aquest cas, aquesta longitud és de 11,56 cm.

Al dividir la longitud del cordill entre el radi del cercle, que mesura 1,84 cm, obtenim com a quocient 6,28.

No hi hauria res de particular en tot el que acabem de veure. El realment sorprenent és que si repetim l'experiment amb qualsevol objecte rodó, obtindrem finalment el mateix quocient... exactament el mateix!

Aquest quocient ha de ser, per tant, una quantitat amb entitat pròpia, és a dir, una quantitat que tindrà una relació íntima i fonamental amb la geometria del cercle.

1. La circumferència

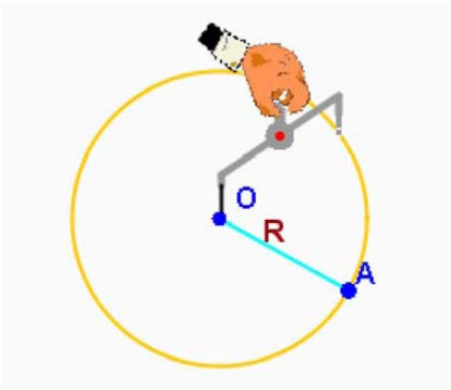
La circumferència.

Marca un punt O sobre un pla. Marca ara un altre punt A qualsevol i calcula la distància entre O i A. Si cerques tots els punts del pla que estan en aquesta mateixa distància del punt O, obtindràs una figura plana, que es coneix com a **circumferència**.

De manera més precisa, la **circumferència** és una línia plana i tancada formada per tots els punts que es troben a la mateixa distància d'un punt O donat.

El punt O s'anomena **centre** de la circumferència i la distància entre el centre i qualsevol dels punts de la circumferència es diu **radi**.

La **circumferència** és una línia plana i tancada en la que tots els punts estan a **igual distància** d'un punto O donat.



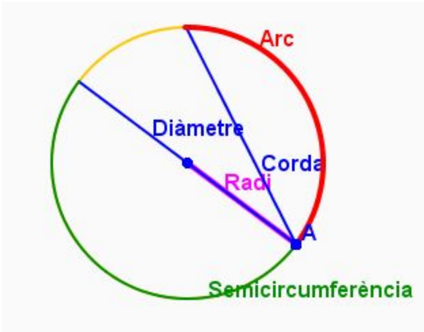
El compàs és un instrument necessari per poder dibuixar circumferències i cercles.

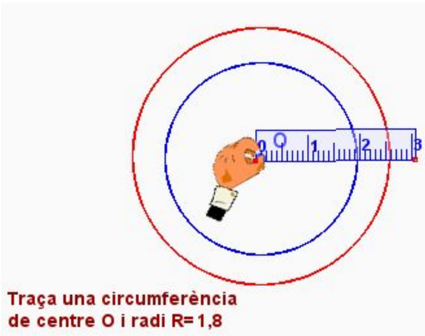
Per a dibuixar una circumferència cal situar la punta del compàs sobre un punt i, amb l'obertura que desitgem, fer-lo girar. L'obertura que li haguem donat al compàs és el **radi** de la circumferència.

Elements de la circumferència.

En una circumferència podem distingir els següents elements:

- **Centre**: és el punt situat en el seu interior que es troba a la mateixa distància de qualsevol punt de la circumferència.
- **Radi**: és el segment que uneix qualsevol punt de la circumferència amb el centre.
- **Corda**: és el segment que uneix dos punts qualssevol de la circumferència.
- **Diàmetre**: és qualsevol corda que passa pel centre de la circumferència.
- **Arc**: és el segment de circumferència comprés entre dos dels punts.
- **Semicircumferència**: és l'arc que compren mitja circumferència.



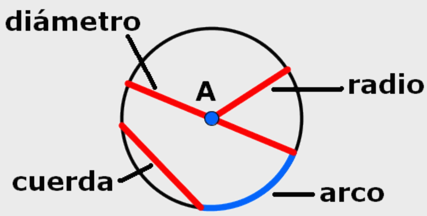


El diàmetre té el **doble de longitud** que el radi.

EXERCICIS resolts

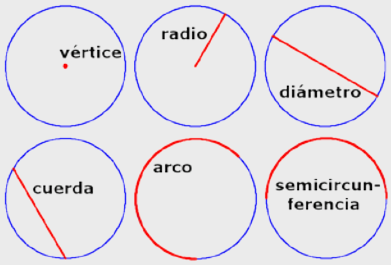
1. Dibuixa amb regle i compàs una circumferència de 3 cm de radi amb centre en el punto A i traça sobre ella els següents elements: un radi, un diàmetre, una corda i un arc.

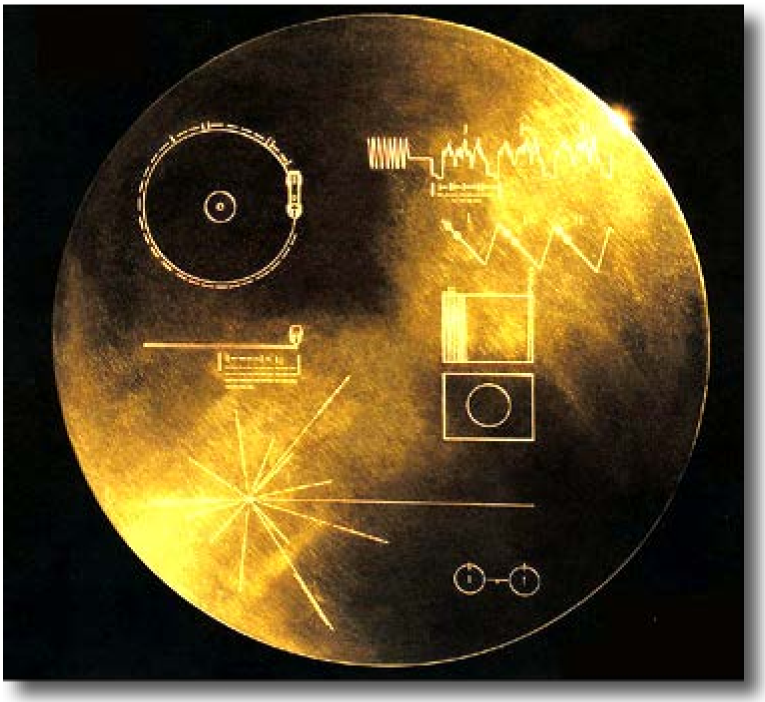
Sol. Utilitza els instruments de dibuix per obtenir un resultat similar a aquest:



2. Identifica en la figura el nom dels diferents elements que apareixen acolorits en vermell.

Sol.





2. Posicions relatives

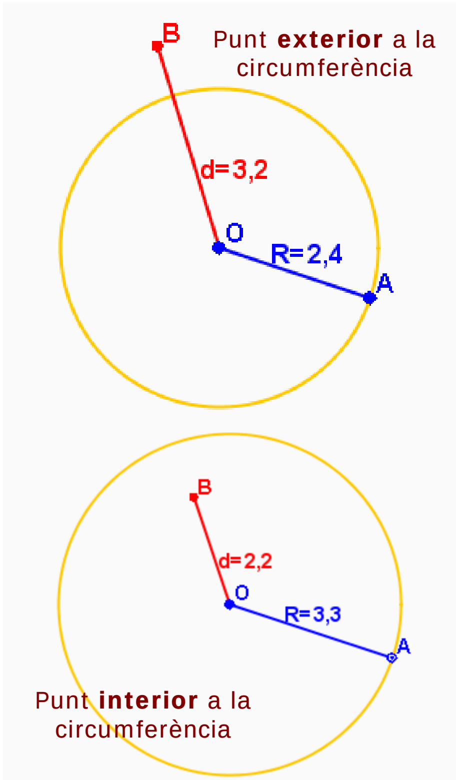
Punt i circumferència.

Entre un punt i una circumferència poden produir-se distintes situacions que anomenem **posicions relatives**.

Diem que el punt és **exterior** a la circumferència si es troba a una distància del centre **més gran** que el radi. En aquest cas el punt està **fora** de la circumferència. El punt és **interior** si es troba a una distància del centre **més petita** que el radi. Aleshores, el punt està **dins** de la circumferència.

Si el punt està situat sobre la circumferència diem que **pertany** a la circumferència. En aquest cas la distància al centre és **igual** al radi.

> Un punt que no pertanyi a la circumferència, pot ser **interior** o **exterior**.



Recta i circumferència.

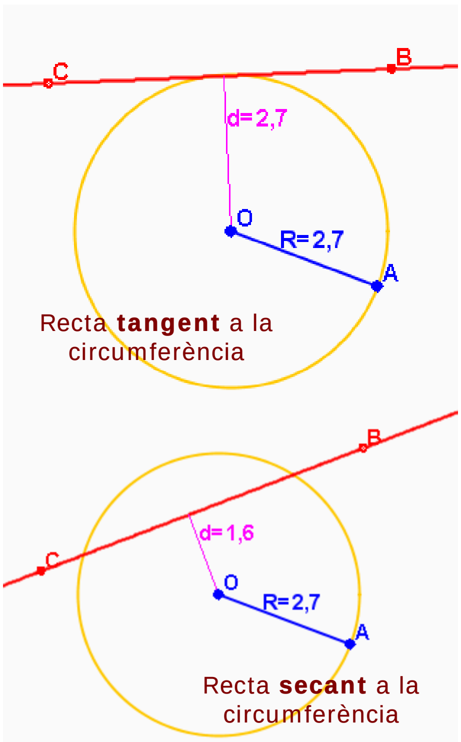
Igual que hem fet amb els punts, podem estudiar la posició relativa d'una recta i una circumferència. Es poden donar els següents casos:

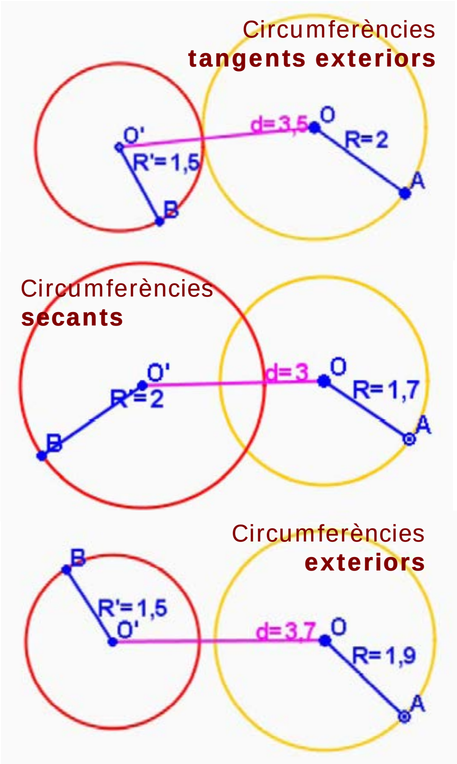
Si la recta no té **cap punt en comú** amb la circumferència, diem que és **exterior**.

Si tenen **un punt en comú**, diem que la recta i la circumferència són **tangents**. En aquest cas, la recta és **perpendicular** al radi.

Si tenen **dos punts en comú**, aleshores diem que la recta i la circumferència són **secants**.

> Anomenem **tangent** a la recta que només té un punt en comú amb la circumferència.





Dues circumferències.

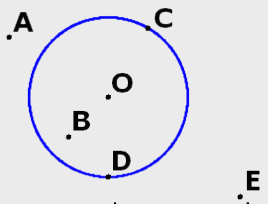
Dues circumferències poden estar en les següents posicions relatives.

- **Exteriors**: tots els punts de cada circumferència són exteriors a l'altra.
- **Interiors**: tots els punts d'una de les circumferències són interiors a l'altra. Si a més tenen el mateix centre, diem que són **concèntriques**.
- **Tangents**: tenen un punt en comú. Seran **tangents exteriors** o **tangents interiors**, depenent de la posició dels punts que no són comuns a ambdues.
- **Secants**: tenen dos punts en comú i cada circumferència divideix a l'altra en dos arcs.

EXERCICIS resolts

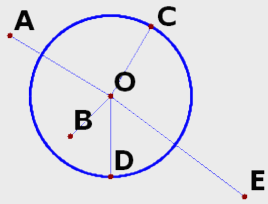
3. Indica si els següents punts són interiors, exteriors o pertanyen a la circumferència.

Sol A i E són exteriors; O i B són interiors; C i D pertanyen a la circumferència.



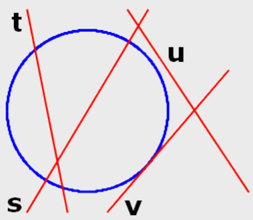
4. Indica quins dels punts estan a igual distància del centre, quins es troben a una distància del centre major que el radi, quins estan a distància menor que el radi i quins estan a una distància equivalent al doble del radi.

Sol Els punts C i D estan situats a la mateixa distància del centre O; A i E estan situats a una distància més gran que el radi; B està situat a menor distància que el radi; E està situat a una distància doble del radi.



5. Indica la posició relativa de les rectes que apareixen en la figura respecte a la circumferència.

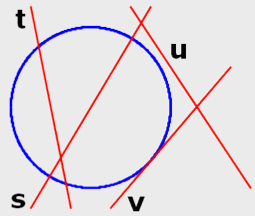
Sol Les rectes t i s són secants; u és exterior a la circumferència; v és tangent.



EXERCICIS resolts

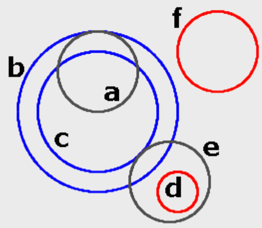
6. Representa sobre la figura la distància de cada una de les rectes al centre de la circumferència i indica en quins casos aquesta distància és major que el radi, en quins casos és menor i en quins és igual al radi.

Sol La distància de la recta u al centre és major que el radi; la distància de t al centre és menor que el radi; la distància de v al centre és igual que el radi; la distància de s al centre és nul·la.



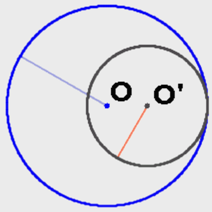
7. Indica la posició relativa dels parells de circumferències que apareixen en la figura: a i b, a i c, b i c, c i f, e i d, e i b, a i d, c i e

Sol Las circumferències a i b són tangents interiors; a i c són secants; b i c són interiors concèntriques; c i f són exteriors; e i d són interiors; e i b són secants; a i d són exteriors; c i e són tangents exteriors.



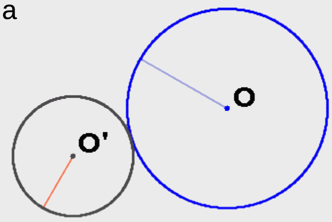
8. Dibuixa dues circumferències de radis 5 cm i 3 cm respectivament que siguin tangents interiors. A quina distància es troben els seus centres?

Sol La distància entre els centres és de 2 cm.



9. Dibuixa les mateixes circumferències anteriors, però aquest vegada en posició de tangents exteriors. A quina distància es troben ara els seus centres?

Sol Els seus centres estan a 8 cm de distància.



10. Dues circumferències tenen radis 3 i 4 cm respectivament, i els seus centres es troben a una distància de 9 cm. Quina és la seva posició relativa?

Sol Són circumferències exteriors.

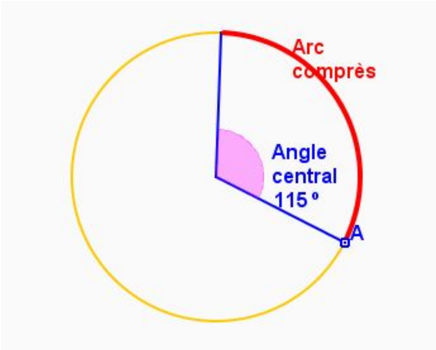
3. Angles en la circumferència

Angle central.

S'anomena **angle central** a qualsevol angle que tingui el seu **vèrtex** en el centre de la circumferència.

Qualsevol angle central talla a la circumferència en dos punts que determinen un arc comprès. Així, un angle de 360º compren a la circumferència completa, un angle de 180º divideix la circumferència en dos arcs iguals i un angle recte compren un arc que és la meitat d'una semicircumferència.

D'aquesta manera és possible identificar cada **angle central** amb el seu **arc** de circumferència corresponent.



L'angle central de la figura es correspon amb l'arc de circumferència dibuixat en vermell.

És possible establir aquesta correspondència entre qualsevol angle central i el seu arc de circumferència, o bé, en sentit contrari, entre qualsevol arc i el seu angle central.

Per aquesta raó, podem parlar de l'**amplitud de l'arc**, que en aquest cas és de 140º.

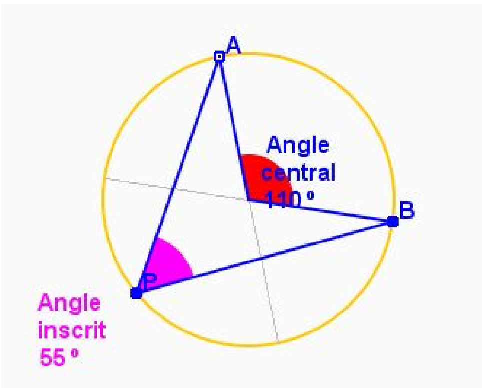
Tot angle central determina un **arc** sobre la circumferència.

Angle inscrit.

S'anomena **angle inscrit** a l'angle que té el seu vèrtex P en la circumferència, de forma que els seus costats són **secants** amb la circumferència.

Si A i B són els punts en què els costats de l'angle inscrit APB tallen a la circumferència i considerem l'angle central AOB que queda determinat pels punts A i B, aleshores resulta que aquest angle central AOB té amplitud doble que l'angle inscrit APB.

Així sabem que l'amplitud de qualsevol angle **inscrit** és la **meitat** de l'amplitud de l'angle **central** corresponent.



L'angle inscrit amb vèrtex en el punt P és la meitat de l'angle central AOB.

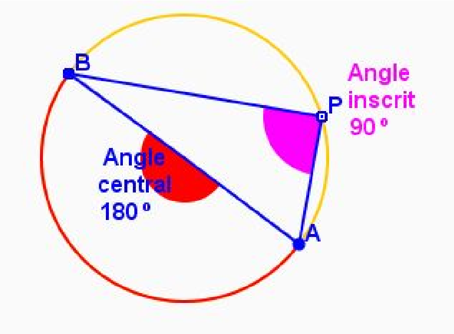
Resulta que si movem el punt P al llarg de la circumferència, l'angle APB tindrà sempre la mateixa amplitud, ja que seguirà essent en tots els casos la meitat de l'angle central.

L'amplitud de qualsevol angle inscrit és la **meitat** de l'amplitud de l'angle central corresponent.

Angle inscrit en la semicircumferència.

Com a conseqüència de la relació existent entre les amplituds dels angles centrals i els seus corresponents angles inscrits, resulta fàcil obtenir l'amplitud d'un **angle inscrit en una semicircumferència**.

Un diàmetre de la circumferència determina una semicircumferència, que es correspon amb un angle central de 180º (pla). Per tant, qualsevol angle inscrit determinat pel diàmetre, tindrà una amplitud que és la meitat de l'angle pla. Per tant, tot **angle inscrit** en una **semicircumferència** és un angle **recte**.

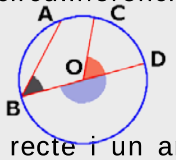


A un angle central li correspon un angle inscrit que n'és la meitat. Per aquest motiu, si l'angle central és pla, l'inscrit serà recte.

EXERCICIS resolts

11. Identifica els següents tipus d'angles, segons la seva posició en la circumferència.

Sol L'angle ABD és un angle inscrit en la circumferència; els angles COD y BOD són angles centrals.



12. Representa sobre la circumferència de la figura un angle central recte i un angle inscrit que li correspongui. Calcula l'amplitud de l'angle inscrit, sense mesurar-lo amb el transportador.

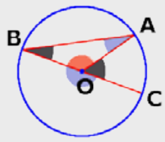
Sol L'angle inscrit és la meitat del seu corresponent angle central. Com que l'angle central és recte, l'inscrit serà de 45º.

13. Representa sobre la circumferència de la figura un angle inscrit recte i el seu corresponent angle central. Calcula l'amplitud de l'angle central, sense mesurar-lo amb el transportador.

Sol L'angle central té amplitud doble que el seu corresponent angle inscrit, per tant, la seva amplitud serà un angle pla.

14. En la figura següent indica l'amplitud dels angles assenyalats, sense utilitzar el transportador, sabent que l'amplitud de l'angle AOC és 54º.

Sol L'angle ABC és l'inscrit corresponent amb AOC, així la seva amplitud serà 27º; AOB mesura 126º per ser el suplementari d'AOC; BAO mesura 27º perquè el triangle ABO és isòsceles; BOC és un angle pla.

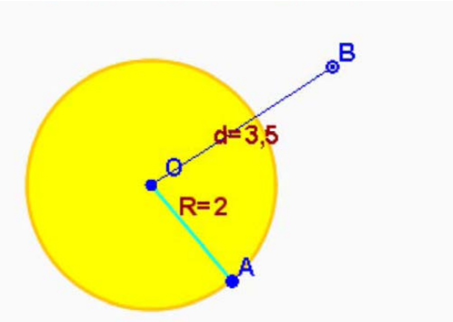


15. Si tallem una empanada rodona en 18 trossos iguals, quin angle correspon a cada porció? En quants trossos l'hauríem de tallar per a que cada porció fos de 30º?

Sol Si la tallem en 18 trossos, tindrà $\frac{360^o}{18} = 20^o$ cada porció; si volem que les porcions siguin de 30º, haurem de fer $\frac{360^o}{30^o} = 12$ porcions.

4. Cercle i figures circulars

El cercle.



Si la distància al centre és major que el radi, el punt serà exterior al cercle.

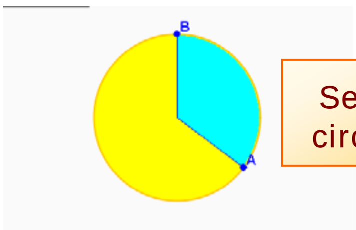
Anomenem **cercle** a la regió plana tancada per una circumferència. De forma més precisa, si O és el centre de la circumferència, el cercle és la regió del pla formada per tots els punts la **distància** dels quals al centre O és **menor o igual** que el **radi** de la circumferència.

Així, el cercle comprèn tots els punts de la circumferència i també tots els punts interiors a ella. La circumferència és, per tant, el **contorn**, la "frontera" del cercle.

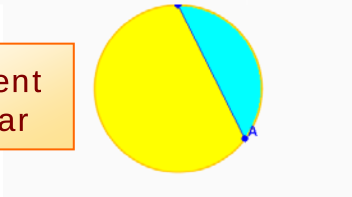
S'anomenen centre, radi i diàmetre del cercle al centre, radi i diàmetre de la seva circumferència.

El **cercle** està format per la **circumferència** i tots els punts **interiors** a ella.

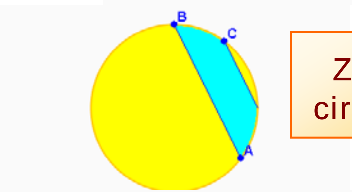
Figures circulars.



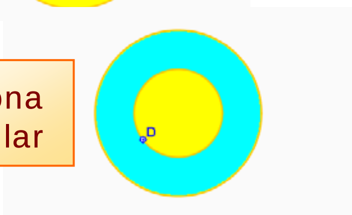
Sector circular



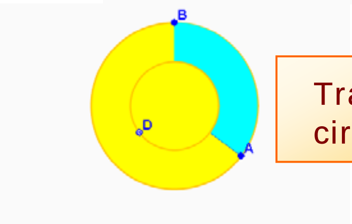
Segment circular



Zona circular



Corona circular



Trapezi circular

Els radis, les cordes i les circumferències concèntriques determinen diverses **figures circulars**.

S'anomena **sector circular** a la regió del cercle determinada per dos radis.

S'anomena **segment circular** a la regió del cercle determinada per una corda. La regió delimitada per dues cordes paral·leles s'anomena **zona circular**.

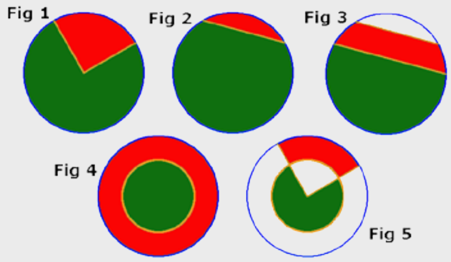
La regió determinada per dues circumferències concèntriques s'anomena **corona circular**. Si tallem una corona circular per dos radis, obtenim una figura anomenada **trapezi circular**.

Els radis, cordes i circumferències concèntriques determinen diverses **figures circulars**.

EXERCICIS resolts

16. Identifica pel seu nom els elements que apareixen representats en vermell i en verd en les figures següents.

Sol
Fig 1 verd .... sector circular
vermell ..... sector circular
Fig 2 verd .... segment circular
vermell ..... segment circular
Fig 3 verd .... segment circular
vermell ..... zona circular
Fig 4 verd .... cercle
vermell ..... corona circular
Fig 5 verd .... sector circular
vermell ..... trapezi circular



Els sectors circulars, corones, semicercles i altres elements són presents en tota classe d'objectes de diferent naturalesa.

Longituds en la circumferència.

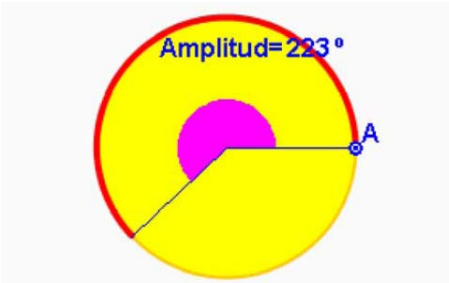
En qualsevol circumferència, en dividir la seva longitud pel diàmetre, s'obté una quantitat fixa una mica més gran que tres. Aquesta **divisió** dóna sempre **3,1415926 ...** Aquest nombre es designa per la lletra grega π (pi) i té infinites xifres decimals no periòdiques.

Si L és la longitud de la circumferència i D el diàmetre, llavors $L = \pi \cdot D$. Com que el diàmetre és el doble del radi R, la longitud de la circumferència serà:

$$\mathbf{L = 2 \cdot \pi \cdot R}$$

Per trobar la longitud de l'arc de circumferència, fem correspondre el perímetre $2 \cdot \pi \cdot R$ amb l'amplitud 360º. I per **proporcionalitat directa**, si n és l'amplitud de l'arc, resulta

$$L_{arc} = \frac{n \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{360}$$



EXEMPLE

Per a calcular la longitud L_{arc} de l'arc de 223º escrivim la següent proporció:

$$\begin{matrix} L_{arc} & \rightarrow & 223^{\circ} \\ L_{circumf} & \rightarrow & 360^{\circ} \end{matrix} \quad \text{així} \quad \frac{L_{arc}}{L_{circumf}} = \frac{223^{\circ}}{360^{\circ}}$$

i d'aquí obtenim que la longitud de l'arc és $L_{arc} = \frac{223^{\circ}}{360^{\circ}} \cdot L_{circumf}$

Donat que la longitud de la circumferència és $L_{circumf} = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}58$, ja podem conèixer la longitud de l'arc que cercàvem.

EXERCICIS resolts

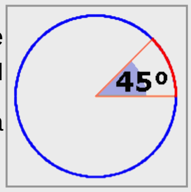
17. Calcula la longitud d'una circumferència que té 20 cm de radi.

Sol La longitud és $L = 2 \cdot \pi \cdot 20 = 125{,}66$ cm.

18. Calcula la longitud de dues circumferències que tenen 30 cm de diàmetre, la primera, i 15 cm de radi la segona.

Sol El radi de la primera és la meitat del diàmetre, és a dir, 15 cm. Per tant ambdues tenen el mateix radi i la seva longitud és $L = 2 \cdot \pi \cdot 15 = 94{,}25$ cm.

19. Calcula la longitud de la circumferència i dels arcs pintats en blau i vermell, sabent que el seu radi és 3 cm.



Sol La circumferència té una longitud de $L = 2 \cdot \pi \cdot 3 = 18{,}85$ cm. L'angle de 45º és la vuitena part de la circumferència, així que l'arc vermell té longitud $L_{arc\ ver} = \frac{18{,}85}{8} = 2{,}36$ cm. L'arc blau és la diferència entre la circumferència i l'arc vermell: $L_{arc\ blau} = 18{,}85 - 2{,}36 = 16{,}49$ cm.

20. Calcula la longitud de l'arc corresponent a un angle de 180º en una circumferència de radi 1. Calcula també les longituds dels arcs de 30º, 90º i 270º.

Sol La circumferència de radi 1 té longitud $L = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2 \cdot \pi$ i l'arc de 180º és una semicircumferència, així que la seva longitud serà la meitat: $L_{semicerc} = \pi = 3{,}14$. Els arcs de 30º, 90º i 270º són la dotzena, la quarta i les tres quartes parts de la circumferència, respectivament, així que les seves longituds són: $L_{arc\ 30^o} = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot \pi = 0{,}52$, $L_{arc\ 90^o} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi = 1{,}57$, $L_{arc\ 270^o} = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \pi = 4{,}71$.

21. Calcula el radi d'una circumferència sabent que té una longitud de 25,13 cm.

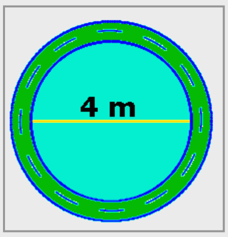
Sol El radi serà $R = \frac{25{,}13}{2 \cdot \pi} = 4$ cm.

22. Calcula el radi d'una circumferència sabent que a un angle de 60º li correspon un arc de 10 cm. I si fos un angle de 203º a qui correspon un arc de 15 cm?

Sol L'angle de 60º és la sisena part de la circumferència, així que la longitud de la circumferència completa és 60 cm i el seu radi serà $R = \frac{60}{2 \cdot \pi} = 9{,}55$ cm. Per a l'arc de 203º, tenim que $L_{arc} = \frac{n}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$, d'on $15 = \frac{203}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$ i d'aquí $R = \frac{360 \cdot 15}{2 \cdot \pi \cdot 203} = 4{,}23$ cm.

23. Una piscina circular de 4 m de diàmetre està rodejada per una vorera de 1 m d'amplada. Quina serà la longitud de la vorera si la mesurem exactament per la meitat de la seva amplada?

Sol Donat que l'amplada de la vorera és de 1 m, justament per la meitat tindrem una circumferència de radi $2 + 0{,}5 = 2{,}5$ m. La longitud aleshores serà $L = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}5 = 15{,}71$ cm.



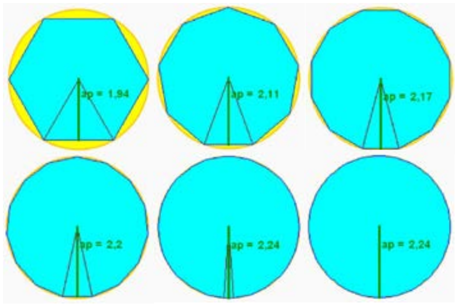
Àrees en el cercle.

✓ L'**àrea** d'un **cercle** es pot calcular si el considerem com un polígon regular de "molts" costats, en el qual l'apotema coincideix amb el radi.

$$\text{Àrea d'un polígon regular} = \frac{Perímetre \cdot apotema}{2}$$

$$\text{Que es converteix en } \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot R}{2} = \pi \cdot R^2$$

Obtenim així la fórmula que ens dóna l'àrea a partir del radi.



$$\textbf{Àrea} = \pi \cdot \mathbf{R^2}$$

✓ L'**àrea** d'un **sector circular** d'amplitud n, es calcula utilitzant la proporcionalitat directa. Resulta la fórmula:

$$A_{sector} = \frac{n \cdot \pi \cdot R^2}{360}$$

EXEMPLE

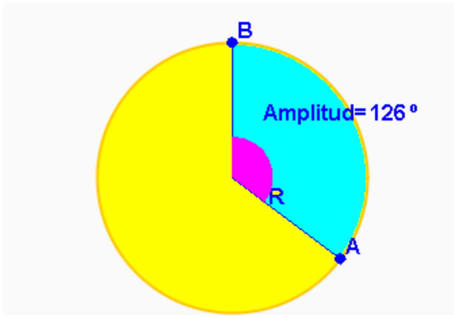
Per a calcular l'àrea A_{sector} del sector de 126º d'un cercle de radi 2,5 cm, expressem la següent proporció:

$$\begin{array}{lcl} A_{sector} & \rightarrow & 126^\circ \\ A_{cerc} & \rightarrow & 360^\circ \end{array} \quad \text{així que } \frac{A_{sector}}{A_{cerc}} = \frac{126^\circ}{360^\circ}$$

i d'aquí obtenim que l'àrea del sector és

$$A_{sector} = \frac{126^\circ}{360^\circ} \cdot A_{cerc}$$

Donat que l'àrea del cercle és $A_{cerc} = \pi \cdot 2{,}5^2$, ja podem conèixer l'àrea del sector que buscàvem.



$$Àrea_{sector} = \frac{126 \cdot \pi \cdot 2{,}5^2}{360} = 27{,}74\ cm^2$$

✓ Per a calcular l'**àrea** de la **corona circular** es resten les àrees dels cercles major i menor:

$$\mathbf{A_{corona}} = \pi \cdot (\mathbf{R^2 - r^2})$$

on R i r són els radis major i menor de la corona.

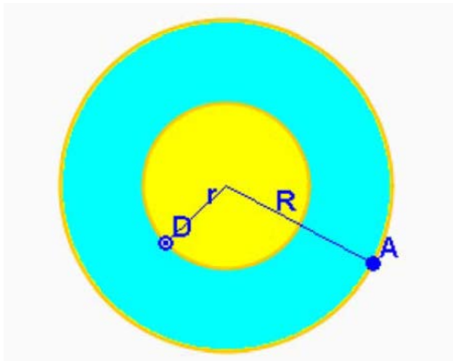
EXEMPLE

Per a calcular l'àrea A_{corona} de la corona circular de radi major 3,5 i radi menor 1,75 calcularem l'àrea de cada un dels dos cercles:

$$A_{major} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 3{,}5^2 \text{ i } A_{menor} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1{,}75^2$$

Restant ambdues àrees obtenim:

$$A_{corona} = \pi \cdot 3{,}5^2 - \pi \cdot 1{,}75^2 = \pi \cdot \left(3{,}5^2 - 1{,}75^2\right) = 28{,}86$$



$$A_{corona} = \pi \cdot \left(3{,}5^2 - 1{,}75^2\right) = 28{,}86\ cm^2$$

EXERCICIS resolts

24. Calcula l'àrea d'un cercle de 5 cm de radi.

Sol L'àrea és $A = \pi \cdot 5^2 = 78{,}54\ \text{cm}^2$.

25. Calcula l'àrea de dos cercles de 10 cm i de 20 cm de diàmetre, respectivament.

Sol Les àrees són $A_1 = \pi \cdot 5^2 = 78{,}54$ i $A_2 = \pi \cdot 10^2 = 314{,}16\ \text{cm}^2$. És important notar que si un cercle té radi el doble que un altre, la seva àrea no és el doble sinó el quàdruple de la primera.

26. Calcula l'àrea de les figures circulars acolorides.
Nota: El radi de las circumferències exteriors és 2 cm en tots els casos i el de les interiors és 1,2 cm.

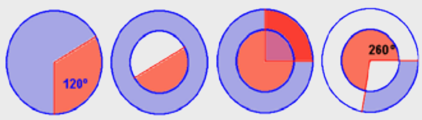


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

Sol Fig 1 $A_{sector\ verm} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 = 4{,}19\ \text{cm}^2$, $A_{sector\ blau} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 = 8{,}38\ \text{cm}^2$;

Fig 2 $A_{corona} = \pi \cdot \left(2^2 - 1{,}2^2\right) = 8{,}04\ \text{cm}^2$, $A_{semicerc} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1{,}2^2 = 2{,}26\ \text{cm}^2$;

Fig 3 $A_{trap\ verm} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(2^2 - 1{,}2^2\right) = 2{,}01\ \text{cm}^2$, $A_{trap\ blau} = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot \left(2^2 - 1{,}2^2\right) = 6{,}03\ \text{cm}^2$;

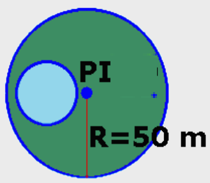
$A_{sector\ verm} = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 1{,}2^2 = 3{,}39\ \text{cm}^2$, $A_{sector\ blau} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1{,}2^2 = 1{,}13\ \text{cm}^2$;

Fig 4 $A_{sector\ verm} = \frac{260}{360} \cdot \pi \cdot 1{,}2^2 = 3{,}27\ \text{cm}^2$, $A_{trap\ blau} = \frac{100}{360} \cdot \pi \cdot \left(2^2 - 1{,}2^2\right) = 2{,}23$ cm^2.

27. Quin és el perímetre d'un cercle d'àrea 25 cm²?

Sol El radi és $R = \sqrt{\frac{25}{\pi}} = 2{,}82$ i el perímetre $L = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}82 = 17{,}72\ \text{cm}$.

28. Es vol construir una piscina rodona en una finca circular de 50 m de diàmetre, conservant un pi que hi ha en el centre. Calcula el diàmetre màxim de la piscina i la superfície de finca que quedarà després de l'obra.



Sol Per a conservar el pi, la piscina no podrà tenir un diàmetre més gran que el radi de la finca, que és de 25 m i el seu radi serà de 12,5 m. L'àrea màxima de la piscina serà: $AP = \pi \cdot 12{,}5^2 = 490{,}63\ \text{m}^2$ L'àrea de la finca és de $AF = \pi \cdot 25^2 = 1962{,}5\ \text{m}^2$, per tant, la superfície restant de la finca és: $1962{,}5 - 490{,}63 = 1471{,}87\ \text{m}^2$

29. La busca dels segons d'un rellotge mesura 1.6 cm. Calcula l'àrea del sector circular que descriu aquesta busca després de 42 segons.

Sol Descriu un angle de 252º, d'àrea $A = {}^{252}\!/\!_{360} \cdot \pi \cdot 1.6^2 = 5.63\ \text{cm}$.

30. Si la minutera d'un rellotge mesura 4 cm, calcula l'àrea del sector circular que descriu aquesta busca entre les 3:20 i les 4:00. Calcula l'àrea del sector que descriu en el mateix interval de temps la busca horària, la qual mesura 3 cm.

Sol La minutera descriu 240º i escombra un àrea de $A_{minutera} = \frac{240}{360} \pi \cdot 4^2 = 33{,}51\ \text{cm}^2$.

La busca horària avança 20º i l'àrea és $A_{horaria} = \frac{20}{360} \pi \cdot 3^2 = 1{,}57\ \text{cm}^2$.

Per a practicar

1. En una circumferència de radi 7,6 Quina és la distància entre el centre de la circumferència i qualsevol dels seus punts? Quant mesura el diàmetre de la circumferència?

2. En una circumferència de radi 4,6 és possible traçar una corda de longitud 9,6?

3. Si una circumferència té longitud 45 i un arc té longitud 25, quina amplitud tindrà l'angle central corresponent a aquest arc?

4. Si una recta es troba a una distància de 2,8 del centre d'una circumferència de radi 8,8 quina és la seva posició relativa?

5. Si els centres de dues circumferències estan a una distància de 9,9 i una d'elles té radi 2,1 com haurà de ser el radi de l'altra perquè siguin exteriors?

6. Si l'angle central d'una circumferència té una amplitud de 160º, quina serà l'amplitud de l'angle inscrit corresponent?

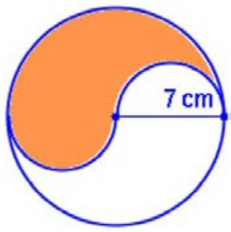
7. Quina serà l'amplitud de l'angle central si sabem que el seu corresponent angle inscrit té una amplitud de 27º? Quina figura es forma quan l'angle inscrit és recte?

8. Calcula la longitud d'una circumferència de radi 3,4 i l'àrea del cercle corresponent. Calcula la longitud de l'arc d'amplitud 241º i l'àrea del sector corresponent.

9. Calcula el radi interior d'una corona circular sabent que el seu radi exterior és 7 i la seva àrea 125,6.

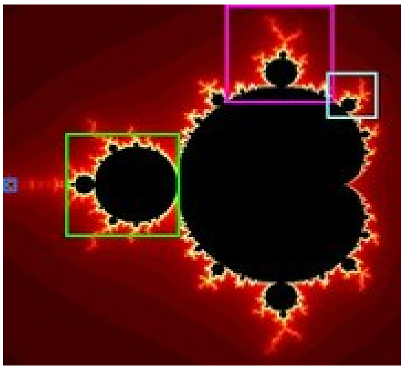
10. Calcula l'àrea i el perímetre d'una finestra formada per un rectangle de 1,6 m d'amplada i el doble d'alçada, coronada per un semicercle.

11. Calcula l'àrea i el perímetre de la figura acolorida en taronja.

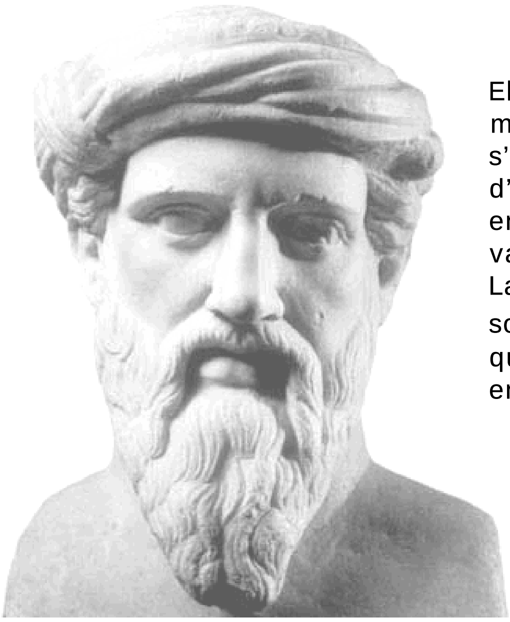


Per saber-ne més

La importància d'un nombre.



El nombre π ha estat una de les primeres i més importants empreses científiques de tota la història. Des dels inicis de la geometria era coneguda la relació que existeix entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre. El quocient entre ambdues magnituds és precisament π, que pren el seu nom de Pitàgores.



El problema era obtenir el valor exacte d'aquest misteriós nombre i des de les èpoques egípcia i grega s'han anat donant diferents aproximacions. Una d'aquestes aproximacions és la fracció 22/7 i després en van aparèixer d'altres, cada cop més properes al valor exacte. En 1768 el suís Johann Heinrich Lambert va demostrar una cosa que es venia sospitant: que π no és un nombre racional, és a dir, que no es pot obtenir com a quocient de dos nombres enters.

Però el nombre potser més famós de la història, és encara més especial: va resultar que π tampoc és un nombre algebraic. Això vol dir que no existeix cap equació construïda amb les operacions bàsiques de sumar, restar, multiplicar i elevar a una potència, que tingui com a solució el nombre π, com va demostrar l'alemany Lindemann en 1882. En l'actualitat, sabem que π és un nombre format per infinites xifres decimals no periòdiques. Existeixen projectes per a determinar les seves xifres, de les quals ja en coneixem uns quants milions. Si tens temps ... ja ho saps!

Recorda el més important

La circumferència i els seus elements.

La **circumferència** és una figura plana en la qual tots els seus punts estan a la **mateixa distància** del **centre**. Els seus elements més importants són:

- el **centre**
- el **radi**
- la **corda**
- el **diàmetre**
- l'**arc**
- la **semicircumferència**

Distingim diferents **posicions relatives** de punts, rectes i circumferències.

Existeix una relació fonamental entre un **angle central** i el corresponent **angle inscrit**: l'amplitud del primer és el **doble** de la del segon.

Com a conseqüència de l'anterior, tot angle inscrit en una semicircumferència és recte.

El cercle i els seus elements. Longituds i àrees.

El **cercle** és la figura plana formada per una circumferència i tots els **punts interiors** a ella. Les figures circulars són:

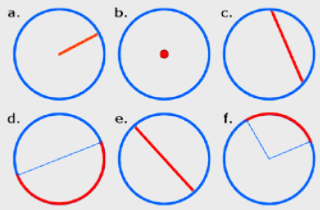
- el **sector** circular
- el **segment** circular
- la **zona** circular
- la **corona** circular
- el **trapezi** circular

Si R és la longitud del **radi** podem obtenir el **perímetre** i l'**àrea** del cercle:

- el perímetre és $L = 2 \cdot \pi \cdot R$
- l'àrea és $A = \pi \cdot R^2$

Aquestes fórmules i la **proporcionalitat directa** ens permeten conèixer la **longitud** dels **arcs** i les **àrees** de **sectors**, **corones** i **trapezis** circulars.

Autoavaluació



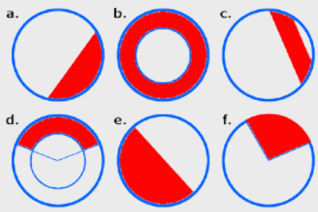
1. Relaciona l'element de la circumferència marcat en vermell amb el seu nom corresponent.

2. Indica la posició relativa d'un punt situat a distància de 9,2 del centre d'una circumferència de radi 6,8.

3. Indica la posició relativa d'una recta situada a distància de 6,8 del centre d'una circumferència de radi 7,6.

4. Indica la posició relativa de dues circumferències de radis 5,7 i 0,9 i els centres de les quals estan situats a una distància de 4,8.

5. Quina és l'amplitud de l'angle inscrit en una circumferència sabent que el seu corresponent angle central és de 224º?



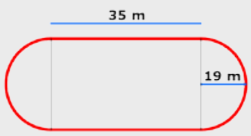
6. Identifica pel seu nom les figures circulars representades en vermell.

7. Calcula la longitud de l'arc que inclou un angle de 145º en una circumferència de radi 9,6.

8. Quin serà el radi d'una circumferència sabent que l'àrea del sector circular d'amplitud 154º és de 71,6?

9. Calcula l'àrea d'un camí de 3 metres d'amplada i que envolta un jardí de forma circular de 7,9 metres de diàmetre.

10. Calcula la distància que recorre una velocista en donar 26 voltes a un circuit com el de la figura.



Solucions dels exercicis per a practicar

1. El radi: R= 7,6.
D=15,2.

2. No és possible traçar en una circumferència cordes més grans que el diàmetre, que en aquest cas és 9,2.

3. Donat que la longitud és directament proporcional a l'angle resulta:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \rightarrow & 25 \\ 360^\circ & \rightarrow & 45 \end{array}$$

així, l'angle central serà $\alpha = \frac{25}{45} \cdot 360^\circ = 200^\circ$

4. Si la distància és menor que el radi, la recta i la circumferència són secants.

5. El radi de l'altra haurà de ser menor que la diferència $9{,}9 - 2{,}1$: $R < 7{,}8$

6. L'angle inscrit serà la meitat de 160º, és a dir, 80º.

7. L'amplitud de l'angle central és el doble de 27º, és a dir, 54º. En cas de que l'angle inscrit sigui recte, el central serà pla i es forma un triangle rectangle.

8. La longitud és $L = 2 \cdot \pi \cdot 3{,}4 = 21{,}36$ i l'àrea $A = \pi \cdot 3{,}4^2 = 36{,}32$. L'arc té longitud $L_{arc} = \frac{241}{360} \cdot 21{,}36 = 14{,}30$
i l'àrea del sector és
$A_{sector} = \frac{241}{360} \cdot 36{,}32 = 24{,}31$.

9. L'àrea de la corona és la diferència entre les àrees dels dos cercles i donat que l'àrea del cercle exterior és 153,86, l'àrea de la interior ha de ser 28,26 i, per tant, el radi interior és $r = \sqrt{\frac{28{,}26}{\pi}} = 3$.

10. El rectangle mesura 1,6 d'amplada i 3,2 d'alçada i el radi del semicercle superior és 0,8. Amb aquests valors el perímetre és
$P = 1{,}6 + 2 \cdot 3{,}2 + \pi \cdot 0{,}8^2 = 10{,}51$ m i
l'àrea $A = 1{,}6 \cdot 3{,}2 + \frac{\pi \cdot 0{,}8^2}{2} = 6{,}12$ m^2.

11. L'àrea és la meitat de l'àrea del cercle: $\pi \cdot 7^2 = 153{,}86$ cm^2, la meitat 76,93 cm^2
El perímetre $\pi \cdot 7 + 2\pi 3{,}5 = 43{,}96$ cm

Solucions AUTOAVALUACIÓ

1. a. radi, b. centre, c. corda, d. semicircumferència, e. diàmetre, f. arc.

2. El punt és exterior a la circumferència.

3. La recta i la circumferència són secants.

4. La circumferència menor 0,9 és tangent interior a la circumferència més gran.

5. $\frac{224^\circ}{2} = 112^\circ$

6. a. segment, b. corona, c. zona, d. trapezi, e. semicercle, f. sector.

7. La longitud de l'arc és 24,29.

8. El radi és 7,30.

9. L'àrea és 177,19 m^2.

10. La distància recorreguda és de 4 923,89 m.

NOTA IMPORTANT: En la resolució dels exercicis d'aquesta quinzena s'ha utilitzat el valor de π aproximat a dues xifres decimals, és a dir, $\pi \approx 3{,}14$. Els càlculs i resultats es donen també arrodonits a dues xifres decimals.